Vorlesung “Formale Argumentation”

4. Argumentation Frameworks and Semantics – Teil 3

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

25. April 2024
Leipzig

Fixpunkttheorie und Semantiken

- bis jetzt haben wir zwei Semantiken kennengelernt, deren Extensionen spezielle Fixpunkte von $\mathcal{C}_F$ sind

Fixpunkttheorie und Semantiken

- bis jetzt haben wir zwei Semantiken kennengelernt, deren Extensionen spezielle Fixpunkte von $\mathcal{C}_F$ sind
  1. complete extension: Fixpunkt + konfliktfrei
  2. preferred extension: $\subseteq$-maximale complete extension

Fixpunkttheorie und Semantiken

- bis jetzt haben wir zwei Semantiken kennengelernt, deren Extensionen spezielle Fixpunkte von $\mathcal{C}_F$ sind
  1. complete extension: Fixpunkt + konfliktfrei
  2. preferred extension: $\subseteq$-maximale complete extension
- aus DS kennen wir zwei Theoreme, welche sich mit Fixpunkten beschäftigen
  1. Fixpunktsatz von Knaster-Tarski (Existenz)
  2. Fixpunktsatz von Kleene (Berechnung)

Fixpunkttheorie und Semantiken

- bis jetzt haben wir zwei Semantiken kennengelernt, deren Extensionen spezielle Fixpunkte von $\mathcal{C}_F$ sind
  1. complete extension: Fixpunkt + konfliktfrei
  2. preferred extension: $\subseteq$-maximale complete extension
- aus DS kennen wir zwei Theoreme, welche sich mit Fixpunkten beschäftigen
  1. Fixpunktsatz von Knaster-Tarski (Existenz)
  2. Fixpunktsatz von Kleene (Berechnung)

Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ ein vollständiger Verband. Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$-monoton, dann $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \emptyset$ und $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ vollständiger Verband.

Fixpunkttheorie und Semantiken

- bis jetzt haben wir zwei Semantiken kennengelernt, deren Extensionen spezielle Fixpunkte von $\mathcal{C}_F$ sind
  1. complete extension: Fixpunkt + konfliktfrei
  2. preferred extension: $\subseteq$-maximale complete extension
- aus DS kennen wir zwei Theoreme, welche sich mit Fixpunkten beschäftigen
  1. Fixpunktsatz von Knaster-Tarski (Existenz)
  2. Fixpunktsatz von Kleene (Berechnung)

Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ ein vollständiger Verband. Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$-monoton, dann $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \emptyset$ und $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ vollständiger Verband.

☞ Existenz von ($\leq$-kleinsten/größten) Fixpunkten

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband. Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$*-monoton, dann* $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \varnothing$ *und* $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ *vollständiger Verband.*

☞ Existenz von ($\leq$-kleinsten/größten) Fixpunkten

- Wissen schon: Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F$ $\subseteq$-monoton.

Fixpunkttheorie und Semantiken

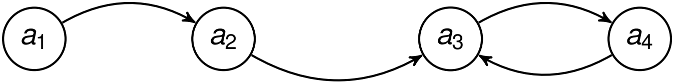
Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband. Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$*-monoton, dann* $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \varnothing$ *und* $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ *vollständiger Verband.*

☞ Existenz von ($\leq$-kleinsten/größten) Fixpunkten

- Wissen schon: Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F$ $\subseteq$-monoton.

$F:$



$\mathcal{FP} =$

Fixpunkttheorie und Semantiken

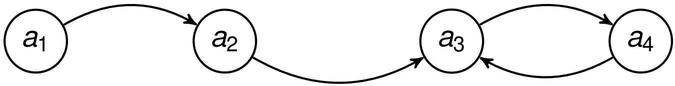
Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband. Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$*-monoton, dann* $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \emptyset$ *und* $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ *vollständiger Verband.*

☞ Existenz von ($\leq$-kleinsten/größten) Fixpunkten

- Wissen schon: Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F$ $\subseteq$-monoton.

F:



$$\mathcal{FP} = \{\{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}\}$$

Fixpunkttheorie und Semantiken

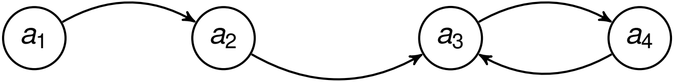
Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband. Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$-monoton, dann $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \varnothing$ und $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ vollständiger Verband.

