# Kompositionen von Baumreihen-Transformationen

Andreas Maletti[1]

Lehrstuhl: "Grundlagen der Programmierung"
Institut für Theoretische Informatik
Technische Universität Dresden

4. November 2005

[1] Finanziell unterstützt durch die "Deutsche Forschungsgemeinschaft" (DFG, GK 334)

# Grundlegende Begriffe

## Begriffe

- Baumreihe: Abbildung Baum $\mapsto$ Gewicht
- Baumreihen-Transformation: Abbildung Baumreihe $\mapsto$ Baumreihe

## Beispiel

- $t_1 \mapsto 1$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Menge $\{t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto 2$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Multi-Menge $\{t_1, t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto a$, $t_2 \mapsto b$, $\ldots$
- $(n\ t) \mapsto (n+1)\ \gamma(t)$

## wobei

1. $t_1 = \sigma(\alpha, \alpha)$ und $t_2 = \gamma(\beta)$ ($\sigma$ zweistellig, $\gamma$ einstellig, $\alpha$, $\beta$ nullstellig)
2. Gewichte: $\{0, 1\}$ ($0$: kein Element; $1$: Element)

# Grundlegende Begriffe

## Begriffe

- Baumreihe: Abbildung Baum $\mapsto$ Gewicht
- Baumreihen-Transformation: Abbildung Baumreihe $\mapsto$ Baumreihe

## Beispiel

- $t_1 \mapsto 1$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Menge $\{t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto 2$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Multi-Menge $\{t_1, t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto a$, $t_2 \mapsto b$, $\ldots$
- $(n\, t) \mapsto (n+1)\, \gamma(t)$

## wobei

1. $t_1 = \sigma(\alpha, \alpha)$ und $t_2 = \gamma(\beta)$ ($\sigma$ zweistellig, $\gamma$ einstellig, $\alpha$, $\beta$ nullstellig)
2. Gewichte: $\mathbb{N}$ (Anzahl der Vorkommen)

# Grundlegende Begriffe

## Begriffe

- Baumreihe: Abbildung Baum $\mapsto$ Gewicht
- Baumreihen-Transformation: Abbildung Baumreihe $\mapsto$ Baumreihe

## Beispiel

- $t_1 \mapsto 1$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Menge $\{t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto 2$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Multi-Menge $\{t_1, t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto a, t_2 \mapsto b, \ldots$
- $(n\ t) \mapsto (n+1)\ \gamma(t)$

## wobei

1. $t_1 = \sigma(\alpha, \alpha)$ und $t_2 = \gamma(\beta)$ ($\sigma$ zweistellig, $\gamma$ einstellig, $\alpha$, $\beta$ nullstellig)
2. Gewichte: $A$

# Grundlegende Begriffe

## Begriffe

- Baumreihe: Abbildung Baum $\mapsto$ Gewicht
- Baumreihen-Transformation: Abbildung Baumreihe $\mapsto$ Baumreihe

## Beispiel

- $t_1 \mapsto 1$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Menge $\{t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto 2$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Multi-Menge $\{t_1, t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto a$, $t_2 \mapsto b$, $\ldots$
- $(n\, t) \mapsto (n + 1)\, \gamma(t)$

## wobei

1. $t$ beliebiger Baum ($\gamma$ einstellig)
2. Gewichte: $\mathbb{N}$ (Anzahl der Vorkommen)

# Grundlegende Begriffe

## Begriffe

- Baumreihe: Abbildung Baum $\mapsto$ Gewicht
- Baumreihen-Transformation: Abbildung Baumreihe $\mapsto$ Baumreihe

## Beispiel

- $t_1 \mapsto 1$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Menge $\{t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto 2$, $t_2 \mapsto 1$, $\cdot \mapsto 0$ repräsentiert Multi-Menge $\{t_1, t_1, t_2\}$
- $t_1 \mapsto a$, $t_2 \mapsto b$, $\ldots$
- $(n\, t) \mapsto (n + 1)\, \gamma(t)$

## Baumreihen-Übersetzer

Endliche Spezifikation von Baumreihen-Transformationen

# Motivation

Baumreihen-Übersetzer sind Verallgemeinerung von:

## Baum-Übersetzern

Anwendungen:

- Syntax-gesteuerte Semantik
- Funktionale Programmierung
- XML-Abfragen

## gewichteten Automaten

Anwendungen:

- (Baum-) Mustererkennung
- Bildkomprimierung
- “Sprache-zu-Text”-Übersetzung

# Motivation

Baumreihen-Übersetzer sind Verallgemeinerung von:

## Baum-Übersetzern

Anwendungen:

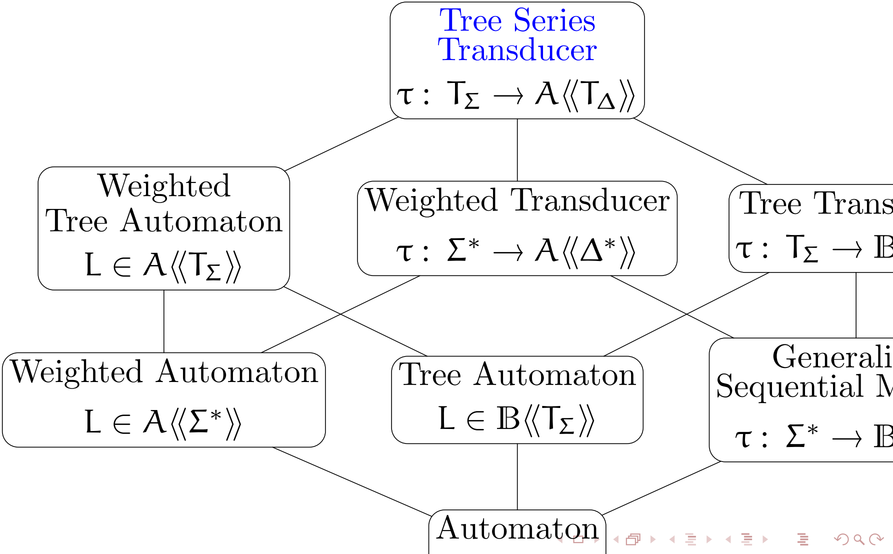
- Syntax-gesteuerte Semantik
- Funktionale Programmierung
- XML-Abfragen

## gewichteten Automaten

Anwendungen:

- (Baum-) Mustererkennung
- Bildkomprimierung
- “Sprache-zu-Text”-Übersetzung

## Überblick über verwandte Modelle



# Bäume

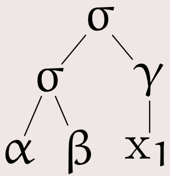
$\Sigma$ Rangalphabet; $\Sigma_k \subseteq \Sigma$ Symbole mit Rang $k$; $X = \{ x_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \}$

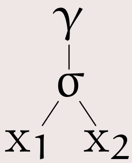
## Definitionen

- $T_\Sigma(X)$ Menge der $X$-indizierten $\Sigma$-Bäume; $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$
- $t \in T_\Sigma(X)$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, wenn jedes $y \in Y$ höchstens (bzw. mindestens) einmal in $t$ vorkommt
- $t[t_1, \ldots, t_k]$ Baum-Substitution der $t_i$ für $x_i$ in $t$

## Beispiele

$\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}\}$ und $Y = \{x_1, x_2\}$




$\sigma(\sigma(\alpha, \beta), \gamma(x_1))$ $\quad$ $\gamma(\sigma(x_1, x_2))$

# Bäume

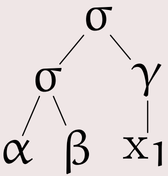
$\Sigma$ Rangalphabet; $\Sigma_k \subseteq \Sigma$ Symbole mit Rang $k$; $X = \{ x_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \}$

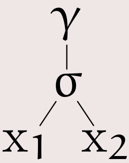
## Definitionen

- $T_\Sigma(X)$ Menge der $X$-indizierten $\Sigma$-Bäume; $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$
- $t \in T_\Sigma(X)$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, wenn jedes $y \in Y$ höchstens (bzw. mindestens) einmal in $t$ vorkommt
- $t[t_1, \ldots, t_k]$ Baum-Substitution der $t_i$ für $x_i$ in $t$

## Beispiele

$\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}\}$ und $Y = \{x_1, x_2\}$




$$\sigma(\sigma(\alpha, \beta), \gamma(x_1)) \qquad \gamma(\sigma(x_1, x_2))$$

# Bäume

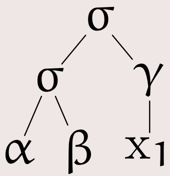
$\Sigma$ Rangalphabet; $\Sigma_k \subseteq \Sigma$ Symbole mit Rang $k$; $X = \{ x_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \}$

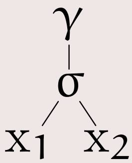
## Definitionen

- $T_\Sigma(X)$ Menge der $X$-indizierten $\Sigma$-Bäume; $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$
- $t \in T_\Sigma(X)$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, wenn jedes $y \in Y$ höchstens (bzw. mindestens) einmal in $t$ vorkommt
- $t[t_1, \ldots, t_k]$ Baum-Substitution der $t_i$ für $x_i$ in $t$

## Beispiele

$\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}\}$ und $Y = \{x_1, x_2\}$





$$\sigma(\sigma(\alpha, \beta), \gamma(x_1)) \quad \gamma(\sigma(x_1, x_2))$$

# Halbringe

## Definition

Ein Halbring ist eine algebraische Struktur $\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ wobei:

- $(A, \oplus)$ ein kommutativer Monoid mit neutralem Element $0$;
- $(A, \odot)$ ein Monoid mit neutralem Element 1;
- $0$ absorbierend bzgl. $\odot$; und
- $\odot$ distributiv über $\oplus$ (beidseitig).

