ADS: Algorithmen und Datenstrukturen

Teil 5

Uwe Quasthoff

Institut für Informatik
Abteilung Automatische Sprachverarbeitung
Universität Leipzig

14.11.2017

[Letzte Aktualisierung: 01/12/2017, 13:07]

Quick-Sort I

[Hoare, 1962]; auch als *Partition-Exchange-Sort* bezeichnet

Sortieren durch Austauschen mittels Divide-and-Conquer:

- Bestimmung eines Pivot-Elementes $x \in L$
- Zerlegung der Liste in zwei Teillisten L_1 und L_2 durch Austauschen, so daß linke (rechte) Teilliste L_1 (L_2) nur Schlüssel enthält, die kleiner (größer oder gleich) als x sind

$$< - - - L_1 - - - > x < - - - L_2 - - - >$$

- Rekursive Sortierung der Teillisten, bis nur noch Listen der Länge 1 verbleiben

Quick-Sort II

Realisierung der Zerlegung:

- Duchlauf des Listenbereiches von links über Indexvariable i, solange bis $L[i] \geq x$ vorliegt
- Duchlauf des Listenbereiches von rechts über Indexvariable j, solange bis $L[j] \leq x$ vorliegt
- Austausch von $L[i]$ und $L[j]$
- Fortsetzung der Durchläufe bis $i > j$ gilt

Quick-Sort Algorithmus

Algorithmus `qsort(A,l,r)` sortiert die `A[l]` bis `A[r]`:

```
qsort(A,l,r) {
  if(r<=l) return                    // Fertig?
  i=l; j=r                           // Initialisieren:
  piv = A[(l+r)/2]                   // Pivot-Element
  do {                               // Schleife
       while(A[i]<piv) { i++ }       // Links suchen
       while(A[j]>piv) { j-- }       // Rechts suchen
       if(i<=j) {
           swap(A[i],A[j])           // Tausche
           i++; j--
       }
  } while (i<=j)                     // Schleifenende
  qsort(A,l,j)                       // Rekursive Aufrufe
  qsort(A,i,r)
}
```

Quick-Sort Beispiel

Berechne `Q(A,l,r)`

$$67, 58, 23, 44, 91, 11, 30, 54$$

$$\underbrace{30, 11, 23}_{Q(A,l,j)}, 44, \underbrace{91, 58, 67, 54}_{Q(A,i,r)}$$

Quick-Sort: Eigenschaften

- *In-situ*-Verfahren
- nicht stabil
- Kosten am geringsten, wenn Teillisten stets gleichlang sind, d.h. wenn das Pivot-Element dem mittleren Schlüsselwert (Median) entspricht
- Halbierung der Teillisten bei jeder Zerlegung
  $\rightarrow$ Kosten $O(n \log n)$
- Worst-Case: Liste der Länge k wird in Teillisten der Längen 1 und $k-1$ zerlegt (z.B. bei bereits sortierter Eingabe und Wahl des ersten oder letzten Elementes als Pivot-Element)
  $\rightarrow$ Kosten $O(n^2)$

Quick-Sort: Eigenschaften

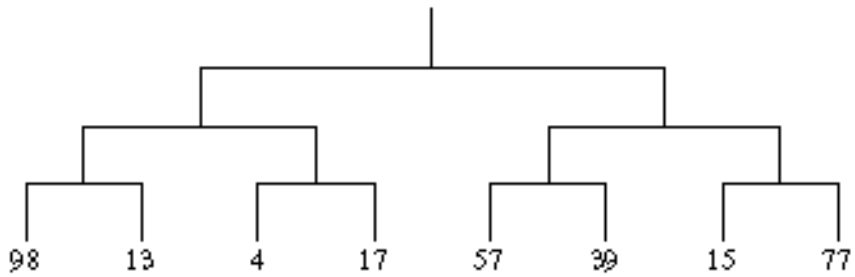
Wahl des Pivot-Elementes ist von entscheidender Bedeutung. Sinnvolle Methoden sind:

- mittleres Element
- Mittlerer Wert von k Elementen (z.B. $k = 3$) $\rightarrow$ bei fast allen Eingabefolgen können Kosten in der Größenordnung $n \log n$ erzielt werden
- Zahlreiche Variationen von Quick-Sort
  (z.B. Behandlung von Duplikaten, Umschalten auf elementares Sortierverfahren für kleine Teillisten)

Turnier-Sortierung

Maximum- bzw. Minimum-Bestimmung einer Sortierung analog zur Siegerermittlung bei Sportturnieren mit KO-Prinzip

- paarweise Wettkämpfe zwischen Spielern/Mannschaften
- nur Sieger kommt weiter
- Sieger des Finales ist Gesamtsieger
- Zugehörige Auswahlstruktur ist ein binärer Baum