☞ Existenz von ($\leq$-kleinsten/größten) Fixpunkten

- Wissen schon: Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F$ $\subseteq$-monoton.

F:



$$\mathcal{FP} = \{\{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}\}$$

Nicht notwendigerweise konfliktfrei!

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Knaster-Tarski, 1955)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband. Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $\leq$-monoton, dann $\mathcal{FP} = \{p \mid \mathcal{O}(p) = p\} \neq \emptyset$ und $(\mathcal{FP}, \leq_{|\mathcal{FP}})$ vollständiger Verband.

☞ Existenz von ($\leq$-kleinsten/größten) Fixpunkten

- Wissen schon: Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F$ $\subseteq$-monoton.

$$F: \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, bend left] & a_2 \arrow[r, bend right] & a_3 \arrow[r, bend left] & a_4 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{FP} = \{\{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}\}$$

Nicht notwendigerweise konfliktfrei!

(aber schon gezeigt: $\subseteq$-maximal complete existieren immer)

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband (Halbordnung). Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω*-stetig, dann* $\leq$*-kleinster Fixpunkt lfp* $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband (Halbordnung). Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω*-stetig, dann* $\leq$*-kleinster Fixpunkt* $\mathit{lfp} = \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband (Halbordnung). Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω*-stetig, dann* $\leq$*-kleinster Fixpunkt lfp* $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)
- in $\left(2^A, \subseteq\right)$ ist $\bigsqcup = \bigcup$ und $\bot = \emptyset$
- somit für finitary AFs *lfp* $= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\emptyset)$

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband (Halbordnung). Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω*-stetig, dann* $\leq$*-kleinster Fixpunkt lfp* $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)
- in $\left(2^A, \subseteq\right)$ ist $\bigsqcup = \bigcup$ und $\bot = \emptyset$
- somit für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\emptyset)$

Ist *lfp* konfliktfrei?

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt lfp $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)
- in $\left(2^A, \subseteq\right)$ ist $\bigsqcup = \bigcup$ und $\bot = \emptyset$
- somit für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\emptyset)$

Ist *lfp* konfliktfrei? Ja!

Beweisskizze:

1. Wenn $A \in ad(F)$, dann $\mathcal{C}_F(A) \in ad(F)$.

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt lfp $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)
- in $\left(2^A, \subseteq\right)$ ist $\bigsqcup = \bigcup$ und $\bot = \varnothing$
- somit für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing)$

Ist *lfp* konfliktfrei? Ja!

Beweisskizze:

1. *Wenn $A \in ad(F)$, dann $\mathcal{C}_F(A) \in ad(F)$.*
2. *Somit $\mathcal{K} = \{\varnothing, \mathcal{C}_F(\varnothing), \mathcal{C}_F^2(\varnothing), \ldots\} \subseteq ad(F)$.*

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt $lfp = \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)
- in $\left(2^A, \subseteq\right)$ ist $\bigsqcup = \bigcup$ und $\bot = \varnothing$
- somit für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing)$

Ist *lfp* konfliktfrei? Ja!

Beweisskizze:

1. *Wenn $A \in ad(F)$, dann $\mathcal{C}_F(A) \in ad(F)$.*
2. *Somit $\mathcal{K} = \{\varnothing, \mathcal{C}_F(\varnothing), \mathcal{C}_F^2(\varnothing), \ldots\} \subseteq ad(F)$.*
3. *Wissen schon $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in ad(F)$.*

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt lfp $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- Für ein AF $F = (A, R)$ ist $\left(2^A, \subseteq\right)$ vollständiger Verband und $\mathcal{C}_F : 2^A \to 2^A$ ist ω-stetig, sofern F finitary (siehe Übung 1)
- in $\left(2^A, \subseteq\right)$ ist $\bigsqcup = \bigcup$ und $\bot = \varnothing$
- somit für finitary AFs *lfp* $= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing)$

Ist *lfp* konfliktfrei? Ja!