## Beispiele

- Halbring der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_\infty = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +, \cdot)$
- boolesche Halbring $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge)$
- tropische Halbring $\mathbb{T} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$
- jeder Ring, Körper, etc.

# Halbringe

## Definition

Ein Halbring ist eine algebraische Struktur $\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ wobei:

- $(A, \oplus)$ ein kommutativer Monoid mit neutralem Element $0$;
- $(A, \odot)$ ein Monoid mit neutralem Element $1$;
- $0$ absorbierend bzgl. $\odot$; und
- $\odot$ distributiv über $\oplus$ (beidseitig).

## Beispiele

- Halbring der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_\infty = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +, \cdot)$
- boolesche Halbring $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge)$
- tropische Halbring $\mathbb{T} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$
- jeder Ring, Körper, etc.

# Eigenschaften von Halbringen

## Definition

Halbring $\mathcal{A}$ ist

- kommutativ, wenn $\odot$ kommutativ ist;
- multiplikativ idempotent, falls $a \odot a = a$,
- vollständig, falls eine Abbildung $\bigoplus_I : A^I \longrightarrow A$ existiert, so dass
  1. $\bigoplus_{i \in \{m,n\}} a_i = a_m \oplus a_n$;
  2. $\bigoplus_{i \in I} a_i = \bigoplus_{j \in J} (\bigoplus_{i \in I_j} a_i)$ mit $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ Partition von $I$; und
  3. $(\bigoplus_{i \in I} a_i) \odot (\bigoplus_{j \in J} b_j) = \bigoplus_{i \in I, j \in J} (a_i \odot b_j)$.

## Beispiele

| Halbring | Kommutativ | M. idempotent | Vollständig |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}_\infty$ | ja | nein | ja |
| $\mathbb{B}$ | ja | ja | ja |
| $\mathbb{T}$ | ja | nein | ja |

# Eigenschaften von Halbringen

## Definition

Halbring $\mathcal{A}$ ist

- kommutativ, wenn $\odot$ kommutativ ist;
- multiplikativ idempotent, falls $a \odot a = a$,
- vollständig, falls eine Abbildung $\bigoplus_I : A^I \longrightarrow A$ existiert, so dass
  1. $\bigoplus_{i \in \{m,n\}} a_i = a_m \oplus a_n$;
  2. $\bigoplus_{i \in I} a_i = \bigoplus_{j \in J} \left( \bigoplus_{i \in I_j} a_i \right)$ mit $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ Partition von $I$; und
  3. $\left( \bigoplus_{i \in I} a_i \right) \odot \left( \bigoplus_{j \in J} b_j \right) = \bigoplus_{i \in I, j \in J} (a_i \odot b_j)$.

## Beispiele

| Halbring | Kommutativ | M. idempotent | Vollständig |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}_\infty$ | ja | nein | ja |
| $\mathbb{B}$ | ja | ja | ja |
| $\mathbb{T}$ | ja | nein | ja |

# Eigenschaften von Halbringen

## Definition

Halbring $\mathcal{A}$ ist

- kommutativ, wenn $\odot$ kommutativ ist;
- multiplikativ idempotent, falls $a \odot a = a$,
- vollständig, falls eine Abbildung $\bigoplus_I : A^I \longrightarrow A$ existiert, so dass
  1. $\bigoplus_{i \in \{m,n\}} a_i = a_m \oplus a_n$;
  2. $\bigoplus_{i \in I} a_i = \bigoplus_{j \in J} \left( \bigoplus_{i \in I_j} a_i \right)$ mit $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ Partition von $I$; und
  3. $\left( \bigoplus_{i \in I} a_i \right) \odot \left( \bigoplus_{j \in J} b_j \right) = \bigoplus_{i \in I, j \in J} (a_i \odot b_j)$.

## Beispiele

| Halbring | Kommutativ | M. idempotent | Vollständig |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}_\infty$ | ja | nein | ja |
| $\mathbb{B}$ | ja | ja | ja |
| $\mathbb{T}$ | ja | nein | ja |

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi \colon T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{ t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0 \}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$$
$$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathrm{size}(t)\ t$$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi \colon T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0\}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$$
$$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathrm{size}(t)\ t$$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi \colon T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt **Baumreihe**

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- **Koeffizient** von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise **Summe** $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- **Träger** von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0\}$
- $\varphi$ ist **linear** (bzw. **nicht-löschend**) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$$
$$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathrm{size}(t)\ t$$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi \colon T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\operatorname{supp}(\varphi) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0\}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\operatorname{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$

$= \sum_{t \in T_\Sigma} \operatorname{size}(t)\ t$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0\}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$$\varphi = 1\,\alpha + 1\,\beta + 3\,\sigma(\alpha,\alpha) + \ldots + 3\,\sigma(\beta,\beta) + 5\,\sigma(\alpha,\sigma(\alpha,\alpha)) + \ldots$$
$$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathrm{size}(t)\, t$$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\!\langle T_\Sigma(X)\rangle\!\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0\}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$$
$$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathrm{size}(t)\ t$$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{ t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0 \}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$
$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathrm{size}(t)\ t$

