

Vorbereitungsmaterial
für ein Studium in den Fächern
Mathematik und Informatik
an der Universität Leipzig

Herausgegeben vom Studiendekan der
Fakultät für Mathematik und Informatik

1 Warum ein Tutorium Mathematik

In allen von unserer Fakultät angebotenen Studiengängen ist die Beschäftigung mit mathematischen Sachverhalten selbstverständlich. Haben Sie vor, Mathematik oder Wirtschaftsmathematik zu studieren, wird Sie das vielleicht nicht überraschen, aber auch für ein Informatik-Studium darf die grundlegende Bedeutung der Mathematik nicht unterschätzt werden. Ein großer Teil der obligatorischen Lehrveranstaltungen für Informatikstudenten im Grundstudium beschäftigt sich mit mathematischen Inhalten. Auch bei den Informatik-Anwendungen werden Sie mathematische Methoden und Denkmuster benutzen. Eine wichtige Voraussetzung für Ihren Erfolg im Studium ist deshalb das sichere Beherrschen der mathematischen Grundlagen.

Leider haben die Erfahrungen der vergangenen Jahre gezeigt, daß die für ein Studium an unserer Fakultät unabdingbaren mathematischen Vorkenntnisse (obwohl sie nicht über den Schulstoff hinausgehen) nicht bei allen Studienbewerbern immer in ausreichendem Umfang vorhanden sind.

Um zu vermeiden, daß ein Student während des laufenden Studiums das nicht vorhandene Grundlagenwissen selbständig nachholen muß und die zusätzliche Belastung ihn dann überfordert oder demotiviert, wird für die an der Fakultät neu eingeschriebenen Studenten ein Vorbereitungskurs angeboten. Dieser Kurs wird vor Beginn des Wintersemesters 2001/2002 stattfinden.

In diesem Tutorium wird noch kein Stoff gelehrt, der nicht im Leistungskurs des Gymnasiums behandelt worden ist. Es ist für diejenigen Studenten gedacht, die einen Grundkursabschluß in Mathematik haben, deren letzter Mathematikunterricht längere Zeit zurückliegt oder die sicher sein wollen, ihr Studium gründlich vorbereitet zu beginnen. Es ist keine vollständige Wiederholung des Mathematikunterrichts an der Schule, sondern wird speziell das mathematische Wissen festigen, auf das für alle Studiengänge an unserer Fakultät vom ersten Semester an aufgebaut wird.

Damit Sie eine Vorstellung von den vorausgesetzten Mathematikkenntnissen bekommen und Ihr eigenes Wissen testen können, werden im nächsten Abschnitt einige Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades angeboten, die Sie selbständig lösen sollten. Es wurden Aufgaben aus Stoffgebieten gewählt, auf die im Studium ständig zurückgegriffen werden muß und die dem Anfänger erfahrungsgemäß oft Schwierigkeiten bereiten.

Sollten Sie bei diesem Selbsttest bemerken, daß Sie Probleme beim Verständnis oder der Lösung der Aufgaben haben, ist Ihnen die Teilnahme am Vorbereitungskurs zu empfehlen. Zu Beginn dieses Kurses können auf Wunsch auch die Lösungen der Aufgaben besprochen werden.

Häufig wird die Frage nach vorbereitender Literatur für die Mathematikvorlesungen gestellt. Diese Frage ist schwer allgemeingültig zu beantworten. Einmal gibt jeder Hochschullehrer eigene Literaturhinweise zu seinen Vorlesungen und zum anderen sollte jeder Student während der ersten Wochen eines Semesters in allen Literaturhinweisen in der Bibliothek ein wenig Probelesen und herausfinden, welche Literatur seine Erwartungen erfüllt. Deshalb sei hier zur Wiederholung des Schulstoffes auf die Schullehrbücher und evt. dazu existierende Aufgabensammlungen verwiesen.

2 Wiederholungsaufgaben zum Studienbeginn

(Schwierigere Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.)

