

Universität Leipzig, 29. Juni 2005

Konfigurationsraum eines Gestänges

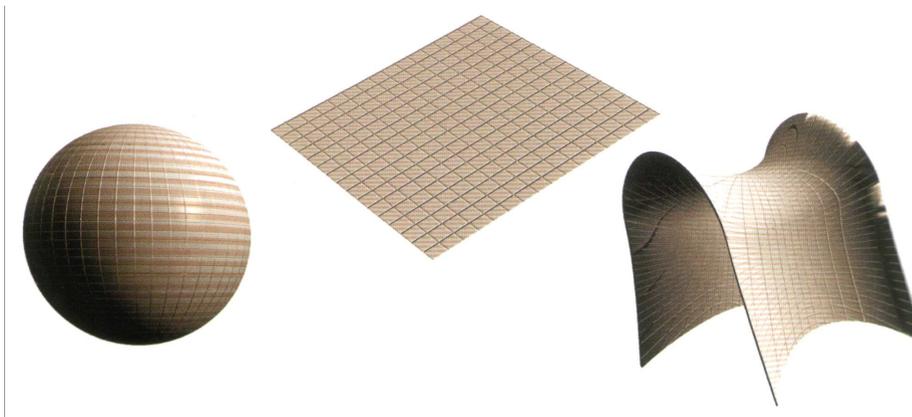
Diana Khoromskaia
Wilhelm-Ostwald-Gymnasium
Leipzig

Betreuer: Herr Prof. Dr. Schwarz (Universität Leipzig)

Inhalt

1. Einleitung
2. Der Konfigurationsraum des Gestänges
3. Der Konfigurationsraum als Fläche
4. Das Modell des Übergangs
5. Geodäten auf dem Konfigurationsraum
6. Die Übergänge
7. Weiterführende Problemstellungen

- **Topologie**: Zweig der Mathematik, befasst sich mit geometrischen Objekten im Raum
- *Anwendung*: Naturwissenschaften (Astronomie), „Robotics“



S. Hawking: Universum in der Nußschale, 2002

- Berechnung des Konfigurationsraums von z.B. Greifarmen

Das Modell

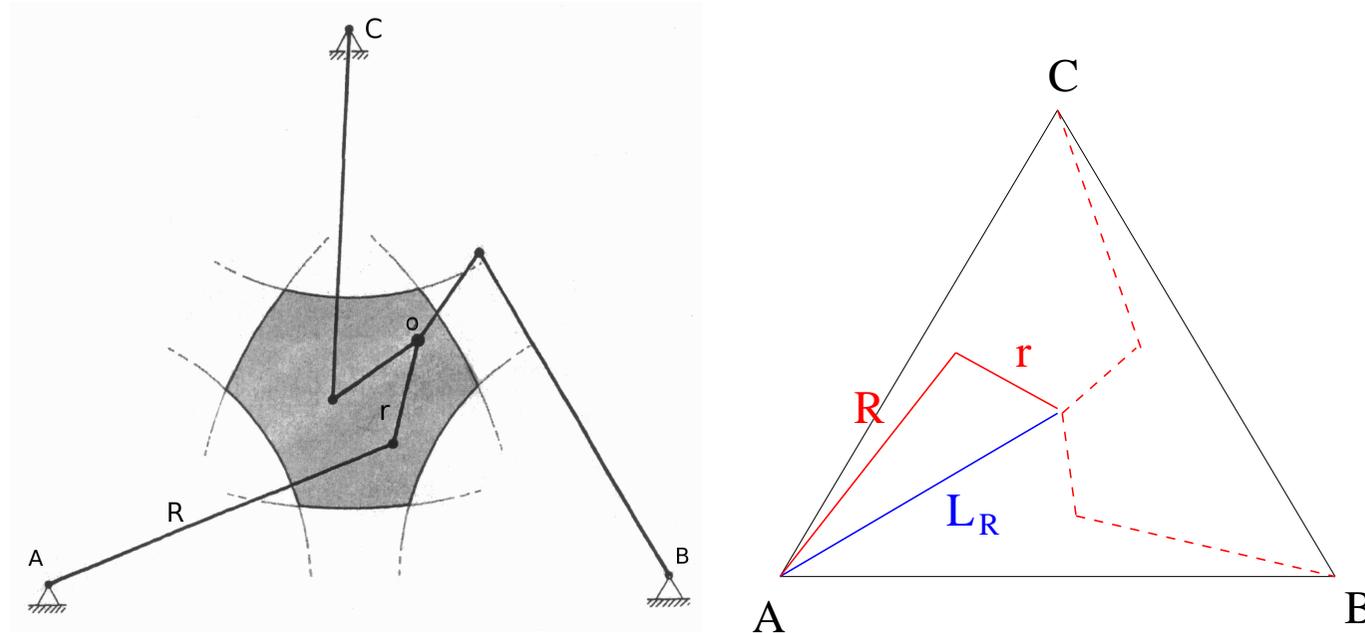


Abbildung 1: Das Gestänge und die bestimmenden Parameter.

- das Gestänge besteht aus drei Doppelarmen in der Ebene
- jeder Doppelarm besteht aus einer großen und einer kleinen Stange
- Die großen Stangen sind fest verankert, die drei kleinen sind durch ein Gelenk (O) verbunden.

- **Konfigurationsraum**= Menge aller Gestänge-Positionen.
Position= Ort von O + Stellung der Doppelarme
- 3 Doppelarme können math. **positiv** oder **negativ** eingerenkt sein:
 $2^3 = 8$ Möglichkeiten der Stellung der Doppelarme für eine Position von O .
- Parameter „Einrenkungssinn“ muss berücksichtigt werden: **8 Konfigurationsblätter**