Beweisskizze:

1. *Wenn $A \in ad(F)$, dann $\mathcal{C}_F(A) \in ad(F)$.*
2. *Somit $\mathcal{K} = \{\varnothing, \mathcal{C}_F(\varnothing), \mathcal{C}_F^2(\varnothing), \ldots\} \subseteq ad(F)$.*
3. *Wissen schon $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in ad(F)$.*
4. *Also, lfp $\in cf(F)$.*

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband (Halbordnung). Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω*-stetig, dann* $\leq$*-kleinster Fixpunkt* $\mathit{lfp} = \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- für finitary AFs $\mathit{lfp} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in co(F)$

Fixpunkttheorie und Semantiken

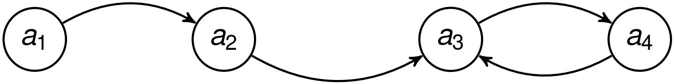
Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt lfp $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in co(F)$

F :



Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt lfp $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in co(F)$

$$F: \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, bend left] & a_2 \arrow[r, bend right] & a_3 \arrow[r, bend left] & a_4 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing)$$

Fixpunkttheorie und Semantiken

Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ *vollständiger Verband (Halbordnung). Falls* $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω*-stetig, dann* $\leq$*-kleinster Fixpunkt* $lfp = \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- für finitary AFs $lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in co(F)$

$$
\begin{tikzcd}
F: & a_1 \arrow[r, bend left] & a_2 \arrow[r, bend right] & a_3 \arrow[r, bend left] & a_4 \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}
$$

$$lfp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) = \bigcup \left\{ \mathcal{C}_F^0(\varnothing), \mathcal{C}_F^1(\varnothing), \mathcal{C}_F^2(\varnothing), \ldots \right\}$$

Fixpunkttheorie und Semantiken

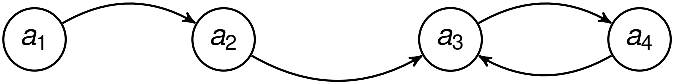
Theorem (Kleene)

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ vollständiger Verband (Halbordnung). Falls $\mathcal{O} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ω-stetig, dann $\leq$-kleinster Fixpunkt lfp $= \bigsqcup \left\{ \mathcal{O}^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.

☞ Berechnung/Approximation $\leq$-kleinsten Fixpunkt

- für finitary AFs $\mathit{lfp} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) \in co(F)$

F :



$$\begin{aligned} \mathit{lfp} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_F^i(\varnothing) &= \bigcup \left\{ \mathcal{C}_F^0(\varnothing), \mathcal{C}_F^1(\varnothing), \mathcal{C}_F^2(\varnothing), \ldots \right\} \\ &= \bigcup \left\{ \varnothing, \{a_1\}, \{a_1\}, \ldots \right\} = \{a_1\} \end{aligned}$$

Kleinster Fixpunkt

- kleinster Fixpunkt G wird auch als grounded extension bezeichnet
- Existenz ist durch Knaster-Tarski gesichert

Kleinster Fixpunkt

- kleinster Fixpunkt G wird auch als grounded extension bezeichnet
- Existenz ist durch Knaster-Tarski gesichert
- im Gegensatz zum größten Fixpunkt immer konfliktfrei (Beweis mit Hilfe von transfiniter Induktion)

Kleinster Fixpunkt

- kleinster Fixpunkt G wird auch als grounded extension bezeichnet
- Existenz ist durch Knaster-Tarski gesichert
- im Gegensatz zum größten Fixpunkt immer konfliktfrei (Beweis mit Hilfe von transfiniter Induktion)
- im Falle von finitary AFs effektiv berechenbar bzw. beliebig approximierbar (Kleene)

Kleinster Fixpunkt

- kleinster Fixpunkt G wird auch als grounded extension bezeichnet
- Existenz ist durch Knaster-Tarski gesichert
- im Gegensatz zum größten Fixpunkt immer konfliktfrei (Beweis mit Hilfe von transfiniter Induktion)
- im Falle von finitary AFs effektiv berechenbar bzw. beliebig approximierbar (Kleene)
- für alle complete extensions E gilt: $G \subseteq E$

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $G \subseteq A$ heißt *grounded* in F, sofern

- G ist $\subseteq$-kleinstes Element in $\{E \mid E = \mathcal{C}_F(E)\}$

Wir setzen $gr(F) = \{G \mid G \text{ grounded in } F\}$.

Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$. (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\}$.

Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$. (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\}$.

Wissen schon:

- $stb(F) \subseteq pr(F)$
- $pr(F) \subseteq stb(F)$ nicht zwangsweise

Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$. (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\}$.

Wissen schon:

- $stb(F) \subseteq pr(F)$
- $pr(F) \subseteq stb(F)$ nicht zwangsweise

Heute:

Einschränkung auf AFs, so daß $pr(F) = stb(F)$ garantiert.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly attacks a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n+1} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n+1} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i \leq 2n$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

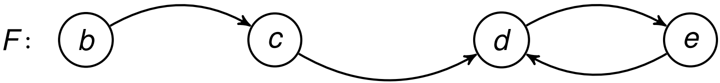
Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly attacks a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n+1} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n+1} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i \leq 2n$ (ungerade attack-sequenz)



Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly attacks a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n+1} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n+1} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i \leq 2n$ (ungerade attack-sequenz)

$$F: \quad b \rightarrow c \rightarrow d \leftrightarrow e$$

$n = 0$: b (indirectly) attacks c, c (indirectly) attacks d, ... (1 Attacke)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

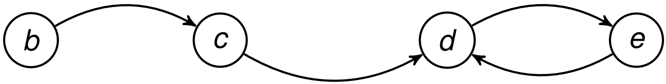
Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly attacks a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n+1} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n+1} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i \leq 2n$ (ungerade attack-sequenz)

F:



$n = 0$: b (indirectly) attacks c, c (indirectly) attacks d, ... (1 Attacke)

$n = 1$: b indirectly attacks e, c indirectly attacks d, ... (3 Attacken)

$n = 2$: b indirectly attacks e, ... (5 Attacken)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly defends a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i < 2n$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

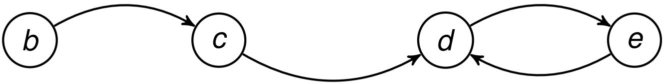
Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly defends a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i < 2n$ (gerade attack-sequenz)

F:



Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

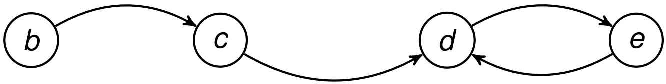
Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly defends a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i < 2n$ (gerade attack-sequenz)

F:



$n = 0$: b indirectly defends b, c indirectly defends c, ... (0 Attacken)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

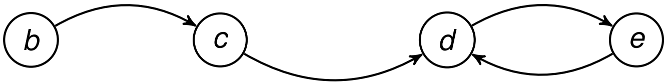
Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly defends a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i < 2n$ (gerade attack-sequenz)

F: 

$n = 0$: b indirectly defends b, c indirectly defends c, ... (0 Attacken)

$n = 1$: b indirectly defends d, c indirectly defends e, ... (2 Attacken)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

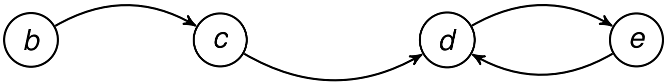
Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly defends a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i < 2n$ (gerade attack-sequenz)

F:



$n = 0$: b indirectly defends b, c indirectly defends c, ... (0 Attacken)

$n = 1$: b indirectly defends d, c indirectly defends e, ... (2 Attacken)

$n = 2$: b indirectly defends d, ... (4 Attacken)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- *b indirectly attacks a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n+1} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n+1} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i \leq 2n$ (ungerade attack-sequenz)
- *b indirectly defends a* falls es $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$ gibt mit,
  1. $a_0 = a$ und $a_{2n} = b$
  2. $(a_{i+1}, a_i) \in R$ für $0 \leq i < 2n$ (gerade attack-sequenz)
- b ist *controversial* zu a, falls
  b indirectly attacks a und *b indirectly defends a*
  (gerade + ungerade attack-sequenz)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *coherent*, falls $pr(F) \subseteq stb(F)$.