2.1 Rechenregeln

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

$$(a) \frac{2x}{x+2} - \frac{2x-4}{(x+2)^2} + \frac{2-x}{x-2}$$

$$(b) \frac{3a}{4b} \frac{2b}{15a}$$

$$(c) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$(d) \frac{x-1}{x+1} : \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$(e) \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 y}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \left(-\frac{1}{2}\right) (xy)^{-2}}$$

$$(f) (64a^{15} + 27b^6) : (4a^5 + 3b^2)$$

$$(g) \frac{\sqrt[3]{a^6 - b^6}}{\sqrt[3]{a^3 - b^3}}$$

$$(h) \frac{2b-a}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a}{b^2-a^2}$$

Warum muß $|a| \neq |b|$ und $a \neq 0$ vorausgesetzt werden?

$$(i) \frac{8b+6}{1 + \frac{a}{2ab + a/2}}$$

Für welche Werte ist der Bruch nicht definiert?

2. Machen Sie die Nenner rational

$$(a) \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$(b) \frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} \text{ mit } a \geq 0$$

$$(c) \frac{484}{(5 - \sqrt{3})^5}$$

$$(d) \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$(e) \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$$

3. Schreiben Sie $0,2272727\dots$ als gemeinen Bruch.

2.2 Teilbarkeit

1. Für welche positiven natürlichen Zahlen a, b, c ist

$$\left(a^2 + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}c^2\right) b^2$$

eine ganze Zahl?

2. Sei k eine beliebige ganze Zahl. Zeigen Sie, daß von den durch 13 teilbaren ganzen Zahlen aus dem Intervall $(k+1000, k+2000)$ mindestens eine durch 57 teilbar ist.

3. * Am Neujahrstag des Jahres 1975 lernten sich A und B kennen. Im Laufe des Gespräches kam man auf das Alter der beiden.
 A : „Die Quersumme meines vierstellig geschriebenen Geburtsjahres ergibt mein Alter.“
 Nach einer Weile erwiedert B : „Herzlichen Glückwunsch zum heutigen Geburtstag.“
 Wie kam B zu dieser Feststellung und wie alt wurde A am 1.1.1975?

2.3 Zahlensysteme

1. Stellen Sie die Dezimalzahl 11011 in den Zahlensystemen zu den Basen 2, 5 und 8 dar.
2. Zu welcher Basis b hat die Zahl Einhundert eine Darstellung der Form $a0a$ mit $a \in \{1, \dots, b-1\}$? Warum ist $a = 0$ ausgeschlossen?
3. Im Zahlensystem zu welcher Basis gilt die Gleichung $1050 + 152 = 1212$?

2.4 Logik

1. In drei Kisten liegen je zwei Kugeln, und zwar einmal zwei weiße, einmal zwei schwarze und einmal eine weiße und eine schwarze. Auf den Deckeln der Kisten war der Inhalt angegeben. Die Deckel wurden aber so vertauscht, daß sich jetzt auf keiner der Kisten der richtige Deckel befindet. Entscheide durch Ansehen nur einer Kugel aus nur einer Kiste, welcher Deckel auf welche Kiste gehört.
2. Man kann zu einer Aussage A ihre Negation (Verneinung) „nicht A “ bilden. Es ist A genau dann wahr, wenn „nicht A “ falsch ist. Formulieren Sie zu jeder der folgenden Aussagen ihre Negation, überprüfen Sie, ob die Aussagen wahr sind und begründen Sie ihre Entscheidung:
 - (a) $17 < 23$
 - (b) Alle Primzahlen sind gerade.
 - (c) $x^2 - 4 = 0$ hat mindestens zwei reelle Lösungen.
 - (d) $(x - 1)(x + 1) = 0$ besitzt höchstens zwei reelle Lösungen.