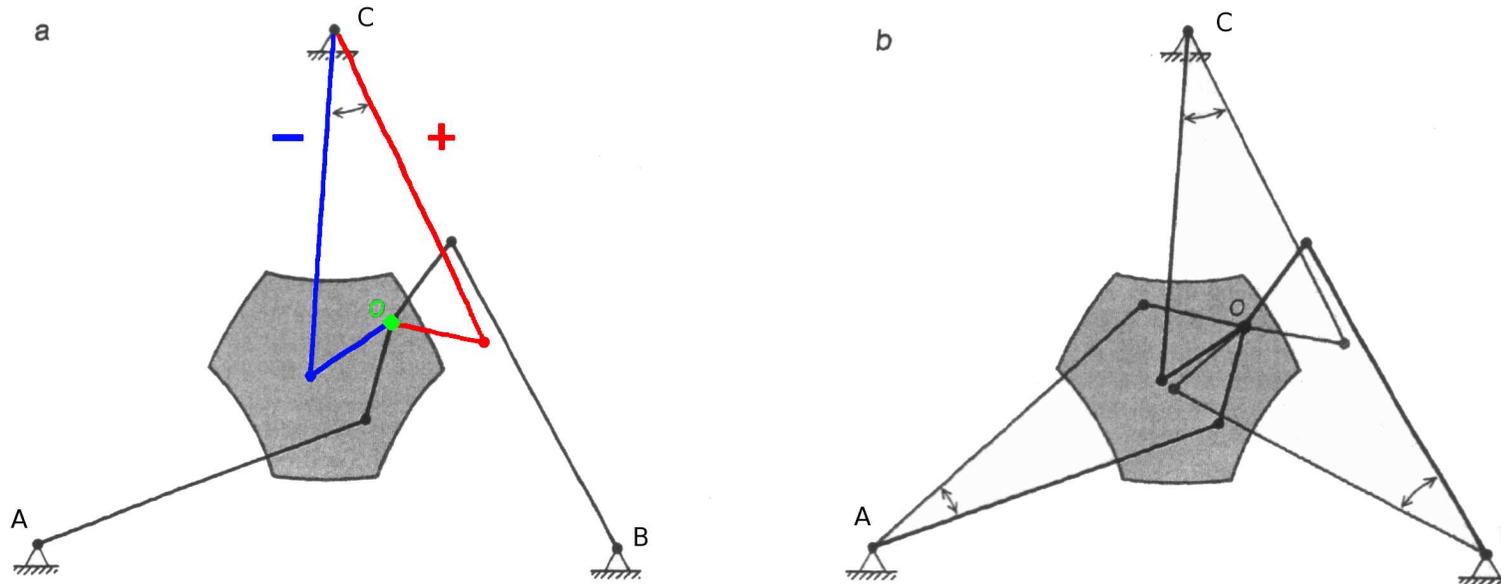


Abbildung 2: a) Ein Doppelarm kann math. **positiv** oder **negativ** eingelenkt sein. b) Es gibt 8 Möglichkeiten der Stellung der Doppelarme für jede Position von O .

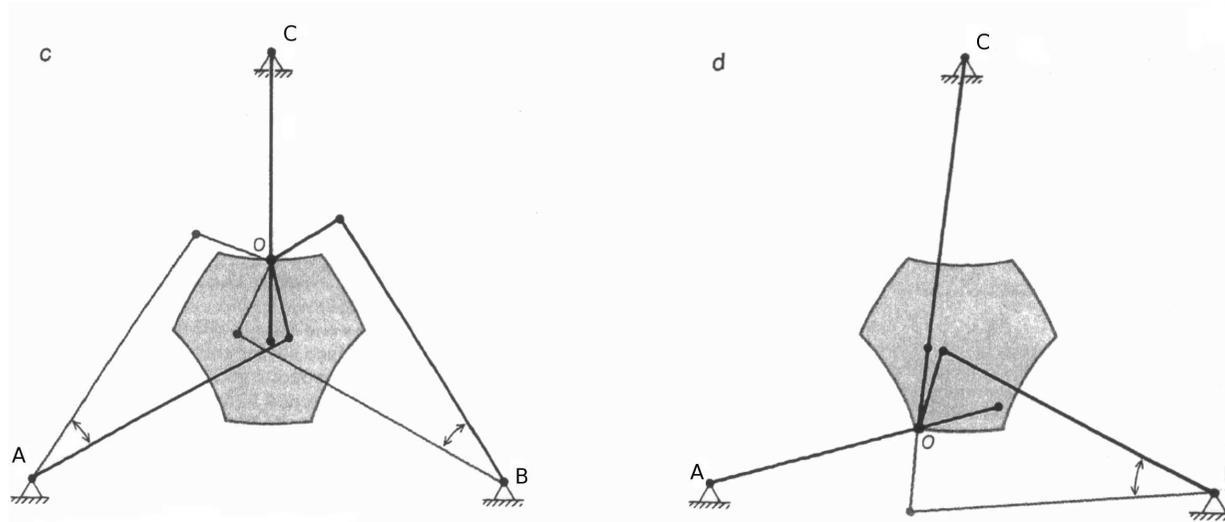


Abbildung 3:

- An einer Kante ist jeweils ein Doppelarm maximal eingeklappt oder ausgestreckt
⇒ 2 Konfigurationsblätter sind verbunden.
- An einer Ecke sind zwei Doppelarme ausgestreckt oder eingeklappt ⇒ 4 Konfigurationsblätter sind „verklebt“.