Definition

Gegeben ein AF $F = (A, R)$ und Argumente $a, b \in A$. Wir sagen:

- b ist *controversial* zu a, falls
  b *indirectly attacks* a und b *indirectly defends* a
  (gerade + ungerade attack-sequenz)

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

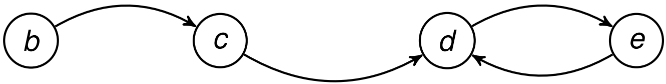
Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.

(unendliche Folge von controversial Argumenten)

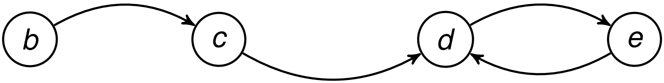
F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:


Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

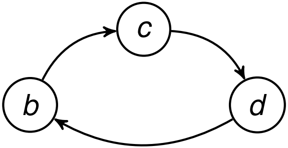
☞ Nein! Somit auch keine unendliche Folge. Folglich, F ist limited controversial.

Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

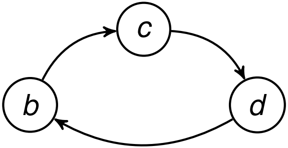
Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.

(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

☞ Ja, z.B.: *b* controversial zu *c* und *c* controversial zu *d*

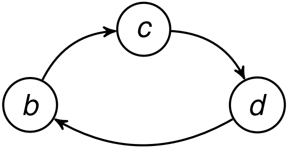
Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.

(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

☞ Ja, z.B.: *b* controversial zu *c* und *c* controversial zu *d*

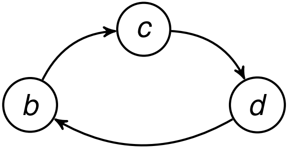
Gibt es unendliche Folge von controversial arguments?

Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

☞ Ja, z.B.: b controversial zu c und c controversial zu d

Gibt es unendliche Folge von controversial arguments?

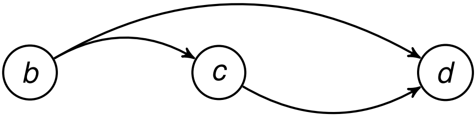
☞ Ja, z.B.: $d, c, b, d, c, b, d, c, b, \ldots$. Somit F **nicht** limited controversial.

Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

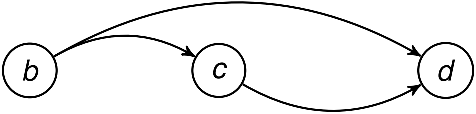
Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.

(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

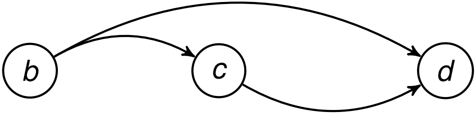
☞ Ja, z.B.: *b* controversial zu *d*

Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

☞ Ja, z.B.: b controversial zu d

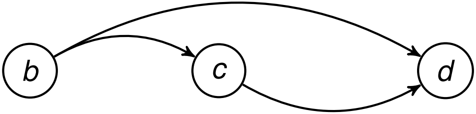
Gibt es unendliche Folge von controversial arguments?

Beispiele

Definition

Ein AF $F = (A, R)$ heißt *limited controversial*, falls es keine $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt mit: a_{i+1} ist controversial zu a_i für $i \in \mathbb{N}$.
(unendliche Folge von controversial Argumenten)

F:



Gibt es Argumente a_0 und a_1, so daß a_1 controversial zu a_0?

☞ Ja, z.B.: b controversial zu d

Gibt es unendliche Folge von controversial arguments?

☞ Nein. Somit ist F limited controversial.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

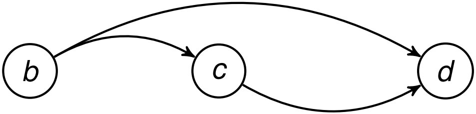
Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

- Beweis folgt
- Verifiziere die Aussage an den folgenden Beispielen:

$F:$



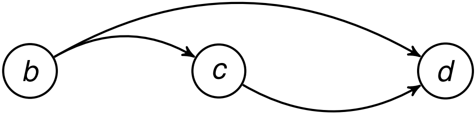
Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

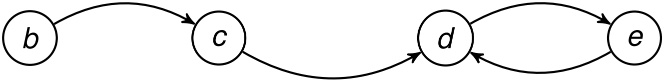
Falls F limited controversial, dann F coherent.