Turnier-Sortierung: Zweiter Sieger

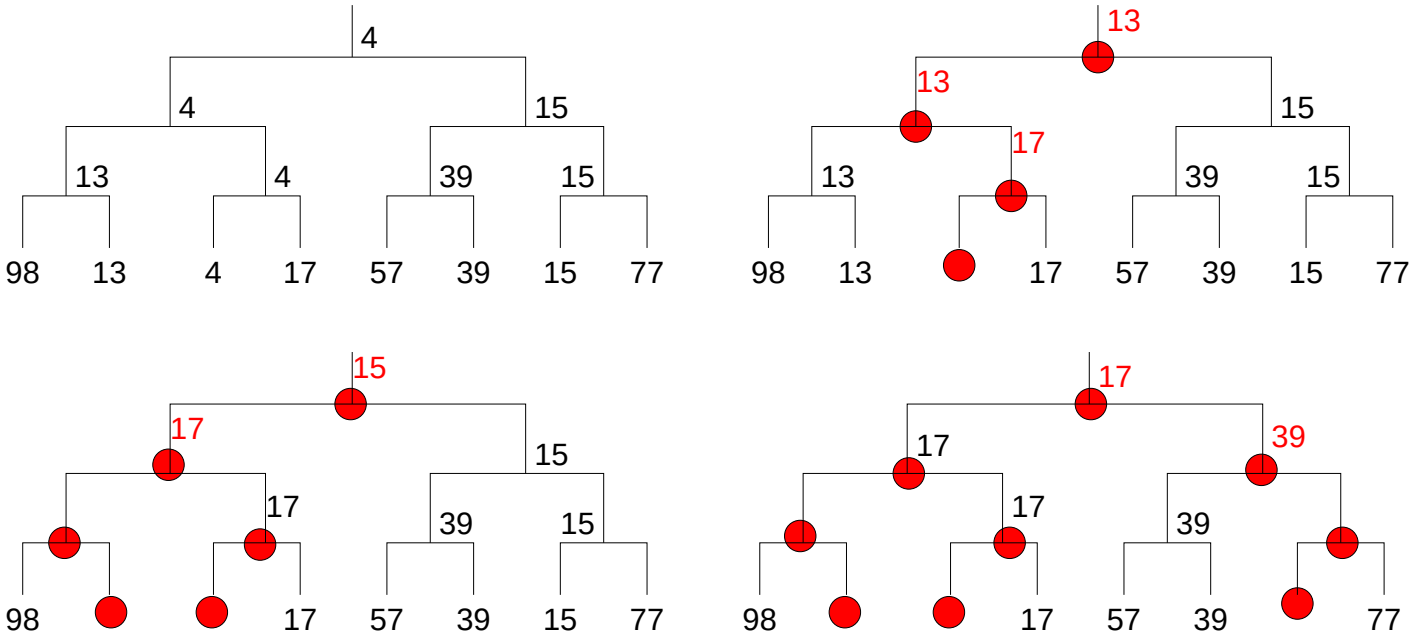
- Aber: Der zweite Sieger (das zweite Element der Sortierung) ist nicht automatisch der Verlierer im Finale
- Stattdessen: Neuaustragung des Wettkampfes auf dem Pfad des Siegers (ohne seine Beteiligung)
- Pfad für Wurzelelement hinabsteigen und Element jeweils entfernen
- Neubestimmung der Sieger

Turnier-Sortierung: Algorithmus

Algorithmus `TOURNAMENT_SORT`
Spiele ein KO-Turnier und erstelle dabei einen binären Auswahlbaum

```
FOR I := 1 TO n DO
   Gib Element an der Wurzel aus
   Steige Pfad des Elementes an der Wurzel hinab und loesche es
   Steige Pfad zurueck an die Wurzel und spiele ihn dabei neu aus
END
```

Turnier-Sortierung: Beispiel weiter



Turnier-Sortierung: Aufwand

- der Einfachheit halber $n = 2^k$
- Anzahl Vergleiche für initialen Auswahlbaum:

$$2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1 = 2^k - 1 = n - 1$$

- pro Durchlauf Absteigen und Aufsteigen im Baum über k Stufen: $2k = 2 \log_2 n$ Vergleiche
- gesamter Zeitaufwand

$$T(n) = n - 1 + 2k(n - 2) \in O(n \log n)$$

- Speicherbedarf für Auswahlbaum

$$2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1 = 2^{k+1} - 1 = 2n - 1$$

Heap-Sort

(Williams, 1964)

Reduzierung des Speicherplatzbedarfs gegenüber Turnier-Sort, indem "Löcher" im Auswahlbaum umgangen werden

