Statistik für Digital Humanities

Nichtparametrische Testverfahren

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

21. Juni 2021

[Letzte Aktualisierung: 22/06/2021, 11:01]

Überblick

1. Nichtparametrische Testverfahren
2. Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney
3. Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test
4. Kruskal-Wallis Test
5. Trendanalyse mit Jonckheere-Terpstra
6. Friedmans ANOVA
7. Effektstärke bei Friedman und Kruskal-Wallis

Nichtparametrische Testverfahren

- Nichtparametrische / Annahmenfreie Tests
- Weniger Annahmen bezogen auf die Daten Nicht *keine* Annahmen!
- Gerüchteweise weniger Aussagekraft (Power) als parametrische Gegenstücke
  - ... nur bestimmbar bei gegebener Normalverteilung (Typ I / II Fehler)
- Oft über Ranking gelöst Siehe Spearman Korrelation

Ranking

- Ranking erzeugt künstliche Intervallskalierung
- Rechenschritte:
  - Sortiere Werte von klein nach groß
  - Nummeriere die Werte = Rang
  - Bei gleichen Werten verwende deren Durchschnittsrang Tied Ranks / Gebundene Ränge

Ranking

- Ranking erzeugt künstliche Intervallskalierung
- Rechenschritte:
  - Sortiere Werte von klein nach groß
  - Nummeriere die Werte = Rang
  - Bei gleichen Werten verwende deren Durchschnittsrang Tied Ranks / Gebundene Ränge

Beispiel $X = \{D, G, F, R, F, R\}$

Ranking

- Ranking erzeugt künstliche Intervallskalierung
- Rechenschritte:
  - Sortiere Werte von klein nach groß
  - Nummeriere die Werte = Rang
  - Bei gleichen Werten verwende deren Durchschnittsrang Tied Ranks / Gebundene Ränge

Beispiel $X = \{D, G, F, R, F, R\}$

Sortiert	D	F	F	G	R	R

Ranking

- Ranking erzeugt künstliche Intervallskalierung
- Rechenschritte:
  - Sortiere Werte von klein nach groß
  - Nummeriere die Werte = Rang
  - Bei gleichen Werten verwende deren Durchschnittsrang Tied Ranks / Gebundene Ränge

Beispiel $X = \{D, G, F, R, F, R\}$

Sortiert	D	F	F	G	R	R
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6

Ranking

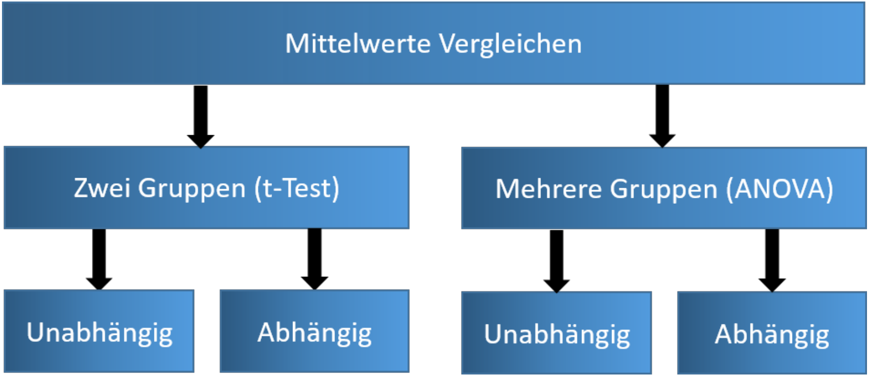
- Ranking erzeugt künstliche Intervallskalierung
- Rechenschritte:
  - Sortiere Werte von klein nach groß
  - Nummeriere die Werte = Rang
  - Bei gleichen Werten verwende deren Durchschnittsrang Tied Ranks / Gebundene Ränge

Beispiel $X = \{D, G, F, R, F, R\}$

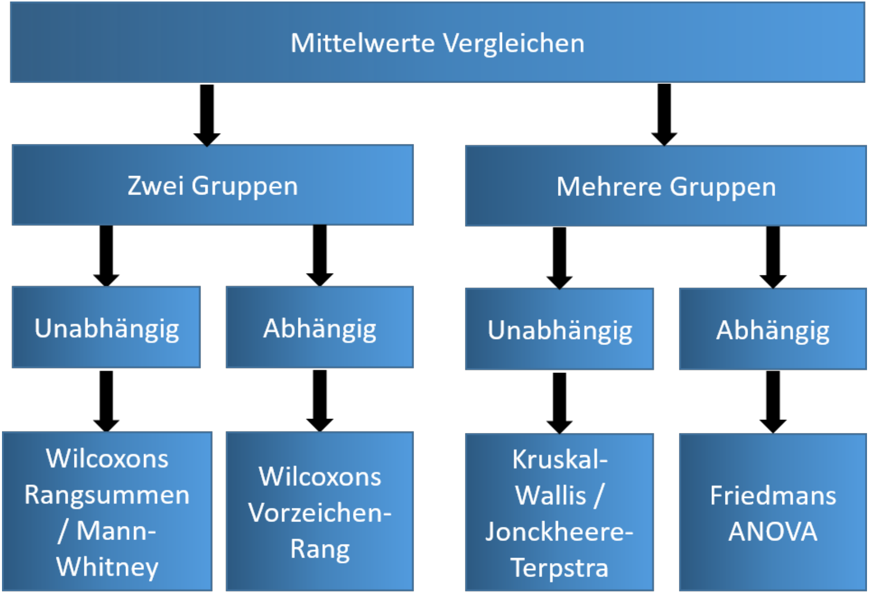
Sortiert	D	F	F	G	R	R
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6
Rang	1	2.5	2.5	4	5.5	5.5

Achtung: Die Abstandsinformation geht damit verloren, deshalb Mediane, Range und am besten Boxplots immer mit angeben

Wiederholung Mittelwertvergleiche



Nichtparametrische Mittelwertvergleiche



Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test

Mann, H.B. & Whitney, D.R. (1947): *On a test whether one or two random variables are statistically larger than the other*