Abhängigkeit von den Parametern

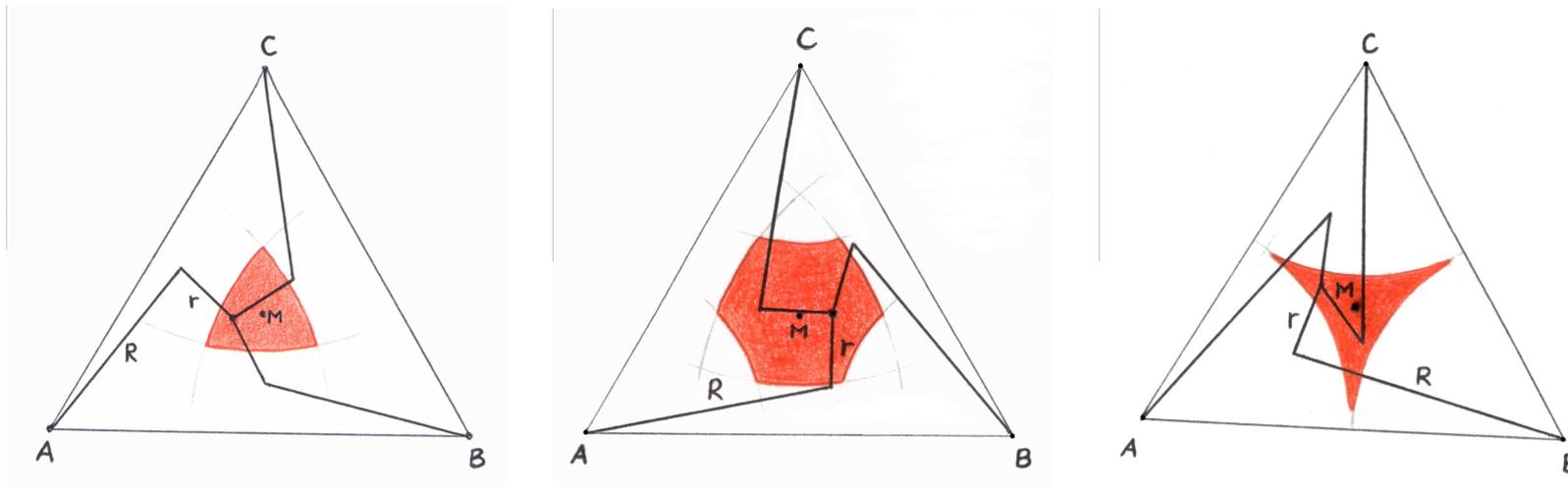


Abbildung 4: Es gibt drei verschiedene Formen der Konfigurationsblätter in Abhängigkeit von R , r und L_R .

- konvexes Dreieck:

$$R \leq \frac{3L_R(L_R + r)}{3L_R + 4r}$$

- konkaves Dreieck:

$$R \geq \frac{3L_R(L_R - r)}{3L_R - 4r}$$

- Sechseck:

$$R > \frac{3L_R(L_R + r)}{3L_R + 4r}$$

$$R < \frac{3L_R(L_R - r)}{3L_R - 4r}$$

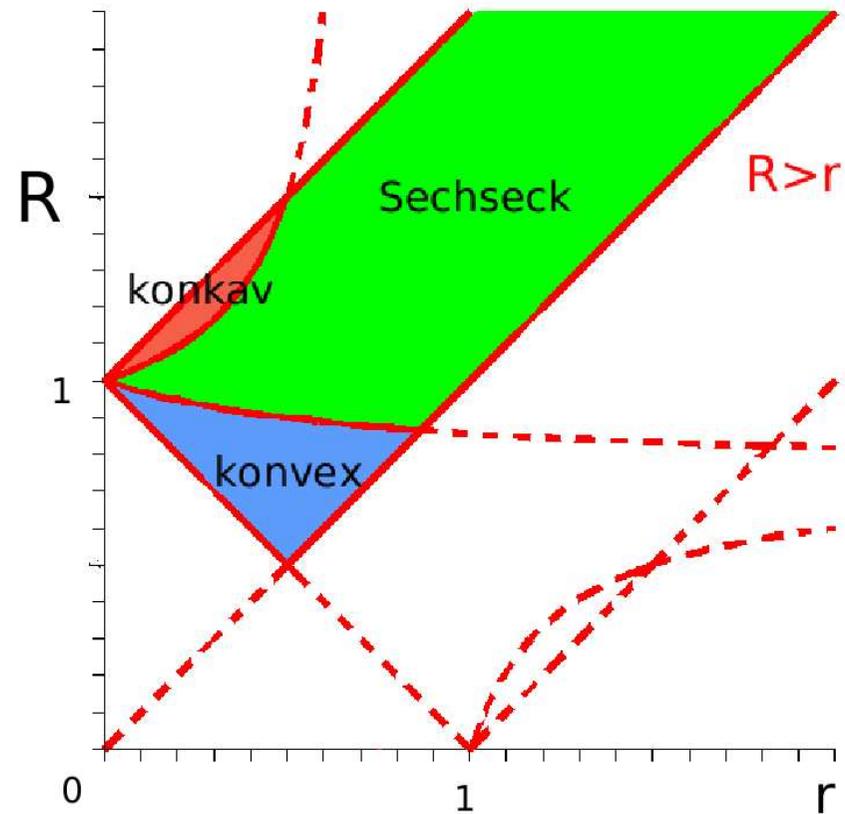


Abbildung 5: Das Phasendiagramm stellt die Bereiche des Sechsecks, des konkaven und des konvexen Dreiecks dar (R in Abhäng. von r , $L_R = 1$).

Nachweis der Flächeneigenschaften

- geschlossen:
 - *kein Rand*, da an jeder Kante immer zwei Blätter „verklebt“ sind und an jeder Ecke vier,
 - *kompakt*, da aus genau 8 Konfigurationsblättern bestehend.
- orientierbar: hat zwei Seiten
- sieht überall lokal aus wie eine *Kreisscheibe*:
 - im Inneren eines Konfigurationsblattes trivial,
 - an den Kanten werden zwei Hälften einer Kreisscheibe „verklebt“,
 - an den Ecken werden vier Viertel einer Kreisscheibe „verklebt“.

⇒ Der Konfigurationsraum ist eine **geschlossene, orientierbare** Fläche → Eulersche Charakteristik

Art der Fläche

- **Eulerscher Polyedersatz:** Für eine Fläche gilt: die *Eulersche Charakteristik* χ errechnet sich aus der Anzahl der Ecken E minus die Anzahl der Kanten K plus die Anzahl der Seitenflächen F : $\chi = E - K + F$
- Zusammenhang zw. der Anzahl der Henkel bzw. dem Geschlecht g und χ : $g = 1 - \frac{\chi}{2}$.
- Für **sechseckige** Konfigurationsblätter gilt:
 $\chi = 12 - 24 + 8 = -4$
- dann ist g : $g = 3$, \Rightarrow **Sphäre mit drei Henkeln**
- Für **dreieckige** Konfigurationsblätter gilt: $\chi = 6 - 12 + 8 = 2$
- dann ist g : $g = 0$, \Rightarrow **Sphäre**.