2.5 Kombinatorik

1. Wenn jeder Teilnehmer eines Schachturniers genau eine Partie mit jedem der übrigen Teilnehmer spielt, so werden insgesamt 231 Partien gespielt. Wieviele Spieler nehmen teil?
2. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, drei natürliche Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 100\}$ ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, so daß

- (a) alle Zahlen in der Auswahl verschieden sind?
 (b) eine Zahl in der Auswahl mehrfach auftreten darf?
 (c) die Summe der Zahlen in der Auswahl gerade ist?
3. $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = ?$
4. * Beweisen Sie die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2}$$

2.6 Gleichungen

1. Geben Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen an

(a) $\frac{5x-7}{4x+4} + \frac{x+3}{3x+3} = 1$

(b) $a(x+2)(2x^2+5x-3) = 0$

(c) $x^2 - (r+s)x + rs = 0$

2. * Bei welchen Werten von p hat die Gleichung $x^2 - px - 28 = 0$ Lösungen x_1, x_2 , welche die Bedingung $x_1^2 + x_2^2 = 65$ erfüllen?
3. Bestimmen Sie in der Gleichung $4x^2 - kx + 15 = 0$ den Parameter k so, daß die Differenz $x_1 - x_2 = 1$ und mindestens eine Lösung positiv ist.
4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen

(a) $\left(\frac{11}{9}\right)^{2x-5} = \left(\frac{9}{11}\right)^{5x-9}$ (b) $5^{z-2} = 0,008$

(c) * $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 3$ $x > 0$

5. Unter welchen Bedingungen für die positive reelle Zahl a hat die Gleichung $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ zwei verschiedene reelle Lösungen?
6. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\cos(2x) + \sin(x) = 1$

2.7 Ungleichungen

1. Man bestimme die Menge aller reellen x , für die gilt:

(a) $|2x+7| \geq 2$

(d) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 2$

(b) $|2x+7| = 2$

(c) $|2x+7| < 2$

(e) $x^2 - 5x - 7 > 0$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(f)} \quad \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 2x + 3} > 0 & \text{(i)} \quad |x + 2| + |x + 3| > 1 \\
 \text{(g)} \quad 3 \cdot |x| + x^2 - 1 > 0 & \text{(j)} \quad |x + 2| + |x - 3| = 1 \\
 \text{(h)} \quad x \cdot |x| \geq 1 & \text{(k)} \quad |x + 2| + |x + 3| < 1 \\
 & \text{(l)} \quad |x + 2| + |x + 3| = 1
 \end{array}$$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad 3 - |2 - x| > 1 - \frac{1}{2x} & \text{(c)} \quad -1 < \frac{7x - 3}{8x + 5} < 1 \\
 \text{(b)} \quad |3 \cos x - 2 \sin x| < 5 &
 \end{array}$$

3. Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$kx^2 - x + 3 \leq 0$$

in Abhängigkeit von der nichtnegativen Zahl k .

4. Beweisen Sie folgende Ungleichungen für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c :

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 & \text{(b)} \quad * \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}
 \end{array}$$

5. * x und y seien Meßwerte, die mit einer Genauigkeit von 10^{-3} bzw. 10^{-5} bestimmt sind. Es sei $x \geq 1$. Was kann man über die Genauigkeit von $x + y$, $x \cdot y$ und x/y sagen?

2.8 Gleichungssysteme

1. Geben Sie die Lösungsmengen folgendes Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 & \text{(b)} \quad * \begin{array}{l} ax + 4y = 2 \\ 9x + ay = 3 \end{array} \\
 \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4 & \text{in Abhängigkeit von } a
 \end{array}$$

2. Fügen Sie zur Gleichung $3x - 4a = 2$ eine zweite lineare Gleichung so hinzu, daß das entstehende Gleichungssystem unlösbar ist.