Wilcoxon, F. (1945): *Individual comparisons by ranking methods*

- Beide machen dasselbe. *R* verwendet Wilcoxons Rangsummentest
- Parametrische Entsprechung: unabhängiger t-Test
- Grundprinzip: Vergleiche die Ränge beider Gruppen
  - Wenn ein Unterschied existiert, sollten in einer Gruppe signifikant mehr hohe/niedrige Ränge auftauchen als in der anderen.
- $H_0 =$ Es existiert kein signifikanter Unterschied in den Rängen. Gilt wenn $W > Wkr$
- $W_{kr} \rightarrow$ Wilcoxon Rangsummen Tabelle
- $W_{group} = \sum(ranks_{group}) - Normalrang_{group}$
- $Normalrang = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n*(n+1)}{2}$ mean Rank. Achtung: Nicht mean der Ranks(!)
- $W_{group} = \sum ranks_{group} - \frac{n_{group}*(n_{group}+1)}{2}$
- $W = min(W_{group})$

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test Beispiel

Depression (Beck Depression Index) nach Drogenkonsum am Samstag

Proband	Droge	BDI Sonntag	BDI Mittwoch
1	Ecstasy	15	28
2	Ecstasy	35	35
...	...	...	...
9	Ecstasy	13	36
10	Ecstasy	20	35
11	Alkohol	16	5
12	Alkohol	15	6
...	...	...	...
19	Alkohol	18	3
20	Alkohol	18	10

Kompletter Datensatz Siehe folgende Rangtabelle

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test Beispiel

Sonntag:

BDI	13	13	14	15	15	15	16	16	16	16	17	18	18	18	19	19	20	20	27	35
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1.5	1.5	3	5	5	5	8.5	8.5	8.5	8.5	11	13	13	13	15.5	15.5	17.5	17.5	19	20
Gruppe	A	E	A	A	A	E	A	A	E	E	E	E	A	A	E	A	E	A	E	E

Mittwoch:

BDI	3	5	6	6	7	8	9	10	17	24	27	28	29	30	32	35	35	35	36	39
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1	2	3.5	3.5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	17	17	19	20
Gruppe	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test Beispiel

Mittwoch:

BDI	3	5	6	6	7	8	9	10	17	24	27	28	29	30	32	35	35	35	36	39
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1	2	3.5	3.5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	17	17	19	20
Gruppe	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test Beispiel

Mittwoch:

BDI	3	5	6	6	7	8	9	10	17	24	27	28	29	30	32	35	35	35	36	39
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1	2	3.5	3.5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	17	17	19	20
Gruppe	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E

- $W_{group} = \sum ranks_{group} - \frac{n_{group} * (n_{group} + 1)}{2}$
- $W_{Ecstasy} = 151 - 55 = 96$
- $W_{Alcohol} = 59 - 55 = 4$
- $W = min(W_{group}) = 4 < W_{kr}(10, 10) = 23 \rightarrow H_0$ abgelehnt $\rightarrow$

Mittwoch:

BDI	3	5	6	6	7	8	9	10	17	24	27	28	29	30	32	35	35	35	36	39
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1	2	3.5	3.5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	17	17	19	20
Gruppe	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E

- $W_{group} = \sum ranks_{group} - \frac{n_{group} * (n_{group}+1)}{2}$
- $W_{Ecstasy} = 151 - 55 = 96$
- $W_{Alcohol} = 59 - 55 = 4$
- $W = min(W_{group}) = 4 < W_{kr}(10, 10) = 23 \rightarrow H_0$ abgelehnt $\rightarrow$Unterschied signifikant

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test
Wahrscheinlichkeiten

- Berechnung von p folgt der Annahme der Normalverteilung
  - Weder Ränge noch Daten sind hier normalverteilt ☹

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test
Wahrscheinlichkeiten

- Berechnung von p folgt der Annahme der Normalverteilung
  - Weder Ränge noch Daten sind hier normalverteilt ☹
- Monte Carlo Methode (exakt)
  - Häufige zufällige Zuordnung der Daten in Gruppen
  - Jeweils Prüfgröße berechnen
  - $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgrößen künstlich erzeugt
  - Nur möglich wenn keine gebundenen Ränge existieren

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test Wahrscheinlichkeiten

- Berechnung von p folgt der Annahme der Normalverteilung
  - Weder Ränge noch Daten sind hier normalverteilt ☹
- Monte Carlo Methode (exakt)
  - Häufige zufällige Zuordnung der Daten in Gruppen
  - Jeweils Prüfgröße berechnen
  - $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgrößen künstlich erzeugt
  - Nur möglich wenn keine gebundenen Ränge existieren
- Normal-Approximation
  - Normalverteilung der Stichprobenverteilung angenommen
  - $SE_{Teststatistik} \rightarrow zScore \rightarrow p$
  - Optional Stetigkeitskorrektur, da Ränge immer um 1 oder 0.5 steigen

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test
Wahrscheinlichkeiten

- Berechnung von p folgt der Annahme der Normalverteilung
  - Weder Ränge noch Daten sind hier normalverteilt ☹
- Monte Carlo Methode (exakt)
  - Häufige zufällige Zuordnung der Daten in Gruppen
  - Jeweils Prüfgröße berechnen
  - → Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgrößen künstlich erzeugt
  - Nur möglich wenn keine gebundenen Ränge existieren
- Normal-Approximation
  - Normalverteilung der Stichprobenverteilung angenommen
  - $SE_{Teststatistik} \rightarrow zScore \rightarrow p$
  - Optional Stetigkeitskorrektur, da Ränge immer um 1 oder 0.5 steigen
- Monte Carlo besser als Normalenabschätzung aber aufwendiger
- Stetigkeitskorrektur hat wenig Einfluß auf Ergebnis
- R verwendet per default Normal-Approximation mit Stetigkeitskorrektur ab $n = 40$

