

Inhalt

2	Zahlen und ihre Darstellung	2-2
2.1	<i>Additionssysteme</i>	2-2
2.2	<i>Positionssysteme</i>	2-2
2.3	<i>Dezimal- und Dualsystem</i>	2-3
2.3.1	Dezimalsystem	2-3
2.3.2	Dualsystem	2-4
2.4	<i>Weitere Beispiele für Positionssysteme</i>	2-6
2.5	<i>Zusammenfassung Zahlendarstellung</i>	2-7
2.6	<i>Zwei Anwendungsaufgaben</i>	2-8
2.7	<i>Rechnen in Positionssysteme</i>	2-9
2.7.1	Addition	2-9
2.7.2	Multiplikation	2-10
2.8	<i>Umkehroperationen im Dualsystem</i>	2-12
2.8.1	> - Relation	2-12
2.8.2	Subtraktion	2-12
2.8.3	Division	2-12
2.9	<i>Drei Anwendungsaufgaben</i>	2-13
2.10	<i>Zusammenfassung Rechnen mit Zahlen</i>	2-14
2.11	<i>Anhang A</i>	2-15
2.12	<i>Anhang B</i>	2-16

2 Zahlen und ihre Darstellung

Die in dem Abschnitt verwendeten Aufgaben sind z.T. aus dem Mathematikbuch der Klasse 5 für Gymnasien des Landes Sachsen vom Oldenburg Verlag.

2.1 Additionssysteme

Jedes Zeichen einer Zahlendarstellung hat genau einen Wert. Der Zahlenwert wird durch Addition bzw. Subtraktion dieser Werte ermittelt.

Einfachstes Beispiel

Grundzeichen	I
Werte	1

Zahlendarstellung

III	1+1+1+1	4	Addition der Zeichenwerte
------------	---------	----------	---------------------------

Römische Zahlendarstellung

Grundzeichen	I	X	C	M
Werte	1	10	100	1000
Hilfszeichen	V	L	D	
Werte	5	50	500	

Zahlendarstellung

VIII	1+1+1+5	8	Addition der Zeichenwerte
IX	10-1	9	Subtraktion nur für Grundzeichenwerte erlaubt
CML	50+1000-100	950	LM wäre falsch, da L Hilfszeichen

2.2 Positionssysteme

Der Zahlenwert ist abhängig von der Position der Ziffern in der Zahlendarstellung.

Ziffern

Endliche Menge von mindestens 2 Zeichen Z

Ziffer $z_i \in Z$ i.d.R. hindu-arabische Ziffern
 $0 \in Z$ ausgezeichnetes Element

Basis $b = \text{card}(Z) = |Z| = \# Z > 1$ Anzahl der Ziffern

Wert einer Ziffer $\omega_b(z_i)$ ω_b ist eine eindeutige Abbildung, welche jeder Ziffer eine Zahl zuordnet.

natürliche Zahlen

Zahlendarstellung $(z)_b = (z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b$, wobei $z_n \neq 0$

Zahlenwert $\omega_b(z) = \sum_{i=0}^n \omega_b(z_i) * b^i$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_b(z_n) * b^n + \omega_b(z_{n-1}) * b^{n-1} + \dots + \omega_b(z_1) * b + \omega_b(z_0) \\
 &= (\dots(\omega_b(z_n) * b + \omega_b(z_{n-1})) * b + \dots + \omega_b(z_1)) * b + \omega_b(z_0)
 \end{aligned}$$

rationale Zahlen

Zahlendarstellung $(z)_b = (z' \cdot z'')_b = (z')_b + (z'')_b$
 mit $(z')_b = (z_n z_{n-1} \dots z_0)_b$ und $(z'')_b = (z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_b$