- Beweis folgt
- Verifiziere die Aussage an den folgenden Beispielen:

F:



G:



Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Für den Beweis benötigen wir das sogenannte Redukt und zwei Aussagen diesbezüglich.

Definition

Gegeben $F = (A, R)$ und $E \subseteq A$. Das AF $F^E = (A', R')$ heißt *E-redukt von F* mit $A' = A \setminus (E \cup \{a \mid E \text{ attacks } a\})$ und $R' = R_{|A'}$.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

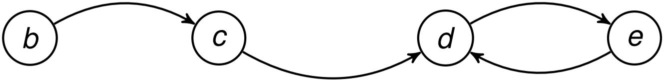
Falls F limited controversial, dann F coherent.

Für den Beweis benötigen wir das sogenannte Redukt und zwei Aussagen diesbezüglich.

Definition

Gegeben $F = (A, R)$ und $E \subseteq A$. Das AF $F^E = (A', R')$ heißt *E-redukt von F* mit $A' = A \setminus (E \cup \{a \mid E \text{ attacks } a\})$ und $R' = R_{|A'}$.

F:



Sei $E = \{b\}$. Dann F^E?

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

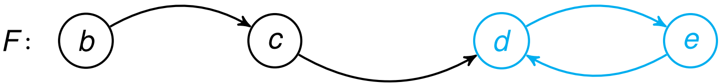
Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Für den Beweis benötigen wir das sogenannte Redukt und zwei Aussagen diesbezüglich.

Definition

Gegeben $F = (A, R)$ und $E \subseteq A$. Das AF $F^E = (A', R')$ heißt *E-redukt von F* mit $A' = A \setminus (E \cup \{a \mid E \text{ attacks } a\})$ und $R' = R_{|A'}$.



Sei $E = \{b\}$. Dann $F^E =$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Für den Beweis benötigen wir das sogenannte Redukt und zwei Aussagen diesbezüglich.

Definition

Gegeben $F = (A, R)$ und $E \subseteq A$. Das AF $F^E = (A', R')$ heißt *E-redukt von F* mit $A' = A \setminus (E \cup \{a \mid E \text{ attacks } a\})$ und $R' = R_{|A'}$.

Proposition (modularity)

Falls $E \in co(F)$ und $E' \in co\left(F^E\right)$, dann $E \cup E' \in co(F)$.

(Beweis Übung 2)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Für den Beweis benötigen wir das sogenannte Redukt und zwei Aussagen diesbezüglich.

Definition

Gegeben $F = (A, R)$ und $E \subseteq A$. Das AF $F^E = (A', R')$ heißt *E-redukt von F* mit $A' = A \setminus (E \cup \{a \mid E \text{ attacks } a\})$ und $R' = R_{|A'}$.

Proposition (modularity)

Falls $E \in co(F)$ und $E' \in co\left(F^E\right)$, dann $E \cup E' \in co(F)$.

(Beweis Übung 2)

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\varnothing$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\varnothing$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_{\varnothing}$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \varnothing$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\emptyset$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \emptyset$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \emptyset$
- wegen F limited controversial existiert ein Argument a, so daß kein anderes b controversial zu a ist

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\emptyset$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \emptyset$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \emptyset$
- wegen F limited controversial existiert ein Argument a, so daß kein anderes b controversial zu a ist
- setze $E_0 = \{a\}$. Für $i \geq 1$ $E_i = E_{i-1} \cup D_{i-1}$ mit D_{i-1} verteidigt Elemente aus E_{i-1}. Wähle D_{i-1} $\subseteq$-minimal. (Existenz?)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_{\varnothing}$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \varnothing$
- wegen F limited controversial existiert ein Argument a, so daß kein anderes b controversial zu a ist
- setze $E_0 = \{a\}$. Für $i \geq 1$ $E_i = E_{i-1} \cup D_{i-1}$ mit D_{i-1} verteidigt Elemente aus E_{i-1}. Wähle D_{i-1} $\subseteq$-minimal. (Existenz?)
- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$, b indirectly defends a

