Propädeutikum 2019

Suse Kley, Holger Wuschke

23. September - 4. Oktober 2019

1 Rechenarten und Rechengesetze

1.1 Primfaktoren

Beispiel: $228 = 114 \cdot 2 = 57 \cdot 2 \cdot 2 = 19 \cdot 3 \cdot 2^2$

Eine Zahl wird in ein Produkt von ausschließlich Primzahlen zerlegt. Dies ist nicht nur für die Faktorisierung sinnvoll, sondern auch für die Bestimmung von kgV (kleinstem gemeinsamen Vielfachen) und ggT (größtem gemeinsamen Teiler).

Beispiel:

(a)
$$\begin{array}{lcccccccccc} 12 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 3 & & \\ 8 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & & & & \\ \hline \mathrm{kgV}(8,12) & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & = & 24 \\ \mathrm{ggT}(8,12) & = & 2 & \cdot & 2 & & & & & = & 4 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lcccccccccccc} 18 & = & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 & & & & & & \\ 45 & = & & & 3 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & & & & \\ 57 & = & & & 3 & \cdot & & & & & 19 & & \\ \hline \mathrm{kgV}(18,45,57) & = & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 19 & = & 1710 \\ \mathrm{ggT}(18,45,57) & = & & & 3 & & & & & & & = & 3 \end{array}$$

1.2 Klammerausdrücke

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ (oder beliebige Elemente eines Körpers $\mathbb{K}$), dann gelten:

(K) Kommutativgesetze: $a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a$

(A) Assoziativgesetze: $(a + b) + c = a + (b + c); \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(D) Distributivgesetze: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \overset{(K)}{=} c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b)$

binomische Formeln:
$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{(ii)} & (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{(iii)} & (a+b)(a-b) & = & a^2 - b^2 \end{array}$$

Aufgaben:

(a) $(5a - 7b) \cdot 4a - 5b \cdot (3a - 8b) - (7b - 2a) \cdot 6a + 3b \cdot (5a - b)$

(b) $(3x - 4)^2 + (2x - 3)^2$

(c) $(4x + y)^2 - (2x + 3y)^2$

(d) $2ax + ay - 2bx - by$ (Faktorisieren Sie.)

(e) $\mathrm{kgV}(65, 225)$ und $\mathrm{ggT}(87, 99)$

1.3 Bruchrechnung

Seien $k, l, m, n \in \mathbb{Z};\ l, n \neq 0$. Dann gelten folgende Rechengesetze:

$$\begin{array}{llcl}
\text{(i)} & \frac{k}{l}+\frac{m}{n} & = & \frac{kn+ml}{ln} \\
\text{(ii)} & \frac{k}{l}-\frac{m}{n} & = & \frac{kn-ml}{ln}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llclcll}
\text{(iii)} & \frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n} & = & \frac{km}{ln} & & & \\
\text{(iv)} & \frac{k}{l}:\frac{m}{n} & = & \frac{k}{l}\cdot\frac{n}{m} & = & \frac{kn}{lm} & \text{für } m\neq 0.
\end{array}$$

<u>Folgerung:</u>

$$\frac{1}{\frac{m}{n}}=\frac{n}{m}\quad (\text{für } m\neq 0).$$

Beweis: Setze $\frac{k}{l}=\frac{1}{1}$ in (iv). $\square$

<u>Aufgaben:</u>

(a) $\left(-\frac{p}{3}+\frac{q}{4}-\frac{r}{5}\right)\left(-\frac{p}{2}\right)$

(b) $\dfrac{22ax^2y^2}{27brx^2}:\dfrac{66x^2y}{18r^2s}$

(c) $8\frac{3}{4}:7$

(d) $\dfrac{35a^2}{43b^2}:14a$

(e) $\dfrac{\frac{34}{3}-\frac{91}{12}}{\left(\frac{7}{16}-\frac{17}{48}\right)\cdot 15}$

(f) $\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{m-n}$

(g) $\dfrac{3x^2-3xy}{x+y}-\dfrac{6y^2+6xy}{x-y}$

(h) $\dfrac{8a^2+8b^2+16ab}{\frac{a+b}{a-b}}$

(i) $\dfrac{a+1}{a^2-a}-\dfrac{a-1}{a^2+a}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{4}{a^2-1}$

<u>Eine periodische Dezimalzahl in einen gemeinen Bruch umwandeln:</u>

<u>Beispiel:</u> $0,2\overline{37}=?$
<u>Idee:</u> Periode eliminieren
<u>Vorgehensweise:</u> Sei $0,2\overline{37}=a \Rightarrow 23,7\overline{37}=100a$.