Zahlenwert $\omega_b(z) = \omega_b(z') + \omega_b(z'') = \sum_{i=0}^n \omega_b(z_i) * b^i + \sum_{i=-m}^{-1} \omega_b(z_i) * b^i = \sum_{i=-m}^n \omega_b(z_i) * b^i$

mit
 $\omega_b(z') = (\dots(\omega_b(z_n) * b + \omega_b(z_{n-1})) * b + \dots + \omega_b(z_1)) * b + \omega_b(z_0)$ (s. o.)
 und

$$\begin{aligned}
 \omega_b(z'') &= \sum_{i=-m}^{-1} \omega_b(z_i) * b^i \\
 &= \omega_b(z_{-m}) / b^m + \omega_b(z_{-m+1}) / b^{m-1} + \dots + \omega_b(z_{-1}) / b \\
 &= (\dots(\omega_b(z_{-m}) / b + \omega_b(z_{-m+1})) / b + \dots + \omega_b(z_{-1})) / b
 \end{aligned}$$

2.3 Dezimal- und Dualsystem

2.3.1 Dezimalsystem

Zehnersystem, Dezimalsystem (lat.: decem = zehn), dekadisches Positionssystem

$Z = \{0,1,\dots,9\} \Rightarrow$ Basis $b = 10$

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_{10}(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

natürliche Zahlen

Beispiel $(137)_{10} = 1 * 10^2 + 3 * 10^1 + 7 * 10^0 = 100 + 30 + 7$

Stellenwerttafel

Zahlendarstellung	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zahlenwert
$b = 10$	10^3	10^2	10^1	10^0	
$(137)_{10}$	0	1	3	7	100+30+7

rationale Zahlen

Beispiel $(3.15625)_{10} = 3 + 0.15625$
 $= 3 * 10^0 + 1 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2} + 6 * 10^{-3} + 2 * 10^{-4} + 5 * 10^{-5}$
 $= 3 + 1/10 + 5/100 + 6/1000 + 2/10\ 000 + 5/100\ 000$

Stellenwerttafel

Zahlendarstellung	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	Zehntausendstel	Hunderttausendstel
$b = 10$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$(0.15625)_{10}$	1	5	6	2	5

Vereinbarung

Im Zehnersystem werden die Zahlen ungeklammert dargestellt, d.h. $z = (z)_{10}$.

2.3.2 Dualsystem

Zweiersystem, Dualsystem (lat.: duo = zwei)

$Z = \{0,1\} (= \{O,L\}) \Rightarrow$ Basis $b = 2$

z_i	0	1
$\omega_2(z_i)$	0	1



Computer rechnen im Zweiersystem

natürliche Zahlen

Zweierpotenzen 1 2 4 8 16 32 64 128 256 ...

Beispiel 137 = (1000 1001)₂

Umrechnung

10 → 2

$137 = 128 + 8 + 1 = 1 * 2^7 + 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = (1000 1001)_2$ oder

137 :	2 =	68	Rest	1	↑
68 :	2 =	34	Rest	0	
34 :	2 =	17	Rest	0	
17 :	2 =	8	Rest	1	
8 :	2 =	4	Rest	0	
4 :	2 =	2	Rest	0	
2 :	2 =	1	Rest	0	
1 :	2 =	<u>0</u>	Rest	1	

2 → 10

$(1000 1001)_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = 128 + 8 + 1 = 137$ oder

$(1000 1001)_2 = ((((((1 * 2 + 0) * 2 + 0) * 2 + 0) * 2 + 1) * 2 + 0) * 2 + 0) * 2 + 1) = 137$

rationale Zahlen

Umrechnung

$z = (z'.z'')_{10} = (z')_{10} + (0.z'')_{10} = (z_n z_{n-1} \dots z_0)_2 + (0.z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_2 = (z_n z_{n-1} \dots z_0 z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_2$

10 → 2

$3.15625 = 3 + 0.15625 = (11)_2 + (0.00101)_2 = (11.00101)_2$

Berechnung der Dualdarstellung der Zahl 0.15625:

0.15625 = 0.125 + 0.03125 = 1/8 + 1/32 = (0.00101)₂ oder

0.15625	* 2 =	0.3125	↓
0.3125	* 2 =	0.625	
0.625	* 2 =	1.25	
0.25	* 2 =	0.5	
0.5	* 2 =	<u>1.0</u>	

