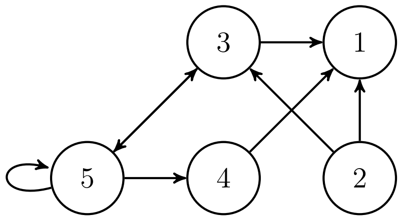
Algorithmen und Datenstrukturen II
SS 2018 – Serie 3

9 (5 Punkte) Knotenbeschreibung

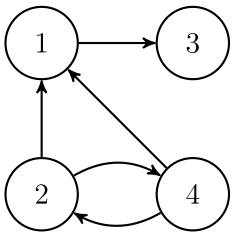
Geben Sie Eingangsgrad, Ausgangsgrad, Vorgänger und Nachfolger aller Knoten für den folgenden Graphen an.



Knoten	Eingangsgrad	Ausgangsgrad	Vorgänger	Nachfolger
1				
2				
3				
4				
5				

10 (3 Punkte) Transitive Hülle

Gegeben sei der Graph

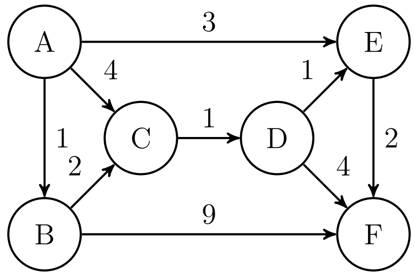


(a) Bestimmen sie die reflexive transitive Hülle mit Hilfe des in der Vorlesung beschriebenen Warshall-Algorithmus. Zeichnen sie den resultierenden Graphen und halten Sie sich eng an das in der Vorlesung vorgestellte Vorgehen. (2 Punkte)

(b) Entfernen Sie genau eine Kante des ursprünglich in a) bearbeiteten Graphen, sodass die Anzahl der mittels Warshall-Algorithmus bestimmten reflexiven transitiven Hüllen maximiert wird und geben Sie die entsprechende Anzahl an. (1 Punkt)
Hinweis: Überlegen Sie genau, welche Eigenschaften das Ergebnis des Warshall-Algorithmus hat.

11 (7 Punkte) Kürzeste Wege

Gegeben sei der folgende gewichtete gerichtete Graph $G = (V, E, w)$.



(a) Benutzen sie den Dijkstra-Algorithmus, um die Längen der kürzesten Pfade von Knoten A zu allen anderen Knoten zu berechnen. Geben sie direkt nach jeder Extraktion eines Knotens aus der Queue die aktuellen Werte $D[A], \ldots, D[F]$ an. Geben sie dann noch diese Werte nach Abschluss der Berechnung an. (3 Punkte)

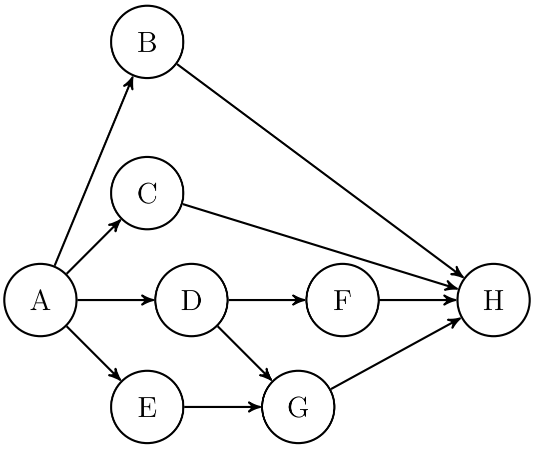
b) Der Graph H entstehe aus G durch Hinzunahme der Kante $e = (E, C)$ mit dem Gewicht $w(e) = -2$. Benutzen sie den Bellman-Ford-Algorithmus, um im Graphen H die Längen der kürzesten Pfade von Knoten A zu allen anderen zu berechnen. In der inneren Schleife werden die Kanten in lexikographischer Ordnung abgearbeitet, also (A, B), (A, C), (A, E), (B, C), (B, F), (C, D), usw.

Geben sie nach jedem Durchlauf der inneren Schleife die jeweils bearbeitete Kante und die aktuellen Werte $D[i]$ für alle Knoten $i \in \{A, \ldots, F\}$ an. Beenden sie ihre Auflistung nach zwei Durchläufen der äusseren Schleife. (3 Punkte)

c) Reduzieren Sie das Gewicht der in b) hinzugefügten Kante um 1. Was ergibt sich für die kürzesten Wege von a zu allen anderen Knoten in H'? Begründen sie ihre Antwort. (1 Punkt)

12 (5 Punkte) Pagerank

Gegeben sei der folgende gerichtete Graph



(a) Berechnen Sie den Pagerank des Graphen wie in der Vorlesung angegeben mit 1 Iteration. Verwenden Sie folgende Formel für Berechnung.

$$R(u) = c \sum_{v \in B_u} \frac{R(v)}{N_v}$$

Gehen Sie davon aus, dass die Knoten vor der ersten Iteration mit Pagerank 1 initialisiert wurden und der Normalisierungsfaktor c den Wert 1 hat.
Beginnen Sie ausgehend von Knoten A, ohne jedoch den Pagerank von A zu Beginn nochmal zu berechnen (Der Pagerank von A wird also nicht mangels eingehender Kanten 0.). Verwenden Sie jeweils den aktuellen Ist-Zustand für die Berechnung, also nicht eventuell vor der Iteration zwischengespeicherte Werte.
Was stellen Sie fest, wenn Sie weitere Iterationen durchführen? (2 Punkte)

(b) Fügen Sie eine Kante (G,A) in den Graphen ein und wiederholen Sie Aufgabe a), wobei Sie die Berechnung bei Knoten A starten.
Was stellen Sie fest, wenn Sie weitere Iterationen durchführen?
Welche beiden im Paper und der Vorlesung vorgestellten Mittel kennen Sie, um dem Effekt gegenzuwirken? (3 Punkte)

13 (5 Punkte) Mengensysteme

Gegeben sind die Menge $E = \{a, b, c, d, e\}$ und die folgenden Mengen von Mengen:

$\mathcal{M}_1 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\} \,\}$
$\mathcal{M}_2 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{c\}, \{d\}, \{a, d, e\} \,\}$
$\mathcal{M}_3 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$
$\mathcal{M}_4 = \{\, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\} \,\}$
$\mathcal{M}_5 = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\} \,\}$

Geben Sie mit `ja/nein` für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, ob $(E, \mathcal{M}_i)$ ein Mengensystem, ein Unabhängigkeitssystem, ein Matroid ist. (3 Punkte)

i	1	2	3	4	5
Mengensystem					
Unabh.System					
Matroid					

Geben Sie für die Fälle aus a), in denen ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid vorliegt, eine Gewichtsfunktion an, bei der der in der Vorlesung beschriebene kanonische Greedy-Algorithmus keine optimale Lösung findet. Die Gewichtsfunktion soll nur Werte in $\{1, 2, 3, 4\}$ annehmen und muss nicht bijektiv (eineindeutig) sein. (2 Punkte)