# Baumreihe

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ Halbring, $\Sigma$ Rangalphabet

## Definition

Abbildung $\varphi : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ heißt Baumreihe

- Klasse aller Baumreihen $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$
- Koeffizient von $t \in T_\Sigma(X)$ in $\varphi$ (also $\varphi(t)$) bezeichnet durch $(\varphi, t)$
- punktweise Summe $(\varphi_1 \oplus \varphi_2, t) = (\varphi_1, t) \oplus (\varphi_2, t)$
- Träger von $\varphi$ ist $\mathrm{supp}(\varphi) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (\varphi, t) \neq 0\}$
- $\varphi$ ist linear (bzw. nicht-löschend) in $Y \subseteq X$, falls $\mathrm{supp}(\varphi)$ eine Menge von linearen (bzw. nicht-löschenden) Bäumen ist
- $\varphi$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = \emptyset$ bezeichnet durch $\widetilde{0}$

## Beispiel

$$\varphi = 1\ \alpha + 1\ \beta + 3\ \sigma(\alpha, \alpha) + \ldots + 3\ \sigma(\beta, \beta) + 5\ \sigma(\alpha, \sigma(\alpha, \alpha)) + \ldots$$
$$= \sum_{t \in T_\Sigma} \mathit{size}(t)\ t$$

# Baumreihen-Substitution

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ vollständiger Halbring, $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_k \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$

## Definition

Reine Substitution von $(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ in $\varphi$:

$$\varphi \longleftarrow (\psi_1, \ldots, \psi_k) = \bigoplus_{\substack{t \in \mathrm{supp}(\varphi), \\ (\forall i \in [k]):\, t_i \in \mathrm{supp}(\psi_i)}} (\varphi, t) \odot (\psi_1, t_1) \odot \cdots \odot (\psi_k, t_k)\; t[t_1, \ldots, t_k]$$

## Beispiel

$5\ \sigma(x_1, x_1) \longleftarrow (2\ \alpha \oplus 3\ \beta) = (5 \odot 2)\ \sigma(\alpha, \alpha) \oplus (5 \odot 3)\ \sigma(\beta, \beta)$

## Graphisch:

$$5 \; \sigma(x_1, x_1) \leftarrow (2\ \alpha + 3\ \beta) = 10 \; \sigma(\alpha, \alpha) + 1$$

# Baumreihen-Substitution

$\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$ vollständiger Halbring, $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_k \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$

## Definition

**Reine Substitution** von $(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ in $\varphi$:

$$\varphi \longleftarrow (\psi_1, \ldots, \psi_k) = \bigoplus_{\substack{t \in \mathrm{supp}(\varphi), \\ (\forall i \in [k]) \colon t_i \in \mathrm{supp}(\psi_i)}} (\varphi, t) \odot (\psi_1, t_1) \odot \cdots \odot (\psi_k, t_k)\, t[t_1, \ldots, t_k]$$

## Beispiel

$5\ \sigma(x_1, x_1) \longleftarrow (2\ \alpha \oplus 3\ \beta) = (5 \odot 2)\ \sigma(\alpha, \alpha) \oplus (5 \odot 3)\ \sigma(\beta, \beta)$

## Graphisch:

$$5 \begin{array}{c} \sigma \\ / \quad \backslash \\ x_1 \quad x_1 \end{array} \leftarrow (2\ \alpha + 3\ \beta) = 10 \begin{array}{c} \sigma \\ / \quad \backslash \\ \alpha \quad \alpha \end{array} + 1$$

# Baumreihen-Übersetzer

## Definition:

Baumreihen-Übersetzer ist $M = (Q, \Sigma, \Delta, \mathcal{A}, F, \mu)$ mit:

- $Q$: nicht-leere, endliche Menge von Zuständen;
- $\Sigma$ und $\Delta$: Eingabe- und Ausgabealphabet;
- $\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$: vollständiger Halbring;
- $F \in A\langle\langle T_\Delta(X_1)\rangle\rangle^Q$: Vektor von linearen, nicht-löschenden Baumreihen (Endausgabe); und
- Baumrepräsentation $\mu = (\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\mu_k : \Sigma_k \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta(X_k)\rangle\rangle^{Q \times Q^k}$.