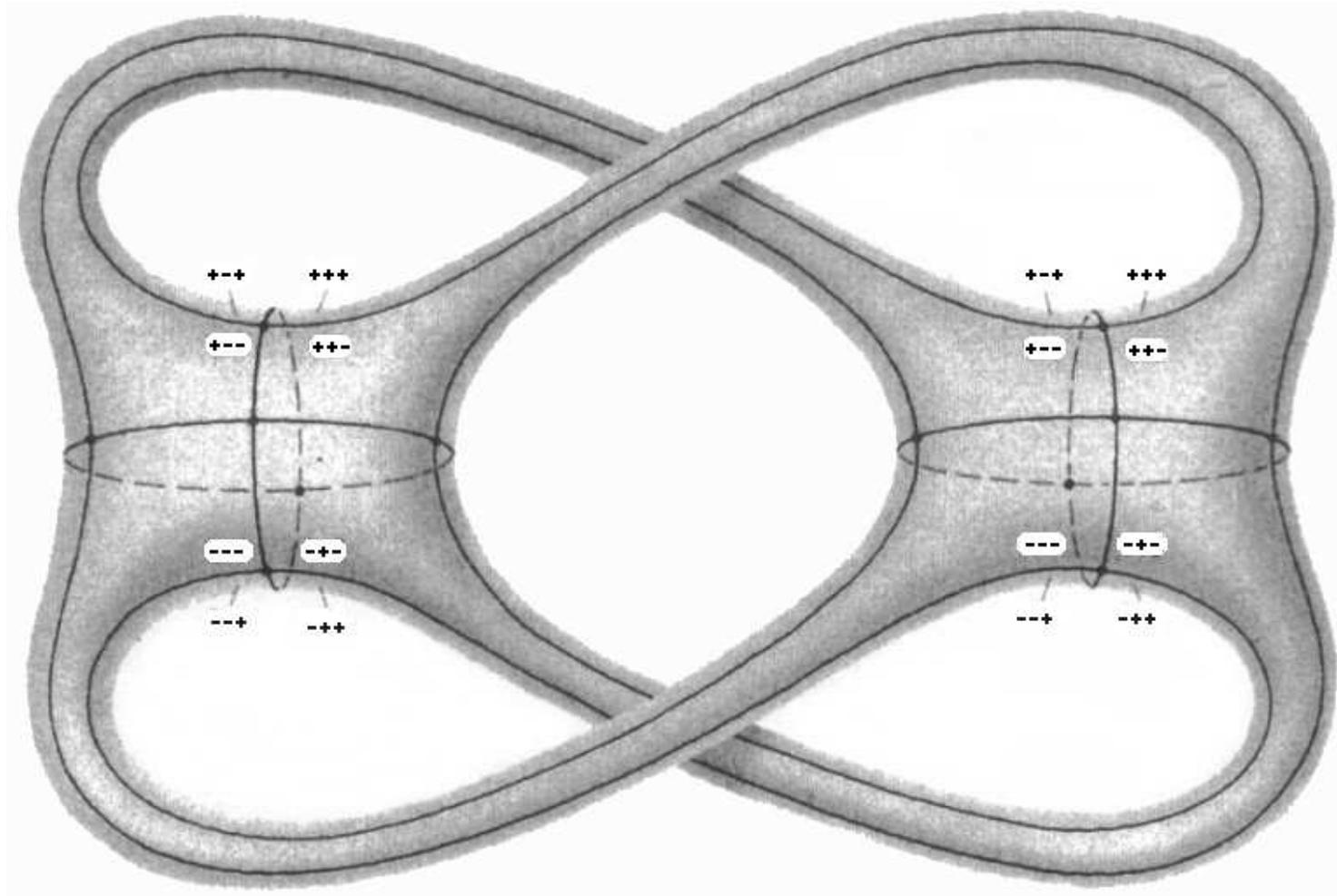


Abbildung 6: Hier sieht man eine Einbettung des Konfigurationsraums für Sechsecke in den \mathbb{R}^3 , die mit der kanonischen Polygonzerlegung kompatibel ist.

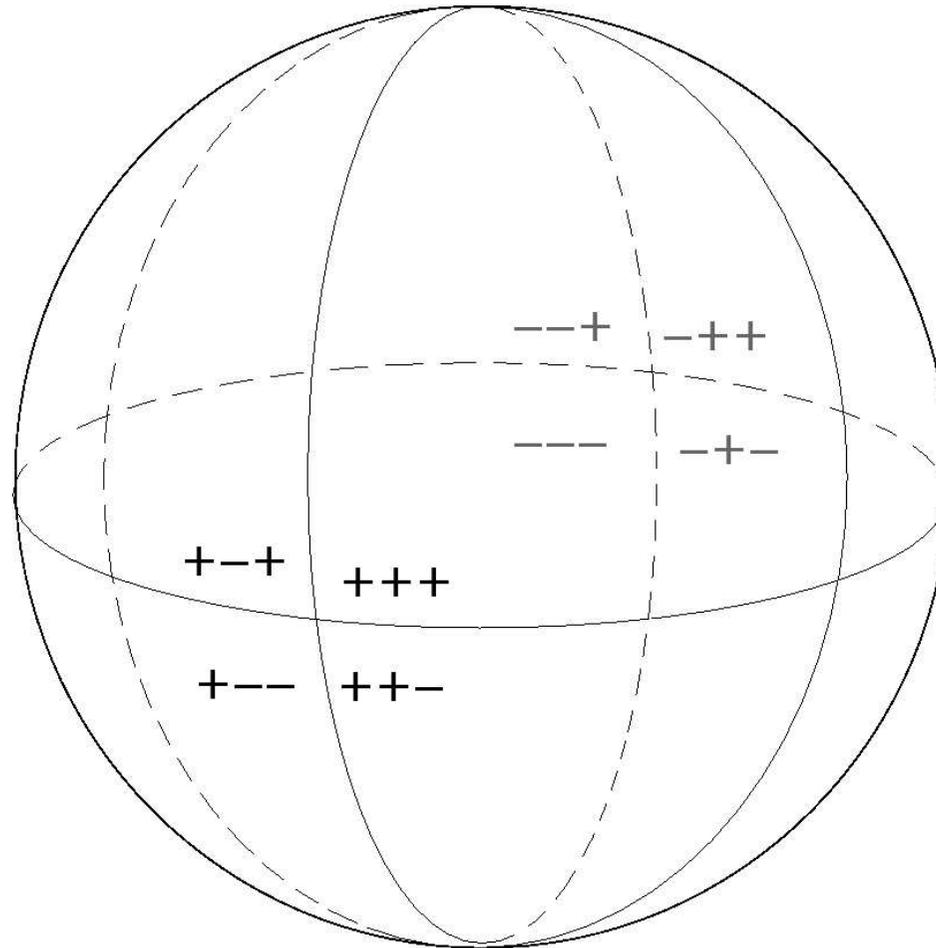


Abbildung 7: Hier ist die Sphäre aus Dreiecken zusammengesetzt. Durch die Beschriftung sieht man, welche Konfigurationsblätter an welche grenzen.