Nun ist es möglich, die Periode durch Subtraktion zu eliminieren:

$$\begin{aligned}
100a-a&=23,7\overline{37}-0,2\overline{37}\\
\Rightarrow 99a&=23,5\\
\Rightarrow 198a&=47\\
&\Rightarrow \underline{\underline{a=\frac{47}{198}}}
\end{aligned}$$

Aufgaben:

(a) Wandeln Sie $0,\overline{2}$ in einen gemeinen Bruch um.

(b) Wandeln Sie $\frac{1}{7}$ in eine Dezimalzahl um.

(c) Wandeln Sie $0,6\overline{1}$ in einen gemeinen Bruch um.

(d) Wandeln Sie $0,2\overline{27}$ in einen gemeinen Bruch um.

(e) Wandeln Sie $\frac{31}{99}$ in eine Dezimalzahl um.

(f) Wandeln Sie $0,3\overline{536}$ in einen gemeinen Bruch um.

1.4 Potenzen

Seien $a, x, y \in \mathbb{Q}$ (oder $\in \mathbb{R}$); $k, l \in \mathbb{Z}$. Sei o.B.d.A $k > l$.

(i) (a) $$x^k \cdot y^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k\text{-mal}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{k\text{-mal}} \overset{(A)}{\underset{(K)}{=}} \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{k\text{-mal}} = (x \cdot y)^k$$

(b) $$\left(\frac{x^k}{y^k}\right) = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{\text{k-mal}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{k\text{-mal}}} = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{y}}_{k\text{-mal}} = \left(\frac{x}{y}\right)^k$$

(ii) $$x^k \cdot x^l = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k\text{-mal}} \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{l\text{-mal}} = x^{k+l}$$

(iii) $$\frac{x^k}{x^l} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{k\text{-mal}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{l\text{-mal}}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{(k-l)\text{-mal}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \ldots \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \ldots \cdot \cancel{x}} = x^{k-l}$$

(iv) $$(x^k)^l = \underbrace{(x^k) \cdot (x^k) \cdot \ldots \cdot (x^k)}_{l\text{-mal}} = \underbrace{\underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{k\text{-mal}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{k\text{-mal}}}_{l\text{-mal}} = x^{k \cdot l}$$

Definition:

(a) $x^{-k} := \frac{1}{x^k}$

Beispiel der Herleitung: $5^{-3} \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{5}{5^4} \overset{(iii)}{=} \frac{\cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3}$

(b) $x^0 := 1$

Beispiel der Herleitung: $x^k \cdot x^0 \overset{(ii)}{=} x^{k+0} = x^k \Rightarrow x^0 = 1$

Notation: $x^1 = x$

Aufgaben:

(a) $a \cdot r^p + b \cdot s^p - c \cdot r^p + d \cdot s^p$

(b) $x^{3m-1} \cdot x^{m+1}$

(c) $\dfrac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 \cdot 6^2}$

(d) $\dfrac{5 \cdot a^{x+y} \cdot b^{3u+v}}{7 \cdot c^2} : \dfrac{5 \cdot c^4}{28 \cdot a^{y-x} \cdot b^{v-2u}}$

(e) (i) $(-u^2)^3$ (ii) $((-u)^2)^3$ (iii) $(-u^3)^2$ (iv) $-(u^3)^2$

1.5 Wurzeln & Potenzen mit rationalen Exponenten

Anregung: $(5^3)^{\frac{1}{3}} \overset{(iv)}{=} 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5 \Rightarrow 5^{\frac{1}{3}} := \sqrt[3]{5}$

Seien $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $u, v, x \in \mathbb{R}^+$, dann setzen wir $x^{\frac{p}{q}} \overset{(iv)}{=} (x^p)^{\frac{1}{q}} := \sqrt[q]{x^p}$.