## Beispiel

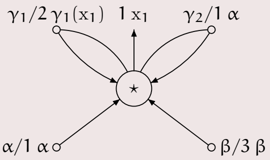
# Baumreihen-Übersetzer

## Definition:

Baumreihen-Übersetzer ist $M = (Q, \Sigma, \Delta, \mathcal{A}, F, \mu)$ mit:

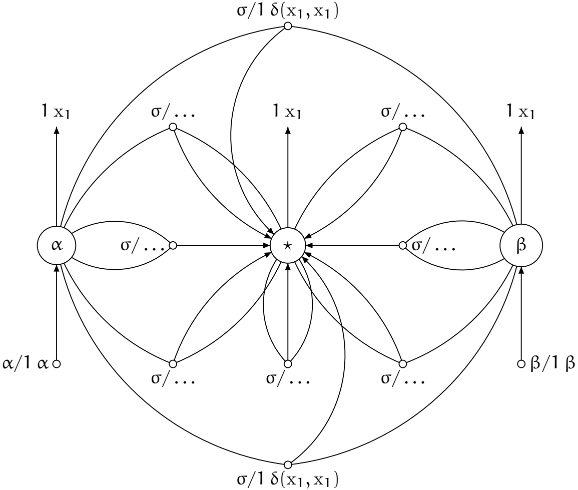
- $Q$: nicht-leere, endliche Menge von Zuständen;
- $\Sigma$ und $\Delta$: Eingabe- und Ausgabealphabet;
- $\mathcal{A} = (A, \oplus, \odot)$: vollständiger Halbring;
- $F \in A\langle\langle T_\Delta(X_1)\rangle\rangle^Q$: Vektor von linearen, nicht-löschenden Baumreihen (Endausgabe); und
- Baumrepräsentation $\mu = (\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\mu_k : \Sigma_k \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta(X_k)\rangle\rangle^{Q \times Q^k}$.

## Beispiel



# Beispiel-Übersetzer

$\sigma/\ldots$ steht für $\sigma/1\ \sigma(x_1, x_1)$



# Semantik eines Baumreihen-Übersetzers

## Definitionen

1. Abbildung $r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow Q$ Lauf von $M$ auf Eingabebaum $t \in T_\Sigma$
2. $\mathrm{Run}(t)$ Menge aller Läufe auf $t$

## Auswertung eines Laufes

$\mathrm{eval}_r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta \rangle\rangle$ definiert durch

$$\mathrm{eval}_r(p) = \mu_k(\mathrm{lab}_t(p))_{r(p),r(p\cdot 1)\dots r(p\cdot k)} \longleftarrow (\mathrm{eval}_r(p\cdot 1), \dots, \mathrm{eval}_r(p\cdot k))$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{lab}_t(p) \in \Sigma_k$.

## Semantik

Baumreihen-Transformation berechnet von $M$ ist $\|M\| : A\langle\langle T_\Sigma \rangle\rangle \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta \rangle\rangle$ mit

$$\|M\|(\varphi) = \bigoplus_{t \in T_\Sigma} (\varphi, t) \odot \left( \bigoplus_{r \in \mathrm{Run}(t)} F_{r(\varepsilon)} \longleftarrow (\mathrm{eval}_r(\varepsilon)) \right)$$

# Semantik eines Baumreihen-Übersetzers

## Definitionen

1. Abbildung $r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow Q$ Lauf von $M$ auf Eingabebaum $t \in T_\Sigma$
2. $\mathrm{Run}(t)$ Menge aller Läufe auf $t$

## Auswertung eines Laufes

$\mathrm{eval}_r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta \rangle\rangle$ definiert durch

$$\mathrm{eval}_r(p) = \mu_k(\mathrm{lab}_t(p))_{r(p),r(p\cdot 1)\ldots r(p\cdot k)} \longleftarrow (\mathrm{eval}_r(p\cdot 1), \ldots, \mathrm{eval}_r(p\cdot k))$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{lab}_t(p) \in \Sigma_k$.

## Semantik

Baumreihen-Transformation berechnet von $M$ ist $\|M\| : A\langle\langle T_\Sigma \rangle\rangle \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta \rangle\rangle$ mit

$$\|M\|(\varphi) = \bigoplus_{t \in T_\Sigma} (\varphi, t) \odot \left( \bigoplus_{r \in \mathrm{Run}(t)} F_{r(\varepsilon)} \longleftarrow (\mathrm{eval}_r(\varepsilon)) \right)$$

# Semantik eines Baumreihen-Übersetzers

## Definitionen

1. Abbildung $r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow Q$ Lauf von $M$ auf Eingabebaum $t \in T_\Sigma$
2. $\mathrm{Run}(t)$ Menge aller Läufe auf $t$

## Auswertung eines Laufes

$\mathrm{eval}_r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta \rangle\rangle$ definiert durch

$$\mathrm{eval}_r(p) = \mu_k(\mathrm{lab}_t(p))_{r(p),r(p\cdot 1)\dots r(p\cdot k)} \longleftarrow \big(\mathrm{eval}_r(p\cdot 1), \dots, \mathrm{eval}_r(p\cdot k)\big)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{lab}_t(p) \in \Sigma_k$.

