

Modellierung und Programmierung 1
Übungsserie 1

Lösungsvorschläge

1. Konvertierung

a) Natürliche Zahlen

Basis 2	Basis 10	Basis 16
101 0011 1001	1 337	539
1 1010 0001 1010	6 682	1A 1A
1101 1110 1100 0000 1101 1110 1101	233 573 869	D EC 0D ED

b) Rationale Zahlen

Basis 2	Basis 10	Basis 16
1 1111.111	31.875	1F.E
1 0111.0101	23.312 5	17.5
1111 0000.0000 1101	240.050 781 25	F0.0D

c) Vorzeichenbehaftete Zahlen

Zweierkomplement	Basis 10
1101 0001	-47
1001 0100	-108
0101 0110	86

d) i. Lösung der quadratischen Gleichung $4b^2 + 2b + 1 = 343$ (negatives b unzulässig): $b = 9$
ii.

$$x = (0.\overline{21})_3 = \frac{(21)_3}{(22)_3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3 + 2} = \frac{7}{8} = 0.875$$

oder

$$x = (0.\overline{21})_3 \rightarrow 3^2 \cdot (0.\overline{21})_3 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + (0.\overline{21})_3 \rightarrow 9 \cdot x = 7 + x \rightarrow x = \frac{7}{8} = 0.875$$

oder (\rightarrow Grenzwert geometrischer Reihen)

$$\begin{aligned} x = (0.\overline{21})_3 &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k-2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k} + \frac{1}{9} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k} \\ &= \frac{7}{9} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k \\ &= \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{7}{8} = 0.875 \end{aligned}$$

2. Maschinenzahlen

a) i. 2520.8125

Ganzzahliger Anteil:

2520	: 2 =	1260	Rest	0
1260	: 2 =	630	Rest	0
630	: 2 =	315	Rest	0
315	: 2 =	157	Rest	1
157	: 2 =	78	Rest	1
78	: 2 =	39	Rest	0
39	: 2 =	19	Rest	1
19	: 2 =	9	Rest	1
9	: 2 =	4	Rest	1
4	: 2 =	2	Rest	0
2	: 2 =	1	Rest	0
1	: 2 =	0	Rest	1

$$\rightarrow 2520 = (1001\ 1101\ 1000)_2$$

Gebrochener Anteil:

0.8125	· 2 =	1.625	→	1
0.625	· 2 =	1.25	→	1
0.25	· 2 =	0.5	→	0
0.5	· 2 =	1.0	→	1

$$\rightarrow 0.8125 = (0.1101)_2$$

$$\rightarrow 2520.8125 = (1001\ 1101\ 1000.1101)_2 = (1.0011\ 1011\ 0001\ 101)_2 \cdot 2^{11}$$

$$\rightarrow M' = 0011\ 1011\ 0001\ 101, E' = 11 + 127 = 138 = (1000\ 1010)_2, s = 0$$

0	1000 1010	0011 1011 0001 1010 0000 000
---	-----------	------------------------------

ii. -0.0625

Ganzzahliger Anteil: 0

Gebrochener Anteil:

0.0625	· 2 =	0.125	→	0
0.125	· 2 =	0.25	→	0
0.25	· 2 =	0.5	→	0
0.5	· 2 =	1.0	→	1

$$\rightarrow 0.0625 = (0.0001)_2 = (1.0)_2 \cdot 2^{-4}$$

$$\rightarrow M' = 0, E' = -4 + 127 = 123 = (111\ 1011)_2, s = 1$$

1	0111 1011	0000 0000 0000 0000 0000 000
---	-----------	------------------------------

b) Sei x denormalisiert, dann ist $x = (0.M')_2 \cdot 2^r$. Für $\frac{1}{x}$ gilt, wobei $r = -126$, $R = 127$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{(0.M')_2 \cdot 2^r} \\ &= \frac{1}{(0.M')_2 \cdot 2^{-126}} \\ &= \frac{2^{126}}{(0.M')_2} \end{aligned}$$

Keinen Überlauf erhält man, falls

$$\frac{1}{x} \leq (1.1 \cdots 1)_2 \cdot 2^R = MAX$$

$$\frac{1}{x} \leq (1.1 \cdots 1)_2 \cdot 2^{127}$$

$$\frac{2^{126}}{(0.M')_2} < 2 \cdot 2^{127} = 2^{128}$$

Folglich ist $\frac{1}{x}$ darstellbar, falls $(0.M')_2 > \frac{2^{126}}{2^{128}} = \frac{1}{4} = (0.01)_2$.

Damit sind 25% der Zahlen $\frac{1}{x}$ nicht darstellbar und es entsteht ein Überlauf.

3. Algorithmen und Programme

```
a) p = perfect(n)
    p = 0; // Ergebnis sonst
    s = 0; // Summe
    m = n / 2; // Abbruchbedingung
    m = m + 1;
    t = 1; // Teiler
    while( m > t) // Teilersuche
    {
        c = n % t;
        if( c == 0 ) s = s + t; // Summenbildung
        t = t + 1;
    }
    if( s == n ) p = 1; // Ergebnis perfekt
    if( s > n ) p = 2; // Ergebnis abundant
```

Protokoll für $n = 28$

n	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
s	0	1	3	3	7	7	7	14	14	14	14	14	14	14	28
m	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c	0	0	1	0	3	4	0	2	1	8	6	4	2	0	13
p	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Die Zahl 28 ist perfekt.

b) Gegenbeispiel:

Die Zahl $n = 945$ ist ungerade und abundant.

Sie hat als Teiler 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189, 315 mit der Summe 975.

4. JavaScript

a) siehe **HalloWeltAppletPlus.java**

b) siehe **HalloWeltAppletPlus.html**