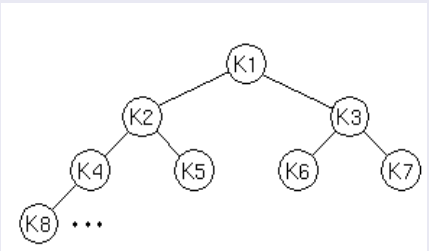
Heap (Halde):

- binärer Auswahlbaum mit der Eigenschaft, dass sich das größte/kleinste Element jedes Teilbaumes in dessen Wurzel befindet
- $\rightarrow$ Baumwurzel enthält größtes/kleinstes Element

Heap-Sort I: Vorbereitung

1. Repräsentation der Schlüsselfolge $K_1, K_2, K_3, \ldots$

in einem **fast-vollständigen** Binärbaum:



2. Herstellen der Heap-Eigenschaft:

ausgehend von Blättern aufwärts durch *Absenken* von Knoteninhalten, welche kleiner sind als die in einem der direkten Nachfolgerknoten

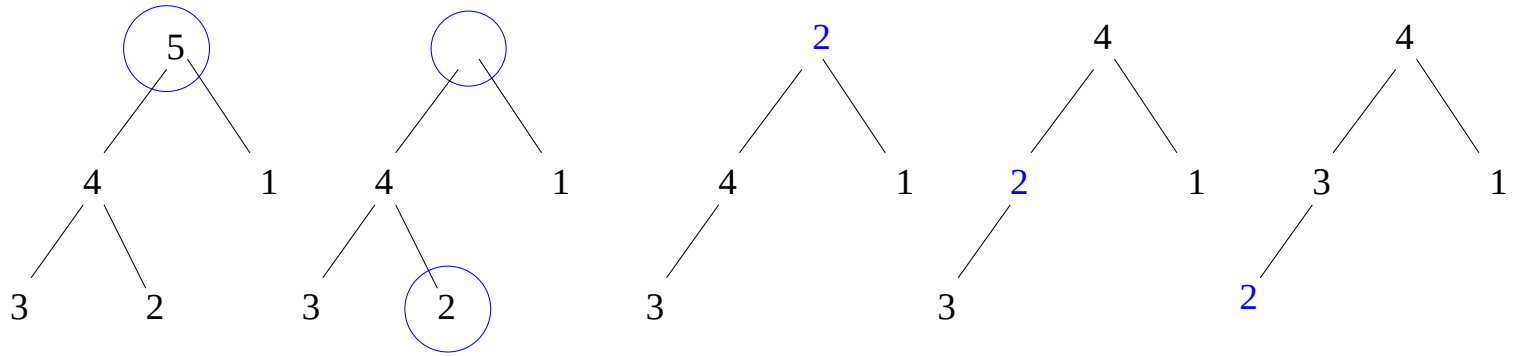
Algorithmus *für das Absenken eines (!) Knotens* i: Falls der Schlüssel von i kleiner ist als der Schlüssel eines Kindes von i, vertausche die Schlüssel von i und dem Kind mit grösstem Schlüssel und senke den Schlüssel dieses Kindknotens ab.

Heap-Sort II: Durchführung

3. Ausgabe der sortierten Folge:

1. Ausgabe des Wurzelelementes
2. Ersetzen des Wurzelelementes mit dem am weitesten rechts stehenden Element der untersten Baumebene
3. Wiederherstellen der Heap-Eigenschaft durch "Absenken" des Wurzelelementes
4. Ausgabe der neuen Wurzel usw. (solange bis Baum nur noch 1 Element enthält)

Heap-Sort: Beispiel



Heap-Sort: Implementierung

Effiziente Realisierbarkeit mit Arrays (hier: array A ist 1-basiert)

- Stelle Binärbaum in array A dar, so dass
  - Wurzelelement = erstes Feldelement $A[1]$
  - direkter Vaterknoten von $A[i]$ ist $A[\lfloor i/2 \rfloor]$
- Heap-Eigenschaft ist dann $A[i] \leq A[\lfloor i/2 \rfloor]$ für alle $1 \leq i \leq n$

Algorithmus (Heap-Sort)

Eingabe: unsortiertes Array $A[1..n]$, sei $m := n$

1. Stelle Heapeigenschaft für A her, in dem alle Knoten $i \leq n/2$ in umgekehrter Reihenfolge abgesenkt werden, d.h.
   `for` $i := n/2$ `downto` 1 { Senke Knoten $A[i]$ ab }
2. Iteriere solange $m > 1$:
   - Vertausche $A[1]$ und $A[m]$ und reduziere m um 1
   - Senke $A[1]$ ab, um Heapeigenschaft für Teilarray $A[1..m]$ herzustellen