## Semantik

Baumreihen-Transformation berechnet von $M$ ist $\|M\| : A\langle\langle T_\Sigma \rangle\rangle \longrightarrow A\langle\langle T_\Delta \rangle\rangle$ mit

$$\|M\|(\varphi) = \bigoplus_{t \in T_\Sigma} (\varphi, t) \odot \Big( \bigoplus_{r \in \mathrm{Run}(t)} F_{r(\varepsilon)} \longleftarrow (\mathrm{eval}_r(\varepsilon)) \Big)$$

# Semantik eines Baumreihen-Übersetzers

## Definitionen

1. Abbildung $r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow Q$ Lauf von $M$ auf Eingabebaum $t \in T_\Sigma$
2. $\mathrm{Run}(t)$ Menge aller Läufe auf $t$

## Auswertung eines Laufes

$\mathrm{eval}_r : \mathrm{pos}(t) \longrightarrow A\langle\!\langle T_\Delta \rangle\!\rangle$ definiert durch

$$\mathrm{eval}_r(p) = \mu_k(\mathrm{lab}_t(p))_{r(p),r(p\cdot 1)\ldots r(p\cdot k)} \longleftarrow \big(\mathrm{eval}_r(p\cdot 1), \ldots, \mathrm{eval}_r(p\cdot k)\big)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{lab}_t(p) \in \Sigma_k$.

## Semantik

Baumreihen-Transformation berechnet von $M$ ist $\|M\| : A\langle\!\langle T_\Sigma \rangle\!\rangle \longrightarrow A\langle\!\langle T_\Delta \rangle\!\rangle$ mit

$$\|M\|(\varphi) = \bigoplus_{t \in T_\Sigma} (\varphi, t) \odot \Big( \bigoplus_{r \in \mathrm{Run}(t)} F_{r(\varepsilon)} \longleftarrow (\mathrm{eval}_r(\varepsilon)) \Big)$$

# Semantik — Beispiel

## Beispiel

$M = (Q, \Sigma, \Delta, \mathbb{N}_\infty, F, \mu)$ mit

- $Q = \{\perp, \star\}$;
- $\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \alpha^{(0)}\}$ und $\Delta = \{\gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}\}$;
- $F_\perp = \widetilde{0}$ und $F_\star = 1\, x_1$;
- und Baum-Repräsentation

$$\mu_0(\alpha)_\perp = 1\ \alpha \qquad \mu_0(\alpha)_\star = 1\ \alpha$$

$$\mu_2(\sigma)_{\perp,\perp\perp} = 1\ \alpha \qquad \mu_2(\sigma)_{\star,\star\perp} = 1\ \gamma(x_1) \qquad \mu_2(\sigma)_{\star,\perp\star} = 1\ \gamma(x_2)$$

# Semantik — Beispiel

**Beispiel**

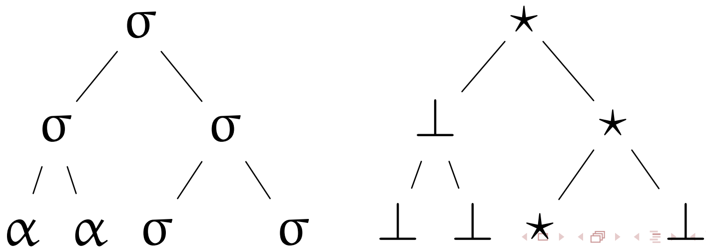
$M = (Q, \Sigma, \Delta, \mathbb{N}_\infty, F, \mu)$ mit

- ...
- und Baum-Repräsentation

$$\mu_0(\alpha)_\perp = 1\ \alpha \qquad \mu_0(\alpha)_\star = 1\ \alpha$$

$$\mu_2(\sigma)_{\perp,\perp\perp} = 1\ \alpha \qquad \mu_2(\sigma)_{\star,\star\perp} = 1\ \gamma(x_1) \qquad \mu_2(\sigma)_{\star,\perp\star} = 1\ \gamma(x_2)$$

Input tree t　　Run r on t



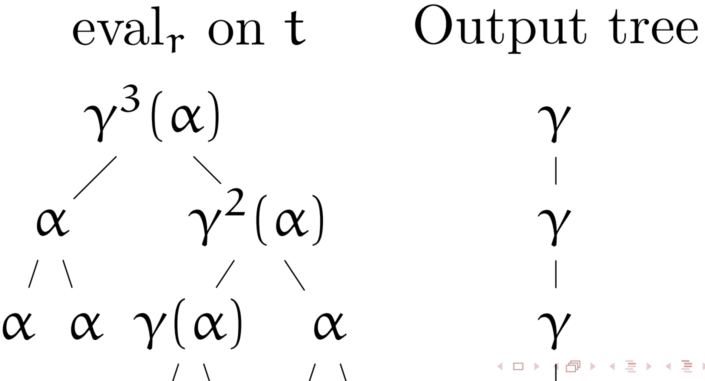
# Semantik — Beispiel (Forts.)