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{array}{l} x + y + z = 24 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + z = 9 \end{array} & \text{(b)} \quad \begin{array}{l} \frac{3}{10}\sqrt{x} + \frac{5}{3}\sqrt{y} = 13 \\ \frac{7}{15}\sqrt{x} - \frac{4}{9}\sqrt{y} = 2 \end{array} \\
 & \text{(c)} \quad \begin{array}{l} \frac{3x - 4}{y - 1} = \frac{4}{5} \\ \frac{x}{y + 1} = \frac{1}{3} \end{array}
 \end{array}$$

2.9 Polynome

1. Geben Sie eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ an.

2. Welche Lösungen haben die folgenden quadratischen Gleichungen:

(a) $\left(7y + \frac{21}{4}\right) \left(\frac{7}{12} - y\right) = 1$

(b) $x^2 + (u + v)x + uv = 0$

3. Welches Polynom dritten Grades hat die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$ und für $x_4 = 1$ den Funktionswert $y_4 = -6$?

4. Man wähle die Koeffizienten des Polynoms

$$f(x) = x^2 + rx + s$$

so, daß es die Nullstellen $x_1 = r$ und $x_2 = s$ hat.

5. * Für welchen Wert von t hat das Polynom

$$f(x) = x^2 - tx + 36$$

(reelle) Nullstellen x_1, x_2 , die der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 = 49$ genügen?

6. * Sei $f(x) = (m + 1)x^2 - m^2(m - 1)x + (m - 1)^3$

(m ist eine beliebige ganze Zahl). Diskutieren Sie die Anzahl der reellen Nullstellen von f in Abhängigkeit von m , drücken Sie diese Nullstellen als Funktion von m aus und machen Sie Aussagen über das Vorzeichen der Nullstellen. Wann sind alle Nullstellen von f ganzzahlig?

2.10 Folgen und Reihen

1. Schreiben Sie mit Hilfe des Summensymbols \sum

(a) $2 + 8 + 18 + 32 + 50 + 72 + 98 + 128$

(b) $\frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x^4} + \frac{4}{3x^5} + \frac{3}{4x^6} + \frac{6}{5x^7}$

(c) $c_1\sqrt[3]{b_0} + c_2\sqrt[3]{b_1} + c_3\sqrt[3]{b_2} + \dots + c_{10}\sqrt[3]{b_9}$

2. Man berechne

(a) $\sum_{n=1}^{100} 7k + 3$

(b) $\sum_{k=1}^n \ln k$

(c) * $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

3. * Die Summe s_3 der ersten drei Glieder einer unendlichen geometrischen Folge beträgt 6 und die Summe s aller Glieder dieser Folge beträgt $\frac{16}{3}$. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung

$$|s_n - s| < \frac{1}{96}$$

2.11 Vollständige Induktion

1. * Man beweise:

(a) Für beliebige positive Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n gilt

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

(c) Die Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 2$. Zeigen Sie durch Induktion nach m die Richtigkeit der Beziehung

$$a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$$

2. * Beweisen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, n \geq 0$$

2.12 Funktionen

1. Zeigen Sie, daß für jede Funktion f mit $f(x) = m \cdot x + n$, (m, n reell, $m \neq 0$) gilt:

$$\text{Aus } x_1 < x_2 \text{ folgt } \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & \text{falls } m > 0 \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{falls } m < 0 \end{cases}$$

2. Ermitteln Sie die Intervalle, auf denen die folgenden für alle reellen Argumente x definierten Funktionen monoton sind, in Abhängigkeit von den Parametern und geben Sie das jeweilige Monotonieverhalten an:

(a) $f_1(x) = 3x^2 + x + 2$

(b) $f_3(x) = 2 \sin(3x + c) \quad a \neq 0, b \neq 0$

3. Man gebe den Definitionsbereich folgender Funktionen an:

(a) $y = \sqrt{\cos x}$

(b) $y = \ln \tan x$

4. Man skizziere die Graphen folgender Funktionen

$$(a) y = x^2 - 4x + 1$$

$$(b) y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(c) y = \frac{x}{1+x^2}$$

5. Man bestimme den größten Wert der Funktion $y = \cos x \cdot \cos 2x$.
6. Geben Sie ein Beispiel für eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi/5$ an.
7. * Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als x . Zeigen Sie, daß $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ eine periodische Funktion ist. Welche Periode hat f ? Welches Bild hat f ?
8. Ermitteln Sie eine ganzrationale Funktion f mit $y = f(x)$, für die gilt:

$$f(1) = -1$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ für alle } x$$

Ist f durch die genannten Angaben eindeutig bestimmt?