Frage: Wie sieht der Übergang von einer Fläche vom Geschlecht 3 zur Sphäre aus?

- Verschwinden der Henkel
- zwei verschiedene Übergangs-Typen (Abb. 5):
 - Übergang vom Sechseck zum konkaven Dreieck,
 - Übergang vom Sechseck zum konvexen Dreieck.
- Wie sieht der Konfigurationsraum in einem Grenzfall aus?
- Ist er überhaupt eine Fläche?
- Was passiert mit der Fläche vom Geschlecht 3 bei der Annäherung an einen Grenzfall?

Hypothese

- Der Übergang entspricht dem **Zusammenziehen von g geschlossenen längenminimierenden Kurven** auf jeweils einen Punkt und dem Verschwinden dieser.
- Für Konf.-raum: 3 mal Übergang vom 1-schaligen zum 2-schaligen Hyperboloid, dazwischen Doppelkegel

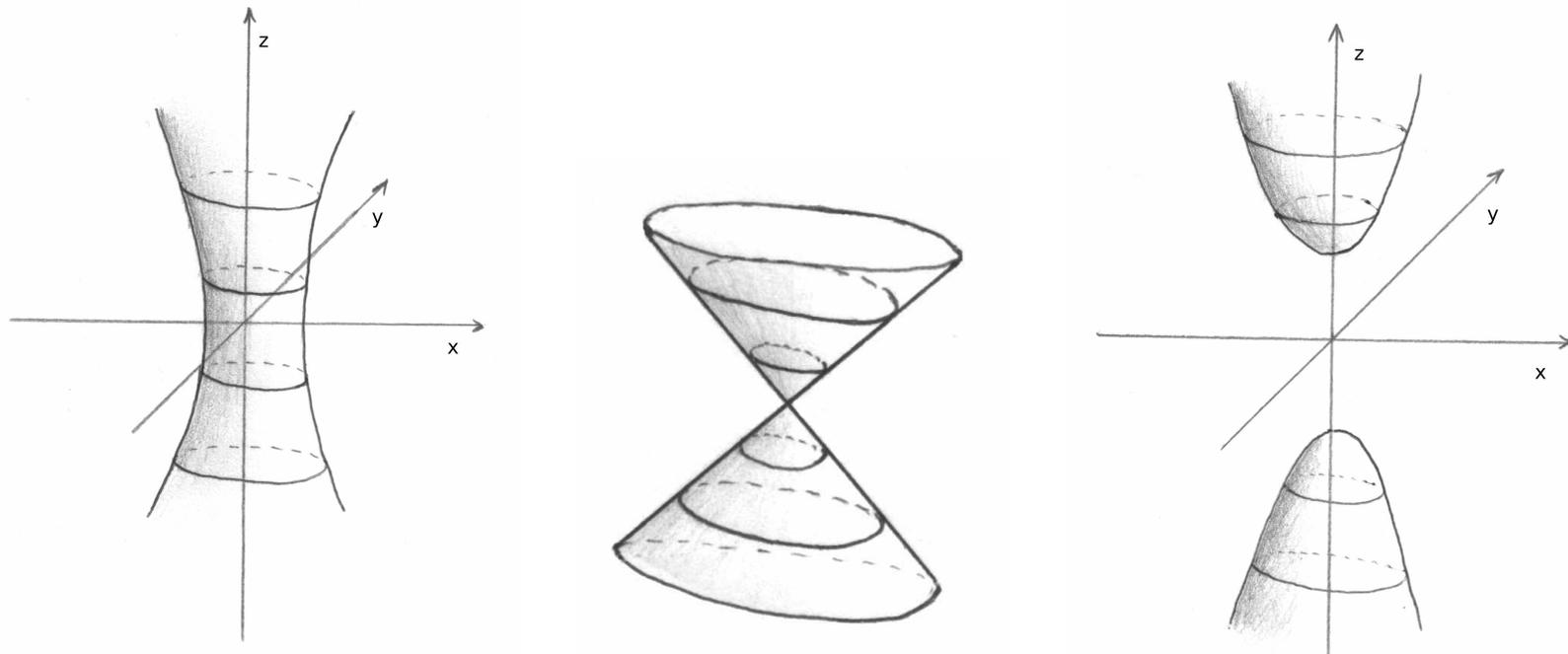


Abbildung 8: Das Verschwinden eines Henkels lokal als Übergang des 1-schaligen in den 2-schaligen Hyperboloid.