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test
Wahrscheinlichkeiten

- Berechnung von p folgt der Annahme der Normalverteilung
  - Weder Ränge noch Daten sind hier normalverteilt ☹
- Monte Carlo Methode (exakt)
  - Häufige zufällige Zuordnung der Daten in Gruppen
  - Jeweils Prüfgröße berechnen
  - $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgrößen künstlich erzeugt
  - Nur möglich wenn keine gebundenen Ränge existieren
- Normal-Approximation
  - Normalverteilung der Stichprobenverteilung angenommen
  - $SE_{Teststatistik} \rightarrow zScore \rightarrow p$
  - Optional Stetigkeitskorrektur, da Ränge immer um 1 oder 0.5 steigen
- Monte Carlo besser als Normalenabschätzung aber aufwendiger
- Stetigkeitskorrektur hat wenig Einfluß auf Ergebnis
- R verwendet per default Normal-Approximation mit Stetigkeitskorrektur ab $n = 40$
- ... Die Experten sind sich uneinig

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test in *R*

```
sundayBDI<-c(16, 15, 20, 15, 16, 13, 14, 19, 18, 18, 15, 35, 16, 18, 19, 17,
    27, 16, 13, 20)
wedsBDI<-c(5, 6, 30, 8, 9, 7, 6, 17, 3, 10, 28, 35, 35, 24, 39, 32, 27, 29,
    36, 35)

drug<-gl(2, 10, labels = c("Alcohol", "Ecstasy"))
drugData<-data.frame(drug, sundayBDI, wedsBDI)
wilcox.test(wedsBDI ~ drug, data = drugData, exact=FALSE, correct=FALSE)
```

```
Wilcoxon rank sum test

data:  wedsBDI by drug
W = 4, p-value = 0.0004943
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

$p < 0.05 \rightarrow H_0$ abgewiesen

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test in *R*

```
sundayBDI<-c(16, 15, 20, 15, 16, 13, 14, 19, 18, 18, 15, 35, 16, 18, 19, 17,
    27, 16, 13, 20)
wedsBDI<-c(5, 6, 30, 8, 9, 7, 6, 17, 3, 10, 28, 35, 35, 24, 39, 32, 27, 29,
    36, 35)

drug<-gl(2, 10, labels = c("Alcohol", "Ecstasy"))
drugData<-data.frame(drug, sundayBDI, wedsBDI)
wilcox.test(wedsBDI ~ drug, data = drugData, exact=FALSE, correct=FALSE)
```

```
Wilcoxon rank sum test

data:  wedsBDI by drug
W = 4, p-value = 0.0004943
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

$p < 0.05 \rightarrow H_0$ abgewiesen $\rightarrow$ Unterschied signifikant

Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney Test in *R*

Unschön: *R* wählt nicht das kleinste *W* sondern abhängig von Inputreihenfolge

```
sundayBDI<-c(15, 35, 16, 18, 19, 17,27, 16, 13, 20, 16, 15, 20, 15, 16, 13,
    14, 19, 18, 18)
wedsBDI<-c(28, 35, 35, 24, 39, 32, 27, 29, 36, 35, 5, 6, 30, 8, 9, 7, 6, 17,
    3, 10)
drug<-gl(2, 10, labels = c("Ecstasy", "Alcohol"))
drugData<-data.frame(drug, sundayBDI, wedsBDI)
wilcox.test(wedsBDI ~ drug, data = drugData, exact=FALSE, correct=FALSE)

Wilcoxon rank sum test

data:  wedsBDI by drug
W = 96, p-value = 0.0004943
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

. . . aber *p* ändert sich dadurch nicht, also eigentlich egal

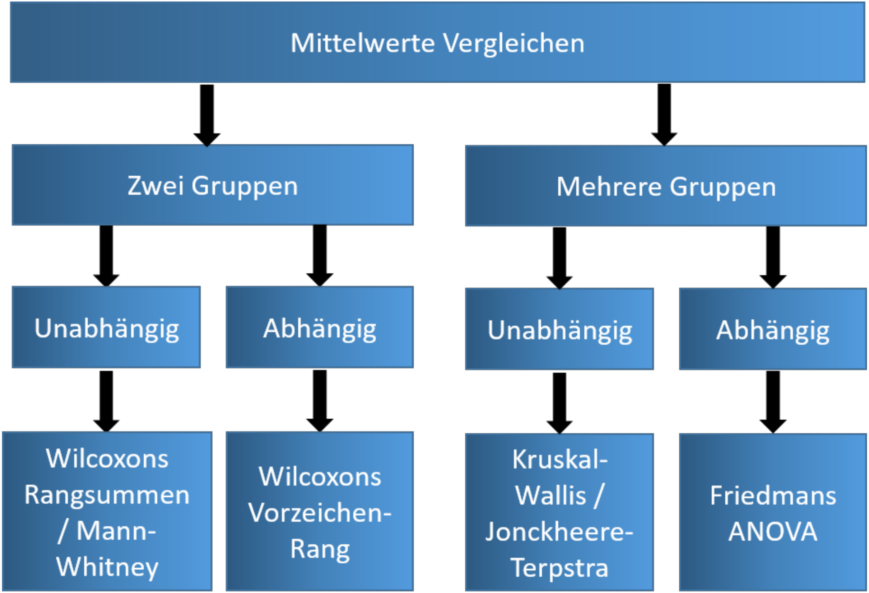
Effektstärke

Folgendes Skript generiert *r* für beide Arten von Wilcoxmodell