**Beispiel**

- ...
- und Baum-Repräsentation

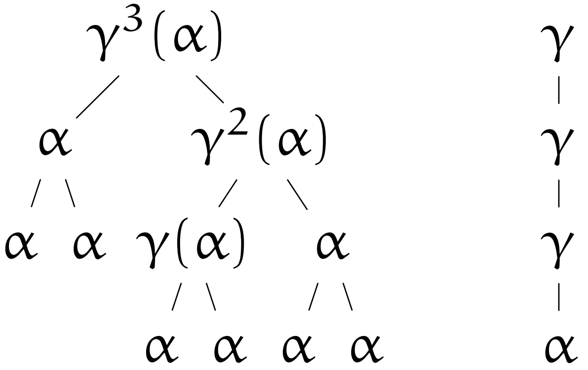
$$\mu_0(\alpha)_\perp = 1\,\alpha \qquad \mu_0(\alpha)_\star = 1\,\alpha$$

$$\mu_2(\sigma)_{\perp,\perp\perp} = 1\,\alpha \qquad \mu_2(\sigma)_{\star,\star\perp} = 1\,\gamma(x_1) \qquad \mu_2(\sigma)_{\star,\perp\star} = 1\,\gamma(x_2)$$



# Semantik — Beispiel (Forts.)

$\mathrm{eval}_r$ on t | Output tree




**Semantik**

$\|M\|(1\ t) = 2\,\gamma^2(\alpha) + 4\,\gamma^3(\alpha)$

# Komposition

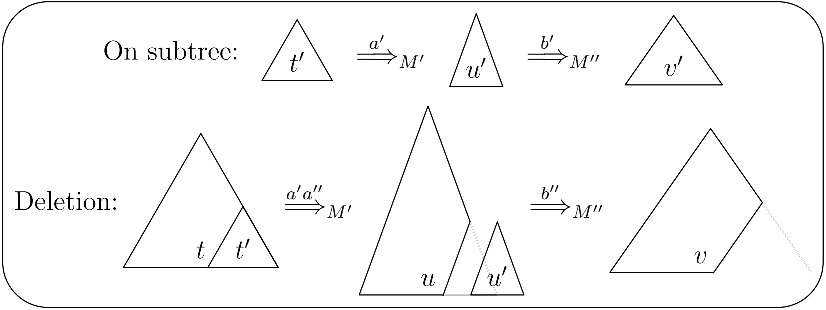
## Anwendung

1. Modulare Spezifikation mehrerer Phasen der Übersetzung
2. Verständliche Einzelspezifikationen
3. Einfache Validation der Einzelspezifikation
4. Automatische Komposition (zur Effizienzsteigerung)

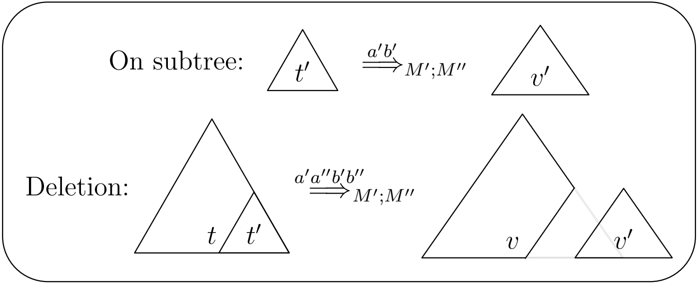
# Komposition

## Anwendung

1. Modulare Spezifikation mehrerer Phasen der Übersetzung
2. Verständliche Einzelspezifikationen
3. Einfache Validation der Einzelspezifikation
4. Automatische Komposition (zur Effizienzsteigerung)



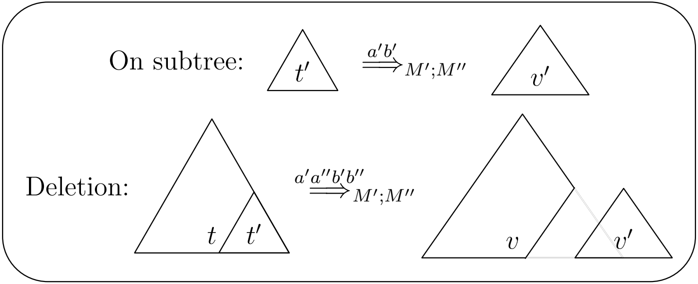
# Komposition (Forts.)




**Problem**

Löschung durch $M_1$

# Komposition (Forts.)




**Problem**

Löschung durch $M_1$

# Haupttheorem

$\mathcal{A}$ kommutativer und vollständiger Halbring

**Kompositionen für Baumübersetzer**

1. l-BOT$(\mathbb{B})$ ; BOT$(\mathbb{B})$ $=$ BOT$(\mathbb{B})$
2. BOT$(\mathbb{B})$ ; d-BOT$(\mathbb{B})$ $=$ BOT$(\mathbb{B})$

**Haupttheorem**

1. l-BOT$(\mathcal{A})$ ; BOT$(\mathcal{A})$ $=$ BOT$(\mathcal{A})$
2. BOT$(\mathcal{A})$ ; db-BOT$(\mathcal{A})$ $=$ BOT$(\mathcal{A})$
3. BOT$(\mathcal{A})$ ; d-BOT$(\mathcal{A})$ $=$ BOT$(\mathcal{A})$, falls $\mathcal{A}$ multiplikativ idempotent ist