2 → 10

$$(11.00101)_2 = (11)_2 + (0.00101)_2 = 3 + 0.15625 = \mathbf{3.15625}$$

Berechnung der Dezimaldarstellung der Zahl $(0.00101)_2$:

$$(0.00101)_2 = \mathbf{1} * 2^{-3} + \mathbf{1} * 2^{-5} = 1/8 + 1/32 = 0.125 + 0.03125 = 0.15625 \quad \text{oder}$$

$$(0.00101)_2 = (((\mathbf{1} / 2 + \mathbf{0}) / 2 + \mathbf{1}) / 2 + \mathbf{0}) / 2 + \mathbf{0}) / 2 = 0.15625$$

Ein weiteres Beispiel

$$0.1 = (0.00011)_2$$

	0.1	* 2 =	↓	0.2
}	0.2	* 2 =		0.4
	0.4	* 2 =		0.8
	0.8	* 2 =		1.6
	0.6	* 2 =		1.2
	0.2	* 2 =		0.4
			...	

Satz

Sei $z = 0.z_{-1}z_{-2}\dots z_{-m}$ ein endlicher Dezimalbruch. z lässt sich als endlicher Dualbruch darstellen, genau dann wenn $5^m | Z$ mit $Z = \sum_{i=-m}^{-1} \omega(z_i) * 10^{m+i} \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis

(*) $(z)_2$ ist endlicher Dualbruch gdw. $\exists k(2^k * z \in \mathbb{N})$.

(**) $Z = \sum_{i=-m}^{-1} \omega_{10}(z_i) * 10^{m+i} = 10^m * \sum_{i=-m}^{-1} \omega_{10}(z_i) * 10^i = 10^m * z \in \mathbb{N}$.

(\Leftarrow) $5^m | Z \Rightarrow \frac{Z}{5^m} \in \mathbb{N}$, (**) $\Rightarrow \frac{Z}{5^m} = \frac{10^m * z}{5^m} = 2^m * z \in \mathbb{N}$, (*) $\Rightarrow z$ ist als endlicher Dualbruch darstellbar.

(\Rightarrow) (*) $\Rightarrow \exists k(2^k * z \in \mathbb{N})$, setze $Z' = 2^k * z \in \mathbb{N}$, (**) $\Rightarrow Z' = \frac{2^k * Z}{10^m} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$Z = 5^m * 2^{m-k} * Z' \in \mathbb{N}$

1. Fall: $m \geq k \Rightarrow 2^{m-k} * Z' \in \mathbb{N} \Rightarrow 5^m | Z$.

2. Fall: $m < k \Rightarrow$ Sei $k = m + l$, so $l > 0$ und $Z = 5^m * 2^{-l} * Z' \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^l * Z = 5^m * Z' \in \mathbb{N} \Rightarrow 5^m | Z$, wegen Teilerfremdheit von 2 und 5.

Beispiele

$z = .15625 \Rightarrow m = 5, 5^5 = 3125, Z = z * 10^5 = 15625 \Rightarrow 3125 | 15625$ und $(z)_2 = (.00101)_2$.

$z = .1 \Rightarrow m = 1, 5^1 = 5, Z = z * 10^1 = 1 \Rightarrow 5 \nmid 1$ und $(z)_2 = (0.00011)_2$

$z = .1875 \Rightarrow m = 4, 5^4 = 625, Z = z * 10^4 = 1875 \Rightarrow 625 | 1875$ und $(z)_2 = (.0011)_2$.