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\emptyset$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \emptyset$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \emptyset$
- wegen F limited controversial existiert ein Argument a, so daß kein anderes b controversial zu a ist
- setze $E_0 = \{a\}$. Für $i \geq 1$ $E_i = E_{i-1} \cup D_{i-1}$ mit D_{i-1} verteidigt Elemente aus E_{i-1}. Wähle D_{i-1} $\subseteq$-minimal. (Existenz?)
- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$, b indirectly defends a

$i = 0$: Ang. $\{a\} \notin cf(F)$, dann a controversial zu a (Warum?). Des Weiteren a indirectly defends a (0 Attacken)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\emptyset$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \emptyset$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \emptyset$
- wegen F limited controversial existiert ein Argument a, so daß kein anderes b controversial zu a ist
- setze $E_0 = \{a\}$. Für $i \geq 1$ $E_i = E_{i-1} \cup D_{i-1}$ mit D_{i-1} verteidigt Elemente aus E_{i-1}. Wähle D_{i-1} $\subseteq$-minimal. (Existenz?)
- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$, b indirectly defends a

$i = 0:$ Ang. $\{a\} \notin cf(F)$, dann a controversial zu a (Warum?). Des Weiteren a indirectly defends a (0 Attacken)

$i = n:$ $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Per Ind.-annahme jedes Element aus E_{n-1} indirectly defends a.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\varnothing$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Proof.

- O.B.d.A. sind alle Argumente attackiert, da sonst $G \neq \varnothing$
- wegen F limited controversial existiert ein Argument a, so daß kein anderes b controversial zu a ist
- setze $E_0 = \{a\}$. Für $i \geq 1$ $E_i = E_{i-1} \cup D_{i-1}$ mit D_{i-1} verteidigt Elemente aus E_{i-1}. Wähle D_{i-1} $\subseteq$-minimal. (Existenz?)
- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$, b indirectly defends a

$i = 0:$ Ang. $\{a\} \notin cf(F)$, dann a controversial zu a (Warum?). Des Weiteren a indirectly defends a (0 Attacken)

$i = n:$ $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Per Ind.-annahme jedes Element aus E_{n-1} indirectly defends a. Da D_{n-1} Elemente aus E_{n-1} verteidigt (2 Attack-sequenz) gilt dies auch für Elemente aus D_{n-1}. Also, jedes Element aus E_n indirectly defends a.

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\varnothing$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Proof.

- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$: b indirectly defends a

$i = n:$ $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Ang. $E_n \notin cf(F)$, dann ex. $b, b' \in E_n$ mit b attackiert b' (1 Attack-sequenz).

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_{\varnothing}$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Proof.

- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$: b indirectly defends a

$i = n$: $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Ang. $E_n \notin cf(F)$, dann ex. $b, b' \in E_n$ mit b attackiert b' (1 Attack-sequenz). Da b und b' indirectly defends a gilt auch b indirectly attacks a. Somit b controversial zu a. W!

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_\varnothing$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \varnothing$.

Proof.

- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$: b indirectly defends a

$i = n$: $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Ang. $E_n \notin cf(F)$, dann ex. $b, b' \in E_n$ mit b attackiert b' (1 Attack-sequenz). Da b und b' indirectly defends a gilt auch b indirectly attacks a. Somit b controversial zu a. W!

- setze nun $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Es gilt $E \in ad(F)$. (Warum?)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_{\emptyset}$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \emptyset$.

Proof.

- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$: b indirectly defends a

  $i = n:$ $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Ang. $E_n \notin cf(F)$, dann ex. $b, b' \in E_n$ mit b attackiert b' (1 Attack-sequenz). Da b und b' indirectly defends a gilt auch b indirectly attacks a. Somit b controversial zu a. W!

- setze nun $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Es gilt $E \in ad(F)$. (Warum?)
- in VL3 wurde gezeigt, daß für jede $E \in ad(F)$ eine $E' \in pr(F)$ existiert mit $E \subseteq E'$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Proposition (non-emptyness)

Falls $F \neq F_{\emptyset}$ limited controversial, dann $\bigcup co(F) \neq \emptyset$.

Proof.

- per Ind.: $E_i \in cf(F)$ und jedes $b \in E_i$: b indirectly defends a

  $i = n:$ $E_n = E_{n-1} \cup D_{n-1}$. Ang. $E_n \notin cf(F)$, dann ex. $b, b' \in E_n$ mit b attackiert b' (1 Attack-sequenz). Da b und b' indirectly defends a gilt auch b indirectly attacks a. Somit b controversial zu a. W!