```
rFromWilcox<-function(wilcoxModel, n){
        z<- qnorm(wilcoxModel$p.value/2)
        r<- z/ sqrt(N)
        cat(wilcoxModel$data.name, "Effect Size, r = ", r)
}
```

Interpretation Siehe Vorlesung zu Korrelation

Nichtparametrische Testverfahren



Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test

Wilcoxon, F. (1945): *Individual comparisons by ranking methods*

- Signed Rank Test
- Parametrische Entsprechung: abhängiger t-Test
- Wir interessieren uns also für die Differenz der Ränge von einer Gruppe zur anderen
- $H_0 =$ Die Differenz ist nicht signifikant. Abschätzung mittels z-Score

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test

Wilcoxon, F. (1945): *Individual comparisons by ranking methods*

- Signed Rank Test
- Parametrische Entsprechung: abhängiger t-Test
- Wir interessieren uns also für die Differenz der Ränge von einer Gruppe zur anderen
- $H_0 =$ Die Differenz ist nicht signifikant. Abschätzung mittels z-Score

Berechnung:

- Teststatistik berechnen
  - Ränge der Differenzen berechnen, Differenz=0→ Exclude
  - T_+ , T_-: Ränge der positiven und negativen Differenzen summieren
  - $T = min(T_+, T_-)$

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test

Wilcoxon, F. (1945): *Individual comparisons by ranking methods*

- Signed Rank Test
- Parametrische Entsprechung: abhängiger t-Test
- Wir interessieren uns also für die Differenz der Ränge von einer Gruppe zur anderen
- $H_0 =$ Die Differenz ist nicht signifikant. Abschätzung mittels z-Score

Berechnung:

- Teststatistik berechnen
  - Ränge der Differenzen berechnen, Differenz$=0 \rightarrow$ Exclude
  - T_+ , T_-: Ränge der positiven und negativen Differenzen summieren
  - $T = min(T_+, T_-)$
- Signifikanz bestimmen:
  - $\overline{T} = \frac{n*(n+1)}{4}$ Mittelwert der Zufallsverteilung
  - $SE_{\overline{T}} = \sqrt{\frac{n*(n+1)*(n+2)}{24}}$
  - $z = \frac{T-\overline{T}}{SE_{\overline{T}}}$
  - $z > 1.96 \rightarrow H_0$ abgewiesen$\rightarrow$ Differenz signifikant mit $p < 0.05$

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Sonntag:

BDI	13	13	14	15	15	15	16	16	16	16	17	18	18	18	19	19	20	20	27	35
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1.5	1.5	3	5	5	5	8.5	8.5	8.5	8.5	11	13	13	13	15.5	15.5	17.5	17.5	19	20
Gruppe	A	E	A	A	A	E	A	A	E	E	E	E	A	A	E	A	E	A	E	E

Mittwoch:

BDI	3	5	6	6	7	8	9	10	17	24	27	28	29	30	32	35	35	35	36	39
Pot. Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rang	1	2	3.5	3.5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	17	17	19	20
Gruppe	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Ecstasy											
BDI Sonntag	15	35	16	18	19	17	27	16	13	20	
BDI Mittwoch	28	35	35	24	39	32	27	29	36	35	

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Ecstasy											
BDI Sonntag	15	35	16	18	19	17	27	16	13	20	
BDI Mittwoch	28	35	35	24	39	32	27	29	36	35	
Differenz	13	0	19	6	20	15	0	13	23	15	

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Ecstasy											
BDI Sonntag	15	35	16	18	19	17	27	16	13	20	
BDI Mittwoch	28	35	35	24	39	32	27	29	36	35	
Differenz	13	0	19	6	20	15	0	13	23	15	
Vorzeichen	+	XX	+	+	+	+	XX	+	+	+	

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Ecstasy											
BDI Sonntag	15	35	16	18	19	17	27	16	13	20	
BDI Mittwoch	28	35	35	24	39	32	27	29	36	35	
Differenz	13	0	19	6	20	15	0	13	23	15	
Vorzeichen	+	XX	+	+	+	+	XX	+	+	+	
Rang	2.5		6	1	7	4.5		2.5	8	4.5	sum

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Ecstasy											
BDI Sonntag	15	35	16	18	19	17	27	16	13	20	
BDI Mittwoch	28	35	35	24	39	32	27	29	36	35	
Differenz	13	0	19	6	20	15	0	13	23	15	
Vorzeichen	+	XX	+	+	+	+	XX	+	+	+	
Rang	2.5		6	1	7	4.5		2.5	8	4.5	sum
Positive Ränge	2.5		6	1	7	4.5		2.5	8	4.5	36
Negative Ränge											0
Alkohol	...	...	...	...	...	... ...	...	...	...	...	...

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Teststatistik berechnen

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Teststatistik berechnen

$T_E = min(36, 0) = 0$

Signifikanz bestimmen:

$\overline{T_E} = \frac{8*(8+1)}{4} = 18$

$SE_{\overline{T_E}} = \sqrt{\frac{8*(8+1)*(8+2)}{24}} = 7.14$ $z_E = \frac{T_E - \overline{T_E}}{SE_{\overline{T_E}}} = \frac{0-18}{7.14} = -2.52$

$z_A = \ldots \ddot{U}bungsgelegenheit \cdots = -1.99$

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test Beispiel

Teststatistik berechnen

$T_E = min(36, 0) = 0$

Signifikanz bestimmen:

$\overline{T_E} = \frac{8*(8+1)}{4} = 18$

$SE_{\overline{T_E}} = \sqrt{\frac{8*(8+1)*(8+2)}{24}} = 7.14$ $z_E = \frac{T_E - \overline{T_E}}{SE_{\overline{T_E}}} = \frac{0-18}{7.14} = -2.52$

$z_A = \ldots \ddot{U}bungsgelegenheit \cdots = -1.99$

Interpretation

Sowohl z_E als auch z_A liegen über 1.96 $\rightarrow$ H_0 für beide abgewiesen $\rightarrow$ Differenz zwischen Sonntag und Mittwoch ist für beide signifikant

Wilcoxons Vorzeichen-Rang Test in *R*

```
sundayBDI<-c(16, 15, 20, 15, 16, 13, 14, 19, 18, 18, 15, 35, 16, 18, 19, 17,
    27, 16, 13, 20)
wedsBDI<-c(5, 6, 30, 8, 9, 7, 6, 17, 3, 10, 28, 35, 35, 24, 39, 32, 27, 29,
    36, 35)

drug<-gl(2, 10, labels = c("Alcohol", "Ecstasy"))
drugData<-data.frame(drug, sundayBDI, wedsBDI)
alcoholData<-subset(drugData, drug == "Alcohol")
ecstasyData<-subset(drugData, drug == "Ecstasy")
wilcox.test(alcoholData$wedsBDI, alcoholData$sundayBDI,  paired = TRUE,
    correct= FALSE, exact=FALSE)
wilcox.test(ecstasyData$wedsBDI, ecstasyData$sundayBDI, paired = TRUE,
    correct= FALSE, exact=FALSE)

        Wilcoxon signed rank test
data:  alcoholData$wedsBDI and alcoholData$sundayBDI
V = 8, p-value = 0.04657
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0