$z = .3 \Rightarrow m = 1, 5^1 = 5, Z = z * 10^1 = 3 \Rightarrow 5 \nmid 3$ und $(z)_2 = (01001)_2$

2.4 Weitere Beispiele für Positionssysteme

Zwölfersystem, Duodezimalsystem (lat.: duodecim = zwölf)

$$Z = \{0,1,\dots,9,A,B\} \Rightarrow \text{Basis } b = 12$$

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
$\omega_{12}(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Beispiel $137 = (B5)_{12}$

Umrechnung

12 → 10

$$(B5)_{12} = 11 * 12 + 5 * 12 = 132 + 5 = 137$$

10 → 12

$$137 = 132 + 5 = 11 * 12 + 5 = (B5)_{12}$$

oder

$$\begin{array}{r} 137 : 12 = 11 \quad \text{Rest } 5 \\ 11 : 12 = \underline{0} \quad \text{Rest } 11 \end{array} \uparrow \Rightarrow 137 = (B5)_{12}$$

Sechzehnersystem, Hexadezimalsystem

$$Z = \{0,1,\dots,9,A,B,C,D,E,F\} \Rightarrow \text{Basis } b = 16$$

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\omega_{16}(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Beispiel $137 = (89)_{16}$



Sandmännchen hat nur acht Finger.
Wie rechnet es?

Achtersystem, Oktalsystem (lat.: octo = acht)

$$Z = \{0,1,\dots,7\} \Rightarrow \text{Basis } b = 8$$

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\omega_8(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7

Beispiel $137 = (211)_8$

Umrechnung zwischen nichtdezimalen Positionssystemen

$$b \leftrightarrow b': \quad b \leftrightarrow 10 \leftrightarrow b'$$

Beispiel $(211)_8 = (?)_{12}$:

$$(211)_8 = 137 = (B5)_{12}$$

Zusammenhang zwischen Dual-, Oktal und Hexadezimalzahlen

In der Informatik spielt das Dualsystem aus physikalischen Gründen eine große Rolle. Da das Dualsystem sehr lange Zahlen erzeugt, verwendet man statt diesem oft Darstellungen im Oktal- oder Hexadezimalsystem.

Die Basen dieser Systeme sind Zweierpotenzen mit dem Exponent 1, 3 bzw. 4. Das erleichtert die Umrechnung wesentlich, da man nicht über das Dezimalsystem gehen muss.

8 ↔ 2 ↔ 16

Unterteilt man eine Dualzahldarstellung in Gruppen von drei (vier) Ziffern und wandelt diese in Oktalziffern (Hexadezimalziffern) um, so erhält man die äquivalente Darstellung der Zahl im Oktalsystem (Hexadezimalsystem).

Beispiel: $(572)_8 = (1\ 0111\ 1010)_2 = (17A)_{16}$

dual	2^1	:	(1	0	1	1	1	1	0	1	0)	$_2$	
oktal	2^3	:	(5			7			2)	$_8$	=	$(572)_8$
hexadezimal	2^4	:	(1				7			A)	$_{16}$	=	$(17A)_{16}$

Kontrolle durch Umrechnung ins Dezimalsystem (378).

Beweisskizze für $2 \rightarrow 8$:

Ausgehend von der Dualdarstellung sei $(z)_2 = (z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0)_2$.

$$\omega_2(z) = \sum_{i=0}^n \omega_2(z_i) * 2^i = \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_2(z_8) * 2^8 + \omega_2(z_7) * 2^7 + \omega_2(z_6) * 2^6] + [\omega_2(z_5) * 2^5 + \omega_2(z_4) * 2^4 + \omega_2(z_3) * 2^3] + [\omega_2(z_2) * 2^2 + \omega_2(z_1) * 2^1 + \omega_2(z_0) * 2^0]$$

Bilde, von rechts beginnend, Dreiergruppen und klammere dabei die höchstmögliche Zweierpotenz aus:

$$= \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_2(z_8) * 2^2 + \omega_2(z_7) * 2^1 + \omega_2(z_6) * 2^0] * 2^6 + [\omega_2(z_5) * 2^2 + \omega_2(z_4) * 2^1 + \omega_2(z_3) * 2^0] * 2^3 + [\omega_2(z_2) * 2^2 + \omega_2(z_1) * 2^1 + \omega_2(z_0) * 2^0]$$

Fasse die drei Dualziffern als eine Oktalziffer zusammen:

$$= \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_8(z'_2) * (2^3)^2 + \omega_8(z'_1) * (2^3)^1 + \omega_8(z'_0) * (2^3)^0] = \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_8(z'_2) * 8^2 + \omega_8(z'_1) * 8^1 + \omega_8(z'_0) * 8^0] = \sum_{i=0}^m \omega_8(z'_i) * 8^i$$