2.13 Logarithmen

1. Zwischen welchen ganzen Zahlen r und $r + 1$ muß der Exponent α in $\left(\frac{4}{7}\right)^\alpha = \frac{8}{5}$ liegen?
2. Zwischen welchen ganzen Zahlen r und $r + 1$ muß die nichtnegative Basis a liegen?
 - (a) $a^{5/6} = \frac{6}{7}$
 - (b) $0, 2a^3 = 2, 7$
3. Auf welche Ungleichungen zwischen den Exponenten α und β kann man schließen?
 - (a) $3, 8^\alpha > 3, 8^\beta$
 - (b) $\left(\frac{9}{4}\right)^\beta < \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha$
4. Bestimmen Sie die Werte der folgenden Logarithmen ohne Taschenrechner:
 - (a) $\log_2 16$
 - (b) $\log_{10} (\sqrt{2}\sqrt{5})$
 - (c) $\log_2 \frac{2}{\sqrt{32}}$
5. Geben Sie die Menge aller x an, die der Ungleichung $\log_x \left(\frac{1}{2}\right) \leq -2$ genügen.

6. Wende Sie die Logarithmengesetze an

(a) bei der Darstellung von $\log_{12} 27$ mittels $a = \log_4 9$.

(b) bei der Berechnung von

$$\log_{1/p} p - \log_p \frac{1}{p}$$

Was ist dabei über p voranzusetzen?

7. Zeigen Sie, daß aus dem Logarithmengesetz

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \text{folgt:}$$

$$(a) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(b) \log_a x^p = p \log_a x$$

für rationales p

Dabei sind x und y beliebige reelle Zahlen und a ist eine beliebige zulässige Basis, d. h. $a > 0$ und $a \neq 1$.

2.14 Analytische Geometrie

1. Wie lautet die Gleichung der Geraden in der x - y -Ebene, die durch den Punkt $(-6, 3)$ geht und parallel ist zur Geraden mit der Gleichung $y = 4x - 5$?
2. * Gesucht ist die Gleichung des Kreises durch die Punkte $(8, -8)$, $(15, 9)$ und $(-9, -1)$.
3. Einem Kreis vom Radius 2 um den Punkt $(3, -7)$ sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, dessen eine Seite parallel zur x -Achse ist. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?
4. Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise der Ebene, die eine gegebene Gerade dieser Ebene in einem gegebenen Punkt berühren?
5. * Man bestimme die Menge aller Punkte der Ebene mit den Koordinaten (x, y) , für die gilt:

$$(a) 3 \cdot |x| + 4 \cdot |y| < 1$$

$$(c) |x - y| \leq 2$$

$$(b) \max(3 \cdot |x|, 4 \cdot |y|) \leq 1$$

$$(d) x \cdot y \leq 1$$

2.15 Beweise

1. Man zeige, daß die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist.

2. Beweisen Sie folgende Aussagen über natürliche Zahlen
- (a) 8 ist Teiler von $9^n - 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$.
 - (b) $2^n < n^2$, wenn $n \in \mathbb{N}, n > 4$
3. Jede der folgenden Aussagen ist entweder wahr oder falsch. Beweisen Sie die wahren unter ihnen, und widerlegen Sie die falschen Aussagen durch Angabe eines Gegenbeispiels:
- (a) $n^2 + n + 41$ ist für jedes natürliche n eine Primzahl.
 - (b) Für die Funktion f mit $f(x) = e^x$ und beliebige reelle Zahlen x_1, x_2 gilt stets $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
 - (c) Jede Gleichung der Gestalt $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c und $b^2 - 4ac > 0$ hat genau zwei reelle Lösungen.
4. * Beweisen Sie (indirekt), daß die Zahl $\sqrt[3]{2}$ irrational ist.