        Wilcoxon signed rank test
data:  ecstasyData$wedsBDI and ecstasyData$sundayBDI
V = 36, p-value = 0.01151
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

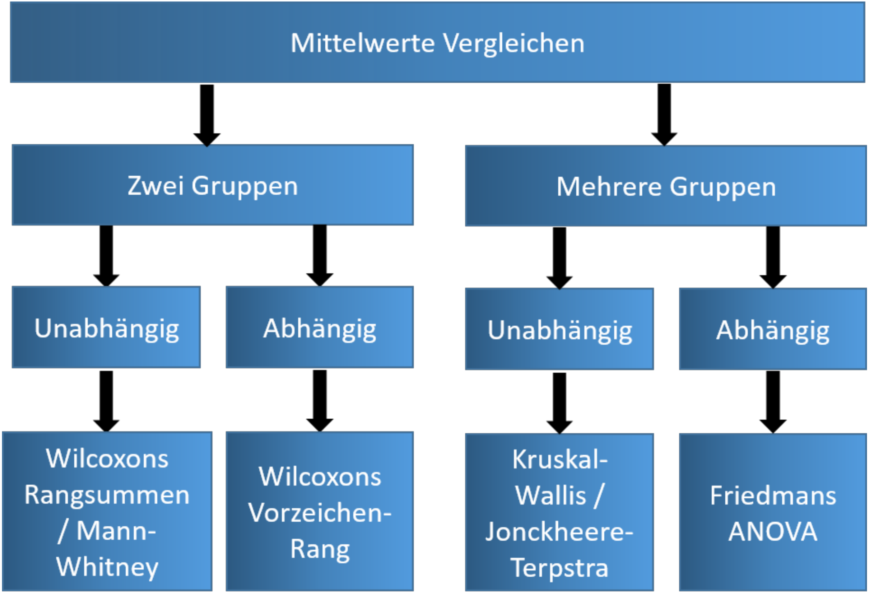
Effektstärke

Folgendes Skript generiert *r* für beide Arten von Wilcoxmodell

```
rFromWilcox<-function(wilcoxModel, n){
        z<- qnorm(wilcoxModel$p.value/2)
        r<- z/ sqrt(N)
        cat(wilcoxModel$data.name, "Effect Size, r = ", r)
}
```

Interpretation Siehe Vorlesung zu Korrelation

Nichtparametrische Testverfahren



Kruskal-Wallis Test

Kruskal, W.H. & Wallis, W.A. (1952): *Use of ranks in one-criterion variance analysis*

- ANOVA relativ robust und Welchs F hilft bei heterogenen Varianzen
  Welch, B.L. (1951): *On the comparison of several mean values: An alternative approach*
- Kruskal-Wallis H als nichtparametrische Alternative für unabhängige ANOVA mittels Ranking
- Omnibustest
- *Nullhypothese* : Die Gruppen sind nicht signifikant verschieden. Gilt bei $H < H_{kr}$
- $H = \frac{12}{n*(n+1)} * \sum(\frac{Rangsumme_{group}^2}{n_{group}}) - 3 * (n+1)$ Rangsumme manchmal als R abgekürzt
- H_{kr} folgt χ^2-Verteilung mit $df = Gruppenanzahl - 1$

Kruskal-Wallis Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor (wie bei ANOVA)

Autor 1	Autor 2	Autor 3
30	40	10
35	35	25
45	50	5

Kruskal-Wallis Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor (wie bei ANOVA)

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1

Kruskal-Wallis Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor (wie bei ANOVA)

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
sum	17.5

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
sum	21.5

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
sum	6

$$H = \frac{12}{n*(n+1)} * \sum(\frac{Rangsumme^2_{group}}{n_{group}}) - 3*(n+1)$$

Kruskal-Wallis Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor (wie bei ANOVA)

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
sum	17.5

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
sum	21.5

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
sum	6

$H = \frac{12}{n*(n+1)} * \sum(\frac{Rangsumme_{group}^2}{n_{group}}) - 3 * (n+1)$

$H = \frac{12}{9*(10)} * (\frac{306.25}{3} + \frac{462.25}{3} + \frac{36}{3}) - 3 * (10) \approx$
$0.133 * (102.083 + 154.083 + 12) - 30 \approx 0.133 * 268.166 - 30 \approx 5.666$

Kruskal-Wallis Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor (wie bei ANOVA)

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
sum	17.5

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
sum	21.5

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
sum	6

$H = \frac{12}{n*(n+1)} * \sum(\frac{Rangsumme_{group}^2}{n_{group}}) - 3*(n+1)$

$H = \frac{12}{9*(10)} * (\frac{306.25}{3} + \frac{462.25}{3} + \frac{36}{3}) - 3*(10) \approx$

$0.133 * (102.083 + 154.083 + 12) - 30 \approx 0.133 * 268.166 - 30 \approx 5.666$

$H = 5.666 < 5.99 = H_{kr}(2) \rightarrow$ Nullhypothese bestätigt $\rightarrow$ Es existieren keine signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen.

Kruskal-Wallis Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor (wie bei ANOVA)

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
sum	17.5

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
sum	21.5

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
sum	6

$H = \frac{12}{n*(n+1)} * \sum(\frac{Rangsumme^2_{group}}{n_{group}}) - 3*(n+1)$

$H = \frac{12}{9*(10)} * (\frac{306.25}{3} + \frac{462.25}{3} + \frac{36}{3}) - 3*(10) \approx$ $0.133 * (102.083 + 154.083 + 12) - 30 \approx 0.133 * 268.166 - 30 \approx 5.666$

$H = 5.666 < 5.99 = H_{kr}(2) \rightarrow$ Nullhypothese bestätigt $\rightarrow$ Es existieren keine signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen. ANOVA kam hier auf signifikante Unterschiede.