Somit können die Potenzgesetze auf die Wurzeln folgendermaßen übertragen werden:

$$\text{(i')}\quad \text{(a)}\quad \sqrt[p]{u} \cdot \sqrt[p]{v} = u^{\frac{1}{p}} \cdot v^{\frac{1}{p}} \overset{\text{(i a)}}{=} (u \cdot v)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{u \cdot v}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}} = \frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \overset{\text{(i b)}}{=} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\frac{u}{v}}$$

$$\text{(ii')}\quad \sqrt[p]{u} \cdot \sqrt[q]{u} = u^{\frac{1}{p}} \cdot u^{\frac{1}{q}} \overset{\text{(ii)}}{=} u^{\frac{q+p}{p \cdot q}} = \sqrt[p \cdot q]{u^{q+p}}$$

$$\text{(iii')}\quad \frac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[q]{u}} = \frac{u^{\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{q}}} \overset{\text{(iii)}}{=} u^{\frac{q-p}{p \cdot q}} = \sqrt[p \cdot q]{u^{q-p}}$$

$$\text{(iv')}\quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{u}} = \left(u^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{(iv)}}{=} u^{\frac{1}{p \cdot q}} = \sqrt[p \cdot q]{u}$$

Bemerkung:

(a) Seien $u \in \mathbb{R}^+$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sqrt[p]{u^p} = |u| := \begin{cases} -u, & u < 0, \\ u, & u \geq 0. \end{cases}$

(b) Die Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ ist $i \in \mathbb{C}$ (Imaginäre Einheit der Komplexen Zahlen). Es gilt: $i^2 = -1$, also $\sqrt{-1} = \pm i$; Zahlen in $\mathbb{C}$ bestehen aus einem Realteil a und einem Imaginärteil b und haben die Form $z = a + i \cdot b$.
$\rightarrow$ Jede reelle Zahl hat Imaginärteil $b \equiv 0$.

Aufgaben:

(a) $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$

(c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}}$

(d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

(e) $\left(\sqrt{0,5}\right)^{-2}$

(f) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}}$

(g) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[6]{x^4}}} : \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[9]{x^7}}}{\sqrt[9]{x^7 \cdot \sqrt{x}}}$

Rationalmachen des Nenners:

Es gilt für $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \cdot 1 = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a \cdot \sqrt{b}}{b}.$

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{1 + 2 \cdot \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

1.6 Polynomdivision

Polynome haben die Form $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, ..., n.$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) & : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & & \\
\hline
 & 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 & \\
 & -(6x^3 & -12x^2) & & & \\
\hline
 & & 8x^2 & +8x & -48 & \\
 & & -(8x^2 & -16x) & & \\
\hline
 & & & 24x & -48 & \\
 & & & -(24x & -48) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Aufgaben:

(a) $(x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3) : (x - y)$

(b) $(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) : (x - 1)$

(c) $(x^3 - y^3) : (x - y)$

(d) $(x^3 + y^3) : (x + y)$

1.7 Logarithmen

Anregung: $2^x = 8 \rightarrow$ intuitiv ist die Lösung $x = 3$, aber allgemein? $\rightarrow \log_2 8 = x$

Logarithmus (logos = 'Verhältnis', arithmós = 'Zahl') ist eine Verhältniszahl.

$$\sim 1614 \text{ John Napier: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \log a - \log b = \log c - \log d$$

Seien $a, b, d \in \mathbb{R}^+;\ a, b, d \neq 1$.