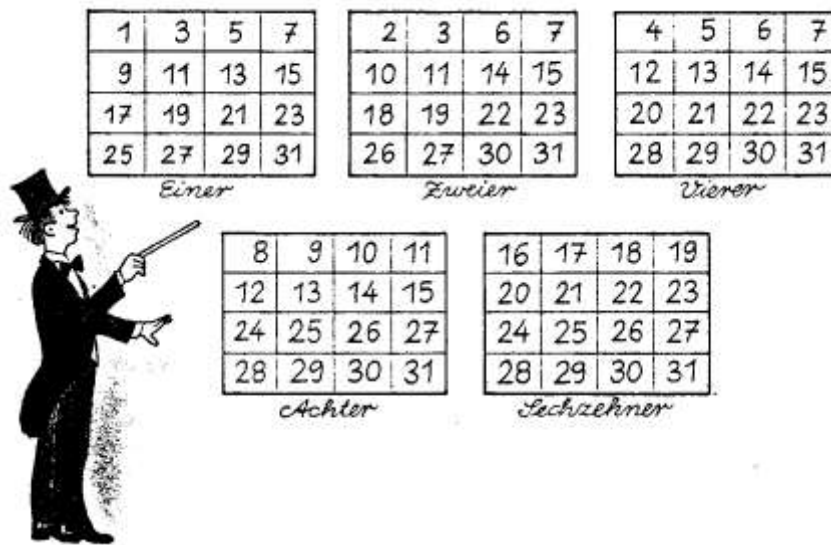
Wie man leicht sieht, ergibt sich somit für die Oktaldarstellung $(z)_8 = (z'_m z'_{m-1} \dots z'_1 z'_0)_8$.

2.5 Zusammenfassung Zahlendarstellung

- **Ein und dieselbe Zahl lässt sich unterschiedlich darstellen:**
 $137 = (211)_8 = (1000\ 1001)_2 = (B5)_{12} = (89)_{16} = CXXXVII$.
- **Zu jeder natürlichen Basis $b > 1$ kann man ein Positionssystem zur Zahlendarstellung festlegen.**
- **Die Darstellung einer Zahl in einem Positionssystem ist stets eindeutig.**
- **Je kleiner die Basis b , desto länger ist die Zahlendarstellung einer natürlichen Zahl.**

2.6 Zwei Anwendungsaufgaben

1. Uwe führt einen Zaubertrick vor. Er fordert einen Mitschüler auf, sich eine natürliche Zahl von 1 bis 31 zu merken. Dann zeigt er ihm fünf Karten mit Zahlen und fragt, auf welche Karten die gemerkte Zahl steht. Daraus ermittelt er diese Zahl. Wie berechnet Uwe die Zahl?



2. Aufgabe aus einem alten Rechenbuch

Vorteilhafte Einrichtung der Gewichte.

Wie schwer muß jedes von sieben Gewichten sein, deren Gesamtgewicht 127 Pfund ist, um mit denselben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc. Pfund bis 127 Pfund abwägen zu können?

2.7 Rechnen in Positionssysteme

2.7.1 Addition

Dezimalsystem

Additionstafel (symmetrisch)

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			4	5	6	7	8	9	10	11
3				6	7	8	9	10	11	12
4					8	9	10	11	12	13
5						10	11	12	13	14
6							12	13	14	15
7								14	15	16
8									16	17
9										18

$$\begin{array}{r}
 123 \\
 + 1987 \\
 \hline
 \text{Ü } 1110 \\
 \hline
 \underline{\underline{2110}}
 \end{array}$$