Kruskal-Wallis Test in *R*

```
titlelength<-c(30,35,45,40,35,50,10,25,5)
group<-gl(3,3,labels=c("autor1","autor2","autor3"))
df<-data.frame(group,titlelength)
kruskal.test(titlelength~group, data=df)


        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  titlelength by group
Kruskal-Wallis chi-squared = 5.8039, df = 2, p-value = 0.05492

# Wenn p<0.05 existieren signifikante Unterschiede.


# Bzgl der Differenz zum Beispiel: Rundungsfehler erklären teilweise
(12/(9*10) * (17.5^2/3 + 21.5^2/3 + 12)) - (3 * (9+1)) = 5.7556

Wo die restliche Differenz herkommt, weiß ich im Moment nicht.
```

Wiederholung Post Hoc Tests

Problem: Omnibus & Familienbezogener Fehler
Lösung:

Wiederholung Post Hoc Tests

Problem: Omnibus & Familienbezogener Fehler
Lösung:Kontrastierung & Post Hoc Tests

Post Hoc Tests

Siegel, S. & Castellan,N.J. (1988): *Nonparametric statistics for the behavioural science*

- Post-Hoc Test für nichtparametrische Daten
- Grundidee: Vergleiche für alle Paare der Gruppen die Differenz der gemittelten Ränge mit dem Zufallsgrenzwert.
  $Differenz > KritischerWert \rightarrow Signifikant$
- $diff_{kr} = z_{\frac{\alpha}{k*(k-1)}} * \sqrt{\frac{n*(n+1)}{12} * (\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v})}$ mit $k =$ Anzahl der Gruppen
- $diff_{kr}$ ist bei gleichen Gruppengrößen wiederverwendbar, sonst für jeweils Gruppen u und v nochmal berechnen

Beispiel Post Hoc Tests

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
mean	5.833

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
mean	7.167

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
mean	2

Beispiel Post Hoc Tests

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
mean	5.833

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
mean	7.167

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
mean	2

Paar	R1	R2	|R1-R2|
A1-A2	5.833	7.167	1.334
A2-A3	7.167	2	5.167
A1-A3	5.833	2	3.833

$$diff_{kr} = z_{\frac{\alpha}{k*(k-1)}} * \sqrt{\frac{n*(n+1)}{12} * \left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}\right)} = z_{\frac{0.05}{3*(2)}} * \sqrt{\frac{9*(9+1)}{12} * \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)} =$$

$z_{0.0083} * \sqrt{5} = 2.4 * 2.236 \approx \underline{5.3664}$ $z_{0.0083} \rightarrow$ z-Tabelle smaller portion

Beispiel Post Hoc Tests

Autor 1	Rang
30	4
35	5.5
45	8
mean	5.833

Autor 2	Rang
40	7
35	5.5
50	9
mean	7.167

Autor 3	Rang
10	2
25	3
5	1
mean	2

Paar	R1	R2	|R1-R2|
A1-A2	5.833	7.167	1.334
A2-A3	7.167	2	5.167
A1-A3	5.833	2	3.833

$diff_{kr} = z_{\frac{\alpha}{k*(k-1)}} * \sqrt{\frac{n*(n+1)}{12} * (\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v})} = z_{\frac{0.05}{3*(2)}} * \sqrt{\frac{9*(9+1)}{12} * (\frac{1}{3} + \frac{1}{3})} =$ $z_{0.0083} * \sqrt{5} = 2.4 * 2.236 \approx \underline{5.3664}$ $z_{0.0083} \rightarrow$ z-Tabelle smaller portion

$\rightarrow$ Keine der Differenzen überschreitet den Kritischen Wert $\rightarrow$ Alle unsignifikant

Post Hoc Tests in *R*

```
library(pgirmess)
titlelength<-c(30,35,45,40,35,50,10,25,5)
group<-gl(3,3,labels=c("autor1","autor2","autor3"))
df<-data.frame(titlelength,group)
kruskalmc(titlelength~group, data=df)
```

```
Multiple comparison test after Kruskal-Wallis
p.value: 0.05
Comparisons
                     obs.dif    critical.dif difference
autor1-autor2 1.3333333333333 5.3531015691555      FALSE
autor1-autor3 3.8333333333333 5.3531015691555      FALSE
autor2-autor3 5.1666666666667 5.3531015691555      FALSE
```

Zielgerichtete Post Hoc Tests

Statt Kreuzvergleich lieber Vergleich gegen eine Kontrollgruppe (Bspw A2)
Reduziert Einfluss auf α

Paar	R1	R2	|R1-R2|
A1-A2	5.833	7.167	1.334
A2-A3	7.167	2	5.167

$diff_{kr} = 5.011929$

Zielgerichtete Post Hoc Tests

Statt Kreuzvergleich lieber Vergleich gegen eine Kontrollgruppe (Bspw A2)
Reduziert Einfluss auf α

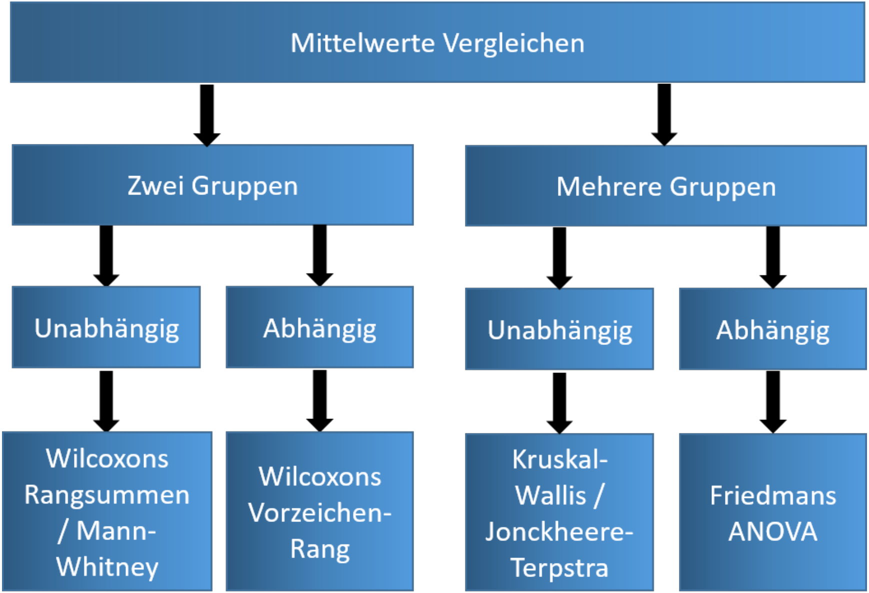
Paar	R1	R2	|R1-R2|
A1-A2	5.833	7.167	1.334
A2-A3	7.167	2	5.167