- setze nun $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Es gilt $E \in ad(F)$. (Warum?)
- in VL3 wurde gezeigt, daß für jede $E \in ad(F)$ eine $E' \in pr(F)$ existiert mit $E \subseteq E'$
- da $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \neq \emptyset$ und $pr(F) \subseteq co(F)$ folgt nun $\bigcup co(F) \neq \emptyset$

$\square$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$
- da $E \notin stb(F)$ gilt $F^E \neq F_\varnothing$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$
- da $E \notin stb(F)$ gilt $F^E \neq F_\emptyset$
- mit F limited controversial ist auch F^E limited controversial

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$
- da $E \notin stb(F)$ gilt $F^E \neq F_\emptyset$
- mit F limited controversial ist auch F^E limited controversial
- wie eben gezeigt, existiert $E' \in co\left(F^E\right)$ mit $E' \neq \emptyset$

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$
- da $E \notin stb(F)$ gilt $F^E \neq F_\emptyset$
- mit F limited controversial ist auch F^E limited controversial
- wie eben gezeigt, existiert $E' \in co\left(F^E\right)$ mit $E' \neq \emptyset$
- mit $E \in co(F)$, $E' \in co\left(F^E\right)$ ist dann $E \cup E' \in co(F)$ (Üb2)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$
- da $E \notin stb(F)$ gilt $F^E \neq F_\emptyset$
- mit F limited controversial ist auch F^E limited controversial
- wie eben gezeigt, existiert $E' \in co\left(F^E\right)$ mit $E' \neq \emptyset$
- mit $E \in co(F)$, $E' \in co\left(F^E\right)$ ist dann $E \cup E' \in co(F)$ (Üb2)
- wissen schon, daß preferred extensions auch $\subseteq$-maximale complete sind (VL3)

Koinzidenz von Stable und Preferred Semantics

Theorem

Falls F limited controversial, dann F coherent.

Proof.

- ang. nicht coherent, dann ex. $E \in pr(F) \setminus stb(F)$
- da $E \notin stb(F)$ gilt $F^E \neq F_\varnothing$
- mit F limited controversial ist auch F^E limited controversial
- wie eben gezeigt, existiert $E' \in co\left(F^E\right)$ mit $E' \neq \varnothing$
- mit $E \in co(F)$, $E' \in co\left(F^E\right)$ ist dann $E \cup E' \in co(F)$ (Üb2)
- wissen schon, daß preferred extensions auch $\subseteq$-maximale complete sind (VL3)
- es gilt aber $E \subset E \cup E'$ W!

$\square$

Existenz von Stable Extensions

Da preferred extensions immer existieren, folgt nun die zentrale Aussage über die Existenz von stabilen Extensionen.

Theorem

Falls F limited controversial, dann $stb(F) \neq \varnothing$.

Existenz von Stable Extensions

Da preferred extensions immer existieren, folgt nun die zentrale Aussage über die Existenz von stabilen Extensionen.

Theorem

Falls F limited controversial, dann $stb(F) \neq \emptyset$.

Es ist nicht schwer zu zeigen (Übung 2), daß für endliche AFs, limited controversial nichts anderes bedeutet als odd-cycle-free. Daraus folgt, die in der Argumentationsliteratur nachstehende viel zitierte Aussage.

Existenz von Stable Extensions

Da preferred extensions immer existieren, folgt nun die zentrale Aussage über die Existenz von stabilen Extensionen.

Theorem

Falls F limited controversial, dann $stb(F) \neq \emptyset$.

Es ist nicht schwer zu zeigen (Übung 2), daß für endliche AFs, limited controversial nichts anderes bedeutet als odd-cycle-free. Daraus folgt, die in der Argumentationsliteratur nachstehende viel zitierte Aussage.

Theorem

Gegeben ein endliches AF F. Falls $stb(F) = \emptyset$, dann existiert ein odd-cycle in F.

Vorlesung “Formale Argumentation”

4. Argumentation Frameworks and Semantics – Teil 3

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

25. April 2024
Leipzig