Ü ... Übertrag

Additionstafel + Additionsalgorithmus \Rightarrow Addition

Oktalsystem

Additionstafel

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1		2	3	4	5	6	7	10
2			4	5	6	7	10	11
3				6	7	10	11	12
4					10	11	12	13
5						12	13	14
6							14	15
7								16

$$\begin{array}{r}
 (17)_8 \\
 + (11)_8 \\
 \hline
 \text{Ü } 10 \\
 \hline
 \underline{\underline{(30)_8}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Probe: } 15 \\
 + 9 \\
 \hline
 10 \\
 \hline
 \underline{\underline{24}}
 \end{array}$$

Dualsystem

Additionstafel

$$\begin{array}{r}
 (110)_2 \\
 + (11)_2 \\
 \hline
 \text{Ü } 100 \\
 \hline
 \underline{\underline{(1001)_2}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Probe: } 6 \\
 + 3 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \underline{\underline{9}}
 \end{array}$$

+	0	1
0	0	1
1		10

Hexadezimalsystem

Additionstafel

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1		2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2			4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3				6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4					8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5						A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6							C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7								E	F	10	11	12	13	14	15	16
8									10	11	12	13	14	15	16	17
9										12	13	14	15	16	17	18
A											14	15	16	17	18	19
B												16	17	18	19	1A
C													18	19	1A	1B
D														1A	1B	1C
E															1C	1D
F																1E

$$\begin{array}{r}
 (ABCD)_{16} \\
 + (953)_{16} \\
 \hline
 \text{Ü } \underline{1110} \\
 (B520)_{16}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{Probe: } 43\,981 \\
 + 2\,387 \\
 \hline
 \underline{01\,100} \\
 46\,368
 \end{array}$$

Zusammenfassung Addition

- Für die Addition benötigt man eine vom Positionssystem **abhängige** Additionstafel und einen vom Positionssystem **unabhängigen** Additionsalgorithmus.
 ⇒ Nur die Additionstafel muss für jedes Positionssystem abgeändert werden, der Additionsalgorithmus bleibt unverändert.

2.7.2 Multiplikation

Dezimalsystem

Multiplikationstafel (symmetrisch)

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	0	1								
2	0	2	4							
3	0	3	6	9						
4	0	4	8	12	16					
5	0	5	10	15	20	25				
6	0	6	12	18	24	30	36			
7	0	7	14	21	28	35	42	49		
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$\begin{array}{r}
 \underline{123 * 32} \\
 \quad 6 \\
 \quad 40 \\
 \quad 200 \\
 \quad \quad 90 \\
 \quad \quad 600 \\
 \quad \quad 3000 \\
 \hline
 \underline{\underline{3936}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 6 \\ 40 \\ 200 \end{array} \right\} 123 * 2 \quad 246 \\
 \left. \begin{array}{l} 90 \\ 600 \\ 3000 \end{array} \right\} 123 * 30 \quad 3690 \\
 \hline
 \underline{\underline{3936}}
 \end{array}$$

Multiplikationstafel + Multiplikationsalgorithmus \Rightarrow Multiplikation
Die Multiplikation wird auf die Addition zurückgeführt.

Dualsystem

$$\begin{array}{r}
 \underline{(1011)_2 * (10)_2} \\
 \quad 1011 \\
 \quad \quad 0 \\
 \hline
 \underline{\underline{(10110)_2}}
 \end{array}$$

Probe: $11 * 2 = 22$

Multiplikationstafel

*	0	1
0	0	
1	0	1

Hexadezimalsystem

Multiplikationstafel

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0															
1	0	1														
2	0	2	4													
3	0	3	6	9												
4	0	4	8	C	10											
5	0	5	A	F	14	19										
6	0	6	C	12	18	1E	24									
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31								
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40							
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51						
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64					
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79				
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90			
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9		
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	
F	0	F	1E	2D	3C	4B	4A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

$$\begin{array}{r}
 \underline{(123)_{16} * (2A)_{16}} \\
 \quad 246 \\
 \quad \quad B5E \\
 \hline
 \underline{\underline{(2FBE)_{16}}}
 \end{array}$$

Probe: $291 * 42 = 12\,222$

Zusammenfassung Multiplikation

- Für die Multiplikation benötigt man eine vom Positionssystem *abhängige* Multiplikationstafel (Einmaleins) und einen vom Positionssystem *unabhängigen* Multiplikationsalgorithmus.
 - \Rightarrow Nur die Multiplikationstafel muss für jedes Positionssystem abgeändert werden, der Multiplikationsalgorithmus bleibt unverändert.
- Die Multiplikation wird auf die Addition zurückgeführt.