$diff_{kr} = 5.011929$

```
library(pgirmess)
titlelength<-c(30,35,45,40,35,50,10,25,5)
group<-gl(3,3,labels=c("autor1","autor2","autor3"))
df<-data.frame(titlelength,group)
df$group<-factor(df$group, levels=levels(df$group)[c(2,1,3)])
kruskalmc(titlelength~group, data=df, cont='two-tailed')
#two-tailed macht 1. Gruppe zur Kontr.gruppe, factor(.. hat A2 nach vorn sortiert

Multiple comparison test after Kruskal-Wallis, treatments vs control (two-tailed)
p.value: 0.05
Comparisons
              obs.dif critical.dif difference
autor2-autor1 1.333333     5.011929      FALSE
autor2-autor3 5.166667     5.011929       TRUE      <----
```

Nichtparametrische Testverfahren



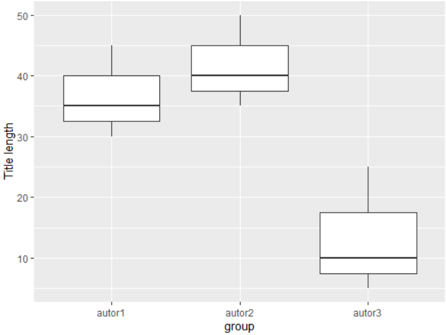
Jonckheere-Terpstra Test

- kurz: Jonckheere-Test
- Omnibus-Test wie Kruskal-Wallis aber nicht auf Unterschied sondern auf Trend
- *Nullhypothese* : Es existiert kein signifikanter Trend
- $R \rightarrow$ Trend signifikant wenn $p < 0.05$
- Berechnung der Trendrichtung mit Gruppenmittelwerten

Jonckheere-Terpstra Test

```
library(clinfun)
titlelength<-c(30,35,45,40,35,50,10,25,5)
group<-gl(3,3,labels=c("autor1","autor2","autor3"))
df1<-data.frame(titlelength,group)
jonckheere.test(df1$titlelength, as.numeric(df1$group))
boxplot<-ggplot(df1, aes(group, titlelength))
boxplot + geom_boxplot()+labs(y="Title length")
```

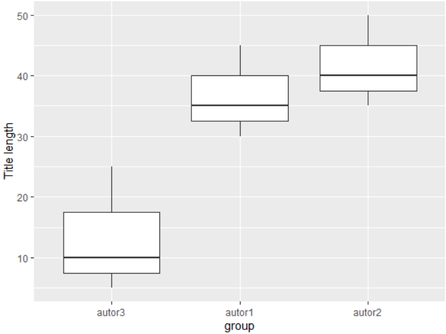
```
JT = 6.5, p-value = 0.1198
```



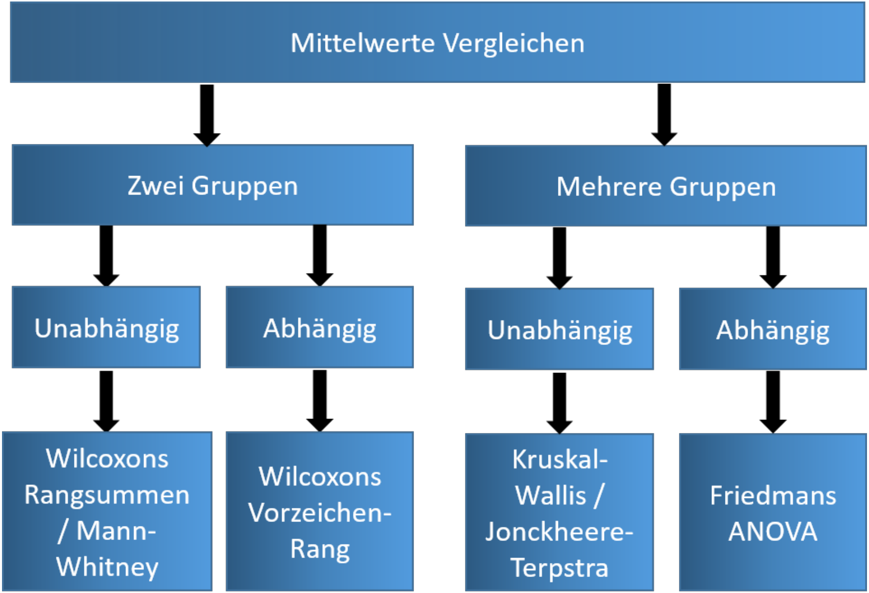
Jonckheere-Terpstra Test

```
library(clinfun)
titlelength<-c(30,35,45,40,35,50,10,25,5)
group<-gl(3,3,labels=c("autor1","autor2","autor3"))
df1<-data.frame(titlelength,group)
df2$group<-factor(df1$group, levels=levels(df1$group)[c(3,1,2)]) #Umsortieren
jonckheere.test(df2$titlelength, as.numeric(df2$group))
boxplot<-ggplot(df2, aes(group, titlelength))
boxplot + geom_boxplot()+labs(y="Title length")
```

```
JT = 24.5, p-value = 0.01451
```



Nichtparametrische Testverfahren



Friedmans ANOVA

Friedman, M. (1937): *The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance*

- Friedmans ANOVA als nichtparametrische Alternative für abhängige ANOVA mittels Ranking
- Omnibustest
- Ranking pro Person, jede Person beginnt bei 1
- *Nullhypothese* : Die Gruppenunterschiede pro Person sind nicht signifikant. Gilt bei $F_r < F_{rkr}$

Friedmans ANOVA

Friedman, M. (1937): *The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance*

- Friedmans ANOVA als nichtparametrische Alternative für abhängige ANOVA mittels Ranking
- Omnibustest
- Ranking pro Person, jede Person beginnt bei 1
- *Nullhypothese* : Die Gruppenunterschiede pro Person sind nicht signifikant. Gilt bei $F_r < F_{rkr}$
- $F_r = \frac{12}{n_{group} * k(k+1)} * \sum Rangsumme^2_{group} - 3n_{group} * (k+1)$ mit $k = Gruppenanzahl$