**Ausblick**

Ergebnisse auch für "Wurzel-zu-Blatt"-Übersetzer möglich

# Haupttheorem

$\mathcal{A}$ kommutativer und vollständiger Halbring

## Kompositionen für Baumübersetzer

1. l-BOT$(\mathbb{B})$ ; BOT$(\mathbb{B})$ = BOT$(\mathbb{B})$
2. BOT$(\mathbb{B})$ ; d-BOT$(\mathbb{B})$ = BOT$(\mathbb{B})$

## Haupttheorem

1. l-BOT$(\mathcal{A})$ ; BOT$(\mathcal{A})$ = BOT$(\mathcal{A})$
2. BOT$(\mathcal{A})$ ; db-BOT$(\mathcal{A})$ = BOT$(\mathcal{A})$
3. BOT$(\mathcal{A})$ ; d-BOT$(\mathcal{A})$ = BOT$(\mathcal{A})$, falls $\mathcal{A}$ multiplikativ idempotent ist

## Ausblick

Ergebnisse auch für "Wurzel-zu-Blatt"-Übersetzer möglich

# Haupttheorem

$\mathcal{A}$ kommutativer und vollständiger Halbring

## Kompositionen für Baumübersetzer

1. l-BOT$(\mathbb{B})$ ; BOT$(\mathbb{B})$ = BOT$(\mathbb{B})$
2. BOT$(\mathbb{B})$ ; d-BOT$(\mathbb{B})$ = BOT$(\mathbb{B})$

## Haupttheorem

1. l-BOT$(\mathcal{A})$ ; BOT$(\mathcal{A})$ = BOT$(\mathcal{A})$
2. BOT$(\mathcal{A})$ ; db-BOT$(\mathcal{A})$ = BOT$(\mathcal{A})$
3. BOT$(\mathcal{A})$ ; d-BOT$(\mathcal{A})$ = BOT$(\mathcal{A})$, falls $\mathcal{A}$ multiplikativ idempotent ist

## Ausblick

Ergebnisse auch für "Wurzel-zu-Blatt"-Übersetzer möglich

# Haupttheorem

$\mathcal{A}$ kommutativer und vollständiger Halbring

## Kompositionen für Baumübersetzer

1. l-BOT$(\mathbb{B})$ ; BOT$(\mathbb{B})$ $=$ BOT$(\mathbb{B})$
2. BOT$(\mathbb{B})$ ; d-BOT$(\mathbb{B})$ $=$ BOT$(\mathbb{B})$

## Haupttheorem

1. l-BOT$(\mathcal{A})$ ; BOT$(\mathcal{A})$ $=$ BOT$(\mathcal{A})$
2. BOT$(\mathcal{A})$ ; db-BOT$(\mathcal{A})$ $=$ BOT$(\mathcal{A})$
3. BOT$(\mathcal{A})$ ; d-BOT$(\mathcal{A})$ $=$ BOT$(\mathcal{A})$, falls $\mathcal{A}$ multiplikativ idempotent ist

## Ausblick

Ergebnisse auch für “Wurzel-zu-Blatt”-Übersetzer möglich

# Haupttheorem

$\mathcal{A}$ kommutativer und vollständiger Halbring

## Kompositionen für Baumübersetzer

1. l-BOT$(\mathbb{B})$ ; BOT$(\mathbb{B}) =$ BOT$(\mathbb{B})$
2. BOT$(\mathbb{B})$ ; d-BOT$(\mathbb{B}) =$ BOT$(\mathbb{B})$

## Haupttheorem

1. l-BOT$(\mathcal{A})$ ; BOT$(\mathcal{A}) =$ BOT$(\mathcal{A})$
2. BOT$(\mathcal{A})$ ; db-BOT$(\mathcal{A}) =$ BOT$(\mathcal{A})$
3. BOT$(\mathcal{A})$ ; d-BOT$(\mathcal{A}) =$ BOT$(\mathcal{A})$, falls $\mathcal{A}$ multiplikativ idempotent ist

## Ausblick

Ergebnisse auch für “Wurzel-zu-Blatt”-Übersetzer möglich

# Literatur


[Borchardt 04] B. Borchardt: *Code Selection by Tree Series Transducers*. CIAA'04, LNCS 3317, Springer 2004.

[Engelfriet et al 02] J. Engelfriet, Z. Fülöp, and H. Vogler: *Bottom-up and Top-down Tree Series Transformations*. J. Automata, Languages, and Combinatorics 7:11–70, 2002

[Fülöp et al 03] Z. Fülöp and H. Vogler: *Tree Series Transformations that Respect Copying*. Theory of Computing Systems 36:247–293, 2003

[Kuich 99] W. Kuich: *Tree Transducers and Formal Tree Series*. Acta Cybernetica 14:135–149, 1999