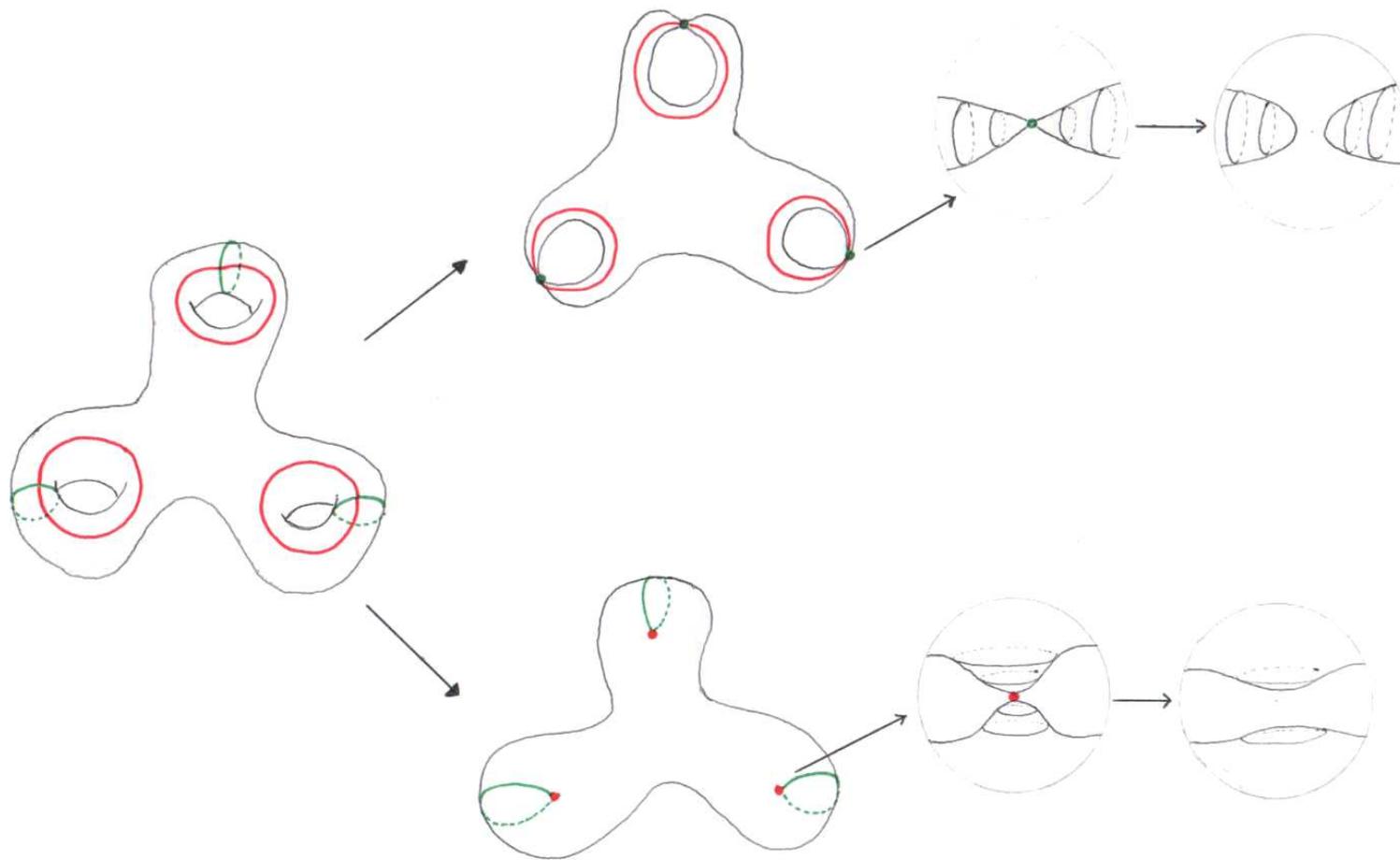


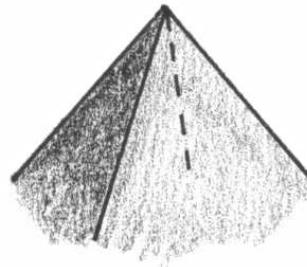
Abbildung 9: Hier zwei Möglichkeiten des Zusammenziehens von drei längenminimierenden Kurven.

- **Geodäte**: lokal kürzeste Verbindung zweier Punkte
- Wie sehen Geodäten auf dem Konfigurationsraum aus?

„**Billiardmetrik**“ :

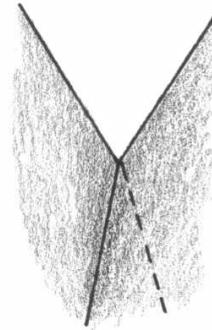
- Im **Inneren** der Konf.-blätter: euklidische Geometrie
⇒ (geschl.) Geodäten sind Geraden.
- An **Kanten**: Fortführung der Geodäten nach **Reflexionsgesetz**.
- Entlang Kanten:
 - **konvex**: keine Geodäte, da z.B. Sekante durch die Punkte kürzer

- **konkav**: Geodäte, da Sekante außerhalb des Konf.-raums wäre.
- In **Ecken**: im Allgemeinen keine Fortsetzungsregel, abhängig vom Innenwinkel
 - $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \text{Summe} < 360^\circ$: „ $K > 0$ “
→ Umgebung wie Pyramidenecke (4 Flächen)



- ⇒ keine Geodäten durch Ecken
- $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{Summe} = 360^\circ$: „ $K = 0$ “
→ ebene Umgebung
⇒ Geodäten = Geraden

- $\alpha > 90^\circ \Rightarrow \text{Summe} > 360^\circ: „K < 0”$
 - Umgebung wie triangulierte Sattelfläche
 - ⇒ viele Geodäten durch Ecken, keine Fortsetzungsregel.



- Gleichung für Innenwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{2(R^2 + r^2) - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)}$$

⇒ Für Übergang: längenminimierende geschl. Kurven

⇒ Suche unter geschlossenen Geodäten auf dem Konf.-raum.

Der Übergang Sechseck – konvexes Dreieck

- Geodäte, die entlang 4 konkaver Kanten verläuft
- 3 solche Geod. ziehen sich zu einem Punkt zusammen