Friedmans ANOVA

Friedman, M. (1937): *The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance*

- Friedmans ANOVA als nichtparametrische Alternative für abhängige ANOVA mittels Ranking
- Omnibustest
- Ranking pro Person, jede Person beginnt bei 1
- *Nullhypothese* : Die Gruppenunterschiede pro Person sind nicht signifikant. Gilt bei $F_r < F_{rkr}$
- $F_r = \frac{12}{n_{group} * k(k+1)} * \sum Rangsumme^2_{group} - 3n_{group} * (k+1)$ mit $k = Gruppenanzahl$ Es wird oft die Stichprobengröße n notiert (auch Field verwendet N), aber es wird mit n_{group} gerechnet
- F_r folgt χ^2-Verteilung mit $df = Gruppenanzahl - 1$ bei $n_{group} >= 10$

Friedmans ANOVA Beispiel

Zeichenlänge
des Dokumententitels pro Autor beim ersten, zweiten und dritten Dokument

Person	D1	D2	D3
Autor 1	30	35	45
Autor 2	40	35	50
Autor 3	10	25	5

Friedmans ANOVA Beispiel

Zeichenlänge
des Dokumententitels pro Autor beim ersten, zweiten und dritten Dokument

Person	D1	D2	D3
Autor 1	30	35	45
Autor 2	40	35	50
Autor 3	10	25	5

$\rightarrow$ *Rangify* $\rightarrow$

Person	D1	D2	D3
Autor 1	1	2	3
Autor 2	2	1	3
Autor 3	2	3	1
sum	5	6	7

Friedmans ANOVA Beispiel

Zeichenlänge
des Dokumententitels pro Autor beim ersten, zweiten und dritten Dokument

Person	D1	D2	D3
Autor 1	30	35	45
Autor 2	40	35	50
Autor 3	10	25	5

$\rightarrow$ *Rangify* $\rightarrow$

Person	D1	D2	D3
Autor 1	1	2	3
Autor 2	2	1	3
Autor 3	2	3	1
sum	5	6	7

$F_r = (\frac{12}{n_{group} * k(k+1)} * \sum Rangsumme^2_{group}) - 3n_{group} * (k+1) =$
$(\frac{12}{36} * 110) - 36 = \underline{0.667}$ $F_r = 0.667 < F_{rkr} = 5.99 \rightarrow H_0$ kann nicht abgewiesen werden $\rightarrow$

Friedmans ANOVA Beispiel

Zeichenlänge
des Dokumententitels pro Autor beim ersten, zweiten und dritten Dokument

Person	D1	D2	D3
Autor 1	30	35	45
Autor 2	40	35	50
Autor 3	10	25	5

→ *Rangify* →

Person	D1	D2	D3
Autor 1	1	2	3
Autor 2	2	1	3
Autor 3	2	3	1
sum	5	6	7

$F_r = (\frac{12}{n_{group} * k(k+1)} * \sum Rangsumme^2_{group}) - 3n_{group} * (k+1) =$
$(\frac{12}{36} * 110) - 36 = \underline{0.667}$ $F_r = 0.667 < F_{rkr} = 5.99 \rightarrow H_0$ kann nicht abgewiesen werden →Unterschiede nicht signifikant

Friedmans ANOVA *R*-Skript

```
D1<-c(30,40,10)
D2<-c(35,35,25)
D3<-c(45,50,5)
df<-data.frame(D1, D2, D3)

keinefehlwerte<-na.omit(df) # Fehlwerte verwirren den Algorithmus
matrix<-as.matrix(keinefehlwerte) # Algorithmus nimmt nur Matrix als Input
friedman.test(matrix)

        Friedman rank sum test

data:  matrix
Friedman chi-squared = 0.66667, df = 2, p-value = 0.7165
# p<0.05 -> Unterschied signifikant
```

Post Hoc Tests

Siegel, S. & Castellan,N.J. (1988): *Nonparametric statistics for the behavioural science*

- Im Prinzip wie bei Kruskal Wallis

Post Hoc Tests in *R*

```
library(pgirmess)
D1<-c(30,40,10)
D2<-c(35,35,25)
D3<-c(45,50,5)

df<-data.frame(D1, D2, D3)

keinefehlwerte<-na.omit(df) # Fehlwerte verwirren den Algorithmus
matrix<-as.matrix(keinefehlwerte) # Algorithmus nimmt nur Matrix als Input
friedmanmc(matrix)


Multiple comparisons between groups after Friedman test
p.value: 0.05
Comparisons
    obs.dif critical.dif difference
1-2       1     5.864029      FALSE
1-3       2     5.864029      FALSE
2-3       1     5.864029      FALSE
```

Überblick

Effektstärke bei Friedman und Kruskal-Wallis

- Umrechnung von χ^2 zu r problematisch mit $df > 1$
- Effektstärke bei Omnibus eher wenig hilfreich
- Paarweise Wilcoxon Tests (abhängig / unabhängig beachten) und Berechnung von r damit

Zusammenfassung

- Nichtparametrische Verfahren erlauben die Arbeit mit fiesen Daten
  - Mediane, Effektstärke und Ranges mit angeben
  - Boxplot
- Wilcoxons Rangsummen / Mann-Whitney
  - beide wohl austauschbar
  - Entspricht unabhängigem t-Test
- Wilcoxons Vorzeichen-Rang
  - Entspricht abhängigem t-Test
- Kruskal-Wallis
  - Entspricht unabhängiger ANOVA
  - Post Hoc Tests zur Lokalisierung der Unterschiede
- Jonckheere-Terpstra
  - Entspricht unabhängiger ANOVA aber berücksichtigt Trends
  - Trendrichtung mittels Gruppenmittelwerten
  - Effektstärke → paarweise Wilcoxon-Tests
- Friedmans ANOVA
  - Entspricht unabängiger ANOVA
  - Post Hoc Tests zur Lokalisierung der Unterschiede
  - Effektstärke → paarweise Wilcoxon-Tests