Ausgabe: $A[1..n]$ ist sortiert

Heap Sort Beispiel

Ausgangsliste 57, 16, 62, 30, 80, 7, 21, 78, 41
Heap-Darstellung 80, 78, 62, 57, 16, 7, 21, 30, 41

80	78	62	57	16	7	21	30	41
41	78		57					80
78	57		41				30	|80
30							|78	80

Heap-Sort: Aufwand I

- Für $2^{k-1} \leq n < 2^k$ gilt:
  - Baum hat die Höhe k mit $k = 1, 2, ...$
  - Anzahl der Knoten auf Stufe i $(0 \leq i \leq k-1)$ ist 2^i
- Kosten der Prozedur "Absenken"
  - Schleife wird höchstens $h-1$ mal ausgeführt (h ist Höhe des Baumes mit Wurzelelement i)
  - Zeitbedarf $O(h)$ mit $h \leq k$

Heap-Sort: Aufwand II

- Kosten zur Erstellung des anfänglichen Heaps
  - Absenken nur für Knoten mit nicht-leeren Unterbäumen (Stufe $k-2$ bis Stufe 0)
  - Kosten für einen Knoten auf der Stufe $k-2$ betragen höchstens c Einheiten, die Kosten für die Wurzel $(k-1)c$ Einheiten.
  - max. Kosten insgesamt

$$
\begin{aligned}
&2^{k-2} \times 1c + 2^{k-3} \times 2c + \ldots + 2^0 \times (k-1)c = \\
=&\sum_i c \cdot i \cdot 2^{k-i-1} = c2^{k-1} \sum_i 2^{-i} i < cn \sum_i i2^{-i} \\
<&2nc
\end{aligned}
$$

  - Gesamtkosten $O(n)$
- Kosten der Sortierung: $n-1$ Aufrufe von Sink mit Kosten von höchstens $O(k) = O(\log_2 n)$
- maximale Gesamtkosten von HEAPSORT: $O(n) + O(n \log_2 n) = O(n \log_2 n)$

Sortieren durch Streuen und Sammeln

(Distribution-Sort, Bucket-Sort)

- Lineare Sortierkosten $O(n)$
- beschränkt auf kleine und zusammenhängende Schlüsselbereiche $1..m$
- Die Verteilung der Schlüsselwerte wird für alle Werte bestimmt und daraus die relative Position jedes Eingabewertes in der Sortierfolge bestimmt

Algorithmus

- Hilfsfeld COUNT [1..m]
- Bestimmen der Häufigkeit des Vorkommens für jeden der m möglichen Schlüsselwerte (*Streuen*)
- Bestimmung der akkumulierten Häufigkeiten in COUNT
- *Sammeln* von $i = 1$ bis m: falls COUNT[i]>0 wird i-ter Schlüsselwert COUNT[i]-mal ausgegeben

Distribution Sort: Beispiel

Beispiel:

$m = 10$, Feld: 4 0 1 1 3 5 6 9 7 3 8 5 ($n = 12$)

Streuen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	0	2	1	2	1	1	1	1

Sammeln: 0 1 1 3 3 4 5 5 6 7 8 9

Kosten:

- keine Duplikate: Streuen $C_1 n$, Sammeln $C_2 m$
- mit d Duplikaten: Streuen $C_1 n$, Sammeln $C_2(m + d)$

Allgemein:

statt COUNT int[] Liste von Referenzen auf die Einträge zugehörig zum jeweiligen Schlüsselwertes (*Fachs*)

Distribution-Sort: Fachverteilen I

Verallgemeinerung:

Sortierung von k-Tupeln gemäß lexikographischer Ordnung (*Fachverteilen*)

Lexikographische Ordnung:

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ sei Alphabet
mit gegebener Ordnung $a_1 < a_2 < ... < a_n$
die sich wie folgt auf dem Lexikon $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ fortsetzt:

$$v \leq w \iff w = vu \text{ oder}$$
$$v = ua_i u' \text{ und } w = ua_j u'' \text{ mit}$$
$$u, u', u'' \in A^* \text{ und } a_i, a_j \in A \text{ mit } a_i < a_j \ .$$

Die antisymmetrische Relation $\leq$ heißt lexikographische Ordnung.

Distribution-Sort: Fachverteilen II

Sortierung erfolgt in k Schritten:

- Sortierung nach der letzten Stelle
- Sortierung nach der vorletzten Stelle

...

- Sortierung nach der ersten Stelle

Beispiel:

Sortierung nach Postleitzahlen

Weiter verallgemeinerbar:

Sortierung komplexer Datensätze nach mehreren, rangfolgenden Sortierkriterien,
wenn die einzelnen Sortierkriterien die Anforderungen an das einfache Distribution Sort erfüllen