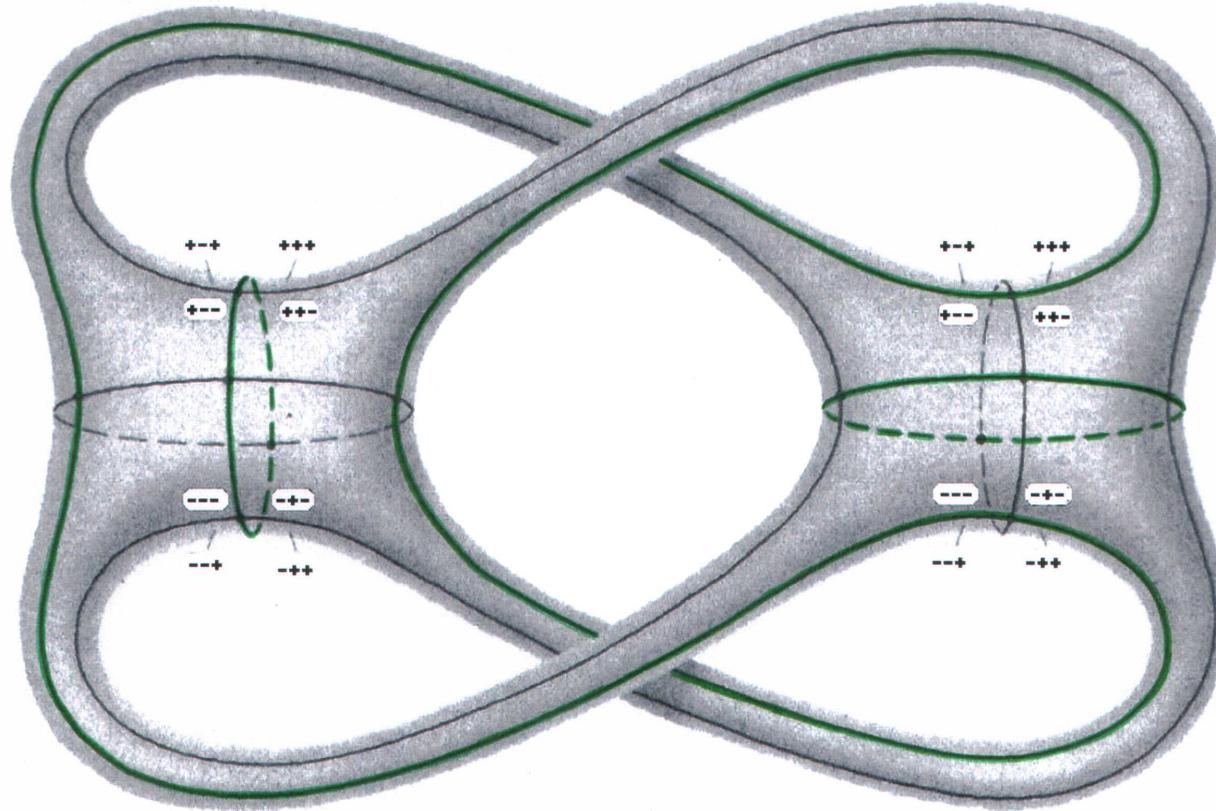


Abbildung 10: Hier sieht man die drei Geodäten, die sich beim Übergang zum konvexen Dreieck zusammenziehen.

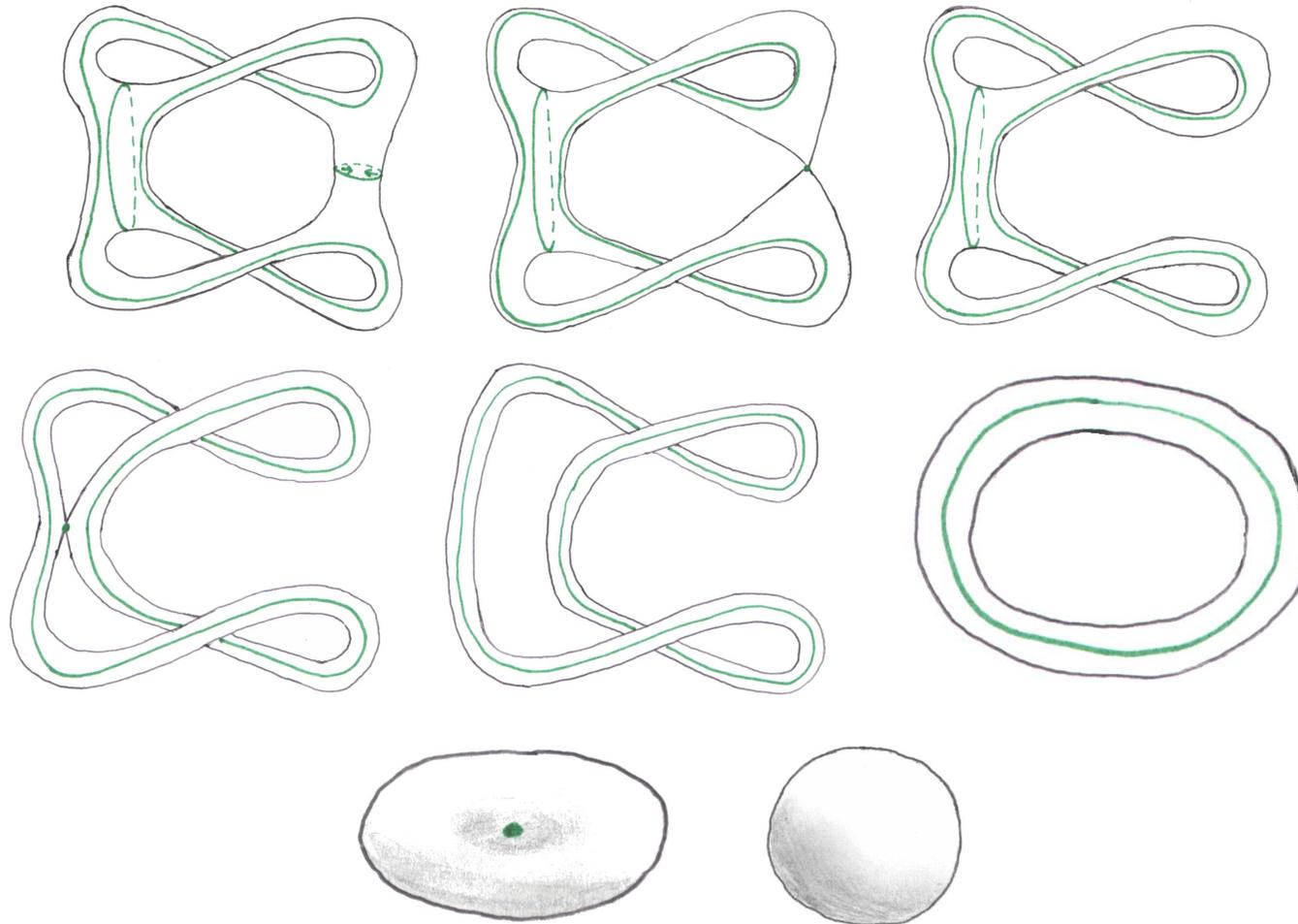
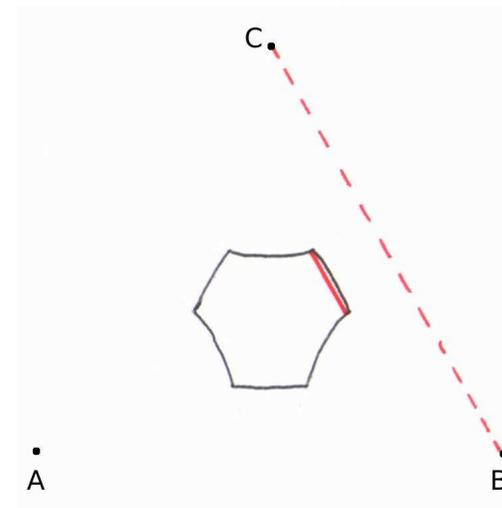
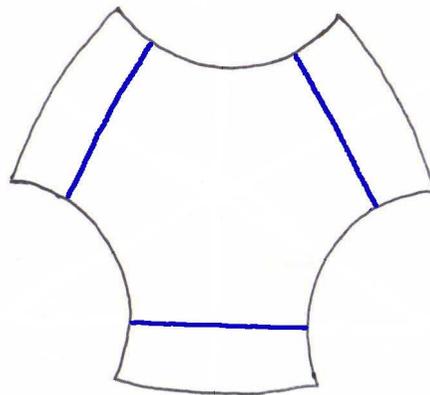