2.8 Umkehroperationen im Dualsystem

2.8.1 > - Relation

Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die Subtraktion $x - y$ nur für $x \geq y$ ausführbar.

In jedem Positionssystem gilt für $(x)_b = (x_m x_{m-1} \dots x_0)_b$ und $(y)_b = (y_n y_{n-1} \dots y_0)_b$:

- $x > y \iff$ (1) $m > n$ oder
(2) $m = n$ und
es gibt ein i mit $x_i > y_i$ und für alle $j > i$ gilt $x_j = y_j$.

$(2B9F)_{16} > (2C0)_{16}$, wegen (1)
 $(11\ 1110)_2 > (11\ 1101)_2$, wegen (2) mit $i = 1$

2.8.2 Subtraktion

1. Möglichkeit (durch den üblichen Subtraktionsalgorithmus)

$$\begin{array}{r} (11\ 1001)_2 \\ - (1011)_2 \\ \hline \ddot{U} \quad 1\ 1100 \\ \underline{(10\ 1110)_2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Probe: } 57 \\ - 11 \\ \hline 46 \end{array}$$

3. Möglichkeit (durch Komplementbildung und Addition)

Komplementbildung: $\bar{z} = z \underset{1}{/} \underset{0}{/} \underset{0}{/} \underset{1}{/} + 1$ $1011 \underset{1}{/} \underset{0}{/} \underset{0}{/} \underset{1}{/} + 1 = 0100 + 1 = 0101$
 $\bar{\bar{z}} = z$ $\overline{1011} = 0101 = 1010 + 1 = 1011$

Die Komplementbildung (auch: **Zweierkomplement**) wird auf den Subtrahenden angewendet, wobei dieser durch Anfügen führender Nullen zunächst mindestens auf die gleiche Länge des Minuenden gesetzt wird.

Berechne $(11\ 1001)_2 - (1011)_2$:

1. Ergänze den Subtrahenden durch führende Nullen auf die Länge des Minuenden: $1011 \Rightarrow 00\ 1011$
2. Komplementbildung des Subtrahend: $001011 \underset{1}{/} \underset{0}{/} \underset{0}{/} \underset{1}{/} + 1 = 110100 + 1 = 110101$
3. Addition des Minuend mit dem Komplement:

$$\begin{array}{r} 11\ 1001 \\ + 11\ 0101 \\ \hline \ddot{U} \quad 110\ 0010 \\ \underline{110\ 1110} \end{array}$$
4. Die erste Eins und führende Nullen im Ergebnis wird weggestrichen: $(11\ 1001)_2 - (1011)_2 = \underline{(10\ 1110)}_2$

2.8.3 Division

$$(1\ 0101)_2 / (11)_2 = (111)_2 \qquad (21 / 3) = 7$$

ohne Komplement

$$(1\ 0101)_2 / (11)_2 = (111)_2$$

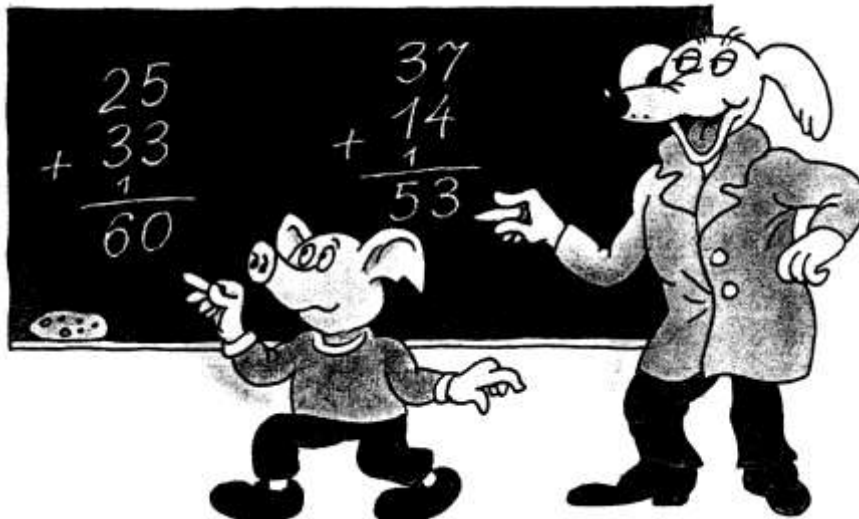
$$\begin{array}{r} -11 \\ 100 \\ -11 \\ \hline 011 \\ -11 \\ \hline 0 \end{array}$$

