Algorithmen und Datenstrukturen II
SS 2018 – Serie 2

5 (4 Punkte) Randomisierte Algorithmen

Ein Objekt x_0 einer Fitness-Lanschaft habe die Nachbarn x_1 und x_2. Die Fitnessfunktion f auf diesen Objekten sei gegeben durch

Objekt x	x_0	x_1	x_2
Fitness f(x)	3	2	5

Betrachten Sie einen Metropolis-Walk ausgehend von x_0.

a) (1 P.) Sei zunächst $T = 1$. Geben Sie für $y = x_1$ und $y = x_2$ jeweils die in Schritt 2 bestimmte Wahrscheinlichkeit an, mit der der Move $x_0 \to y$ akzeptiert wird. Berechnen Sie diese auch auf zwei Nachkommastellen gerundet.

b) (1 P.) Sei nun $T = 4$. Geben Sie wieder die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeiten für $x_0 \to x_1$ und $x_0 \to x_2$ an.

c) (2 P.) Wie degneriert ein Metropolis-Walks in den beiden folgenden Grenz-Fällen

   i) die Temperatur wird sehr klein (geht gegen 0.)

   ii) die Temperatur wird sehr gross (geht gegen unendlich.)

   Wählen Sie die jeweils passendste Beschreibung unter den folgenden Begriffen “Uniform Random Walk”, “Non-Uniform Random Walk”, “Gradient-Descent”, “Simulated Annealing”, “Adaptive Walk”. (Erschliessen Sie sich ggf. die Bedeutung der Begriffe.)

6 (5 Punkte) Genetische Algorithmen

Gegeben seien die beiden Individuen x_1 und x_2.
x_1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
x_2: 9, 8 ,7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Rekombinieren Sie die beiden Individuen durch

a) 1 Punkt Crossover mit k=2

b) uniform Crossover mit dem Tauschvektor (*, *, *, -, -, *,-, -, -)
   * = tauschen

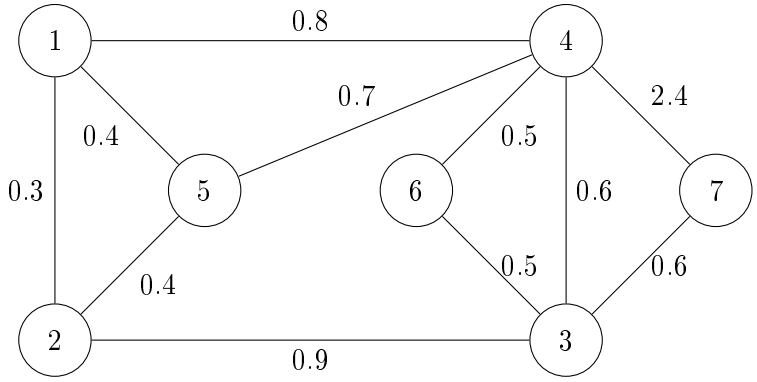
c) elementweise Mittelwertbildung

d) elementweise Konvexe Kombination mit p=0.2

Welche der verwendeten Selektionsmethoden ergeben eindeutige Rekombinationen?

7 (9 Punkte) Ungerichtete Graphen

Gegeben sei der folgende ungerichtete gewichtete Graph G.



a) (4 Punkte) Finden Sie einen minimalen Spannbaum von G mit dem Algorithmus von Kruskal wie in der Vorlesung beschrieben. Geben Sie die nach Gewichten sortierte Liste L der Kanten aus und schreiben Sie die Kanten des Baums in der Reihenfolge hin, in der sie hinzugefügt werden. Wenn eine Kante aus L nicht in den Spannbaum aufgenommen wird, so geben Sie den bereits im Spannbaum enthaltenen Pfad an, der die beiden Knoten der Kante verbindet (z.B. Kante $\{1, 2\}$ könnte durch den Pfad $1 \to 5 \to 2$ schon enthalten sein).

b) (2 Punkte) Ist der in Aufgabenteil a) gefundene minimale Spannbaum eindeutig? Falls ja: begründen Sie dies. Falls nein: wieviele minimale Spannbäume hat G?

c) (3 Punkte) Der Algorithmus von Kruskal werde auf einen nicht-zusammenhängenden gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ mit $n = |V|$ Knoten angewendet und liefere eine Kantenmenge T mit $r = |T|$ Kanten. Ist (V, T) ein Spannbaum von G? Begründen Sie ihre Aussage. Bestimmen Sie die Anzahl der Zusammenhangskomponenten z_k von G.

8 (7 Punkte) Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph sei durch seine Kantenliste gegeben:

$$5, \quad 8, \quad 1,2, \ 1,3, \ 1,4, \ 2,3, \ 3,4, \ 4,2, \ 4,5, \ 5,3,$$

a) Geben sie die Adjazenzmatrix des Graphen an. Folgen Sie genau dem in der Vorlesung vorgestellten Vorgehen. (1 Punkt)

b) Zeichnen sie den Graphen. (1 Punkt)

c) Besitzt dieser Graph einen Hamiltonschen Zyklus? Falls ja: Geben Sie einen an. Falls nein: Begründen Sie dies möglichst kurz. (1 Punkt)

d) Betrachten Sie die Knotenfolgen

(1,2,3,4,5,3,4,2), (1,4,5,3,1), (1,2,3,4,5), (3,4,5,3)

Geben Sie zu jeder Knotenfolge an, ob sie für den gegebenen Graphen

- ein Weg
- ein Spannbaum
- ein Pfad
- ein Zyklus

ist. (4 Punkte)