Definition:

(a) $\log_b a = c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b^c = a$

(b) $\log_b 1 = 0$

(c) $\log_b b = 1$

Logarithmengesetze: Seien $a, b, d, x, y \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{llrcl}
\text{(i)} & & \log_b (x \cdot y) & = & \log_b x + \log_b y \\
\text{(ii)} & & \log_b \frac{x}{y} & = & \log_b x - \log_b y \\
\text{(iii)} & \text{(a)} & \log_b x^\alpha & = & \alpha \cdot \log_b x \\
 & \text{(b)} & \log_b \sqrt[n]{x} & = & \frac{1}{n} \cdot \log_b x \\
\text{(iv)} & & \log_b a & = & \log_b d \cdot \log_d a
\end{array}$$

Mithilfe der vierten Gleichung kann man einen beliebigen Logarithmus derart umschreiben, dass gilt:

$$\log_d a = \frac{\log_b a}{\log_b d}.$$

Häufig wird dies genutzt, um den allgemeinen Logarithmus mit einem der folgenden (bekannten) Logarithmen darzustellen:

(a) $\log_{10} a = \lg a$ dekadischer (oder Briggscher) Logarithmus

(b) $\log_e a = \ln a$ logarithmus naturalis (oder Neperscher Logarithmus)

(c) $\log_2 a = \text{ld } a$ binärer Logarithmus

Aufgabe: Formen Sie folgenden Ausdruck mit Hilfe der Logarithmengesetze um:

$$\log \frac{2 \cdot \sqrt{a+b} \cdot a^3 \cdot b^2}{\sqrt[3]{c} \cdot (a+c)^2}$$

1.8 Binomischer Lehrsatz und das Pascal'sche Dreieck

Satz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)} \cdot \cancel{(n-k-1)} \cdot \ldots \cdot \cancel{1}}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \cancel{(n-k)} \cdot \cancel{(n-k-1)} \cdot \ldots \cdot \cancel{1}}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Pascal'sches Dreieck:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & & & & & & & \\
0 & & & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & & \\
\mathrm{i} & & & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & \\
\mathrm{ii} & & & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & \\
\mathrm{iii} & & & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & & \\
\mathrm{iv} & & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 & \\
\mathrm{v} & 0 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & 0
\end{array}$$

Die Einträge im Pascal'schen Dreieck sind jeweils Binomialkoeffizienten. Daher ist es nützlich für beispielsweise:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

oder

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

2 Mengenlehre

2.1 Begriffe

'Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung $\mathcal{M}$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von $\mathcal{M}$ genannt werden) zu einem Ganzen.'

- Georg Cantor, 1869 -

$a \in \mathcal{M}$ (a ist ein Element von $\mathcal{M}$.)
$a \notin \mathcal{M}$ (a ist kein Element von $\mathcal{M}$.)
$\emptyset$ - die leere Menge

Bemerkung: Eine Menge enthält jedes Element nur ein Mal.

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 2, 5, 2\} = \{1, 2, 5\}$$

Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Mengen.

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ enthalten die selben Elemente.
($\mathcal{M}_1$ gleich $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten.
($\mathcal{M}_1$ ist Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten
und es gibt Elemente in $\mathcal{M}_2$, die nicht in $\mathcal{M}_1$ sind.
($\mathcal{M}_1$ ist echte Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

Es gilt stets: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ und $\emptyset \subseteq \mathcal{M}$.
Mengen können auf zwei Arten angegeben werden:

1. Explizite Angabe aller Elemente: $\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 6, 7\}$; $\mathcal{M}_2 = \{\heartsuit, \bigstar, \square\}$

2. Angabe der charakteristischen Eigenschaft:
$\mathcal{M}_3 = \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$; $\mathcal{M}_4 = \{k \mid k \text{ ist Küchengerät}\}$

Aufgabe: Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c\}$ an.

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$$

Dies ist die Potenzmenge von M. Sie enthält alle Teilmengen von M. Für die Kardinalität von $\mathcal{P}(M)$ (Anzahl der Elemente (wenn endlich) der Potenzmenge) gilt:

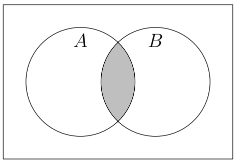
$$\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}.$$

In unserem Beispiel ist die Anzahl der Elemente in M gleich 3 ($\#M = 3$), somit ist $\#\mathcal{P}(M) = 2^3 = 8$.

2.2 Mengenoperationen

Seien A, B (nichtleere) Mengen.