mit Komplement

1. Divisor wird um eine führende 0 ergänzt: 011
2. Komplementbildung: $\overline{011} = 100 + 1 = 101$
3. Ersetzen der Subtraktion durch Addition

$$(1\ 0101)_2 / (11)_2 = (111)_2$$

$$\begin{array}{r} +101 \\ \neq 0100 \\ +101 \\ \neq 0011 \\ +101 \\ \neq 000 \end{array}$$

2.9 Drei Anwendungsaufgaben**1. Puppenrechnung, übertrage die Aufgaben in das Dezimalsystem!****2. Aufgabe aus einem alten Rechenbuch**

Eine Näherin fertigt aus 48 m Hemdentuch 2 Dutzend Hemden.

- a) **Wieviel Meter Stoff waren zu einem Hemd nötig?**
- b) **Wieviel Mark kostet 1 Dutzend Hemden, wenn 1m Stoff 1,10 M kostet und für Zutaten und Arbeitslohn pro Hemd 1,30 M gerechnet werden?**

3. Aufgabe aus einem alten Rechenbuch

Der Obsthändler.

Ein Obsthändler fuhr mit 16 Schock und einem Apfel auf den Markt; er verkaufte sie aber nicht alle, sondern behielt noch eine gewisse Anzahl übrig; multipliziert er diesen Rest Apfel mit sich selbst, so gab das Product die Zahl seiner Apfel an, die er auf den Markt fuhr. Wieviel Apfel hatte der Obsthändler verkauft, wieviel hatte er noch übrig? (à 1 Schock = 60 Stück)

2.10 Zusammenfassung Rechnen mit Zahlen

- **In allen Positionssystemen gelten dieselben Rechengesetze.**
- **Das Ergebnis einer Aufgabe ist unabhängig vom Positionssystem, in dem gerechnet wurde. Es wird immer dieselbe Zahl in unterschiedlicher Darstellung geliefert.**
- **Alle Operationen werden auf die Addition zurückgeführt.**

⇒ Der Computer braucht nur addieren zu können!

2.11 Anhang A

Additions- und Multiplikationstafel des Hexadezimalsystems

* \ +	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0 \ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	0	1 \ 2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	0	2	4 \ 4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	0	3	6	9 \ 6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	0	4	8	C	10 \ 8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	0	5	A	F	14	19 \ A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	0	6	C	12	18	1E	24 \ C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31 \ E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40 \ 10	11	12	13	14	15	16	17
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51 \ 12	13	14	15	16	17	18
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64 \ 14	15	16	17	18	19
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79 \ 16	17	18	19	1A
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90 \ 18	19	1A	1B
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9 \ 1A	1B	1C
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4 \ 1C	1D
F	0	F	1E	2D	3C	4B	4A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1 \ 1E

2.12 Anhang B

Additions- und Multiplikationstafel des Oktalsystems

*\+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0 \ 0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1 \ 2	3	4	5	6	7	10
2	0	2	4 \ 4	5	6	7	10	11
3	0	3	6	11 \ 6	7	10	11	12
4	0	4	10	14	20 \ 10	11	12	13
5	0	5	12	17	24	31 \ 12	13	14
6	0	6	14	22	30	36	44 \ 14	15
7	0	7	16	25	34	43	52	61 \ 16