Abbildung 11: Hier ziehen sich die Geodäten nacheinander zusammen. Im wirklichen Übergang passiert es gleichzeitig.

Der Übergang Sechseck – konkaves Dreieck

- Geodäte, die 4 mal entlang der Verbindungslinie der Verankerungspunkte verläuft
- 3 solche Geod. ziehen sich zu einem Punkt zusammen
- Sonderfall: wenn Sechseck innerhalb des Dreiecks der Verankerungspunkte
→ Innenwinkel $> 90^\circ$ → Geodäte = Sekante durch zwei Ecken



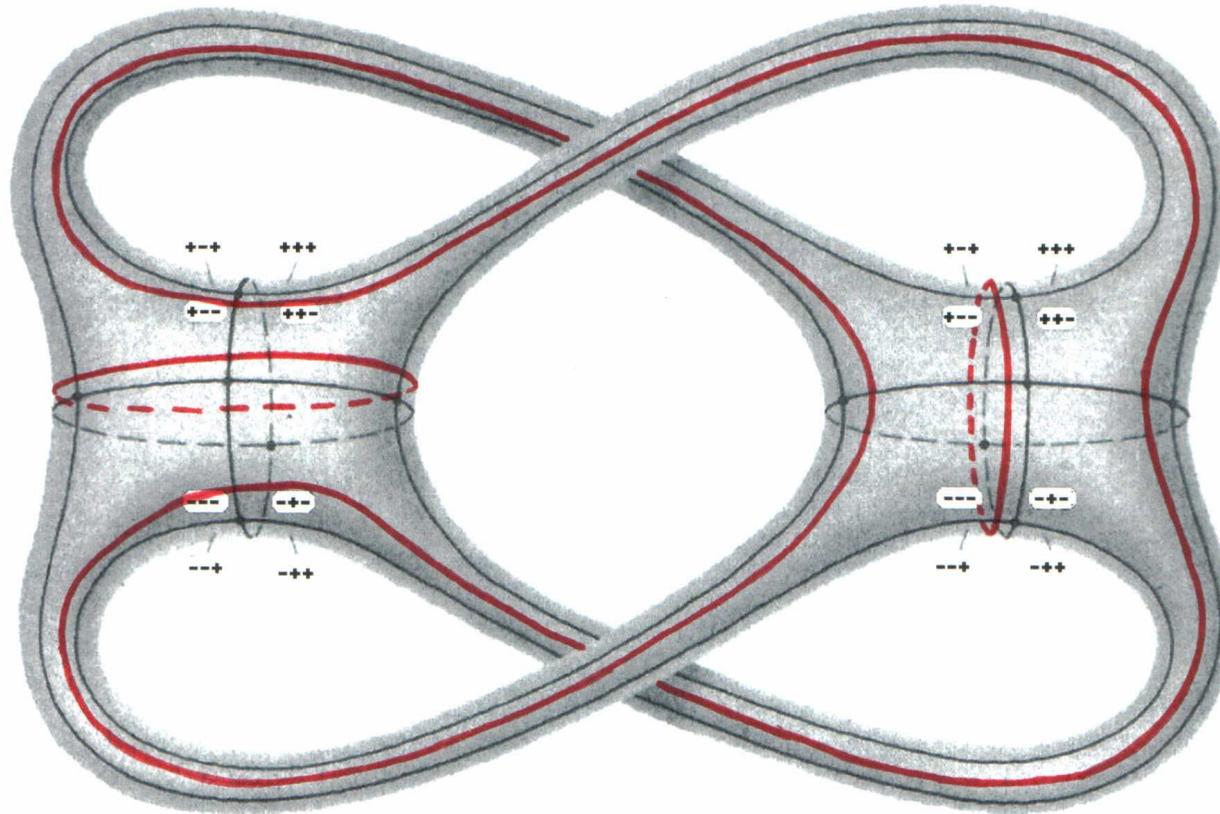
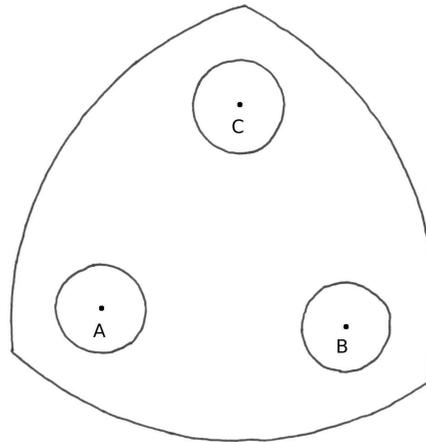


Abbildung 12: Hier sieht man die drei Geodäten, die sich beim Übergang zum konkaven Dreieck zusammenziehen.

- symmetrisch zu dem ersten Übergang

- weitere Konfiguration \rightarrow 2 weitere Übergänge



- auch Fälle mit $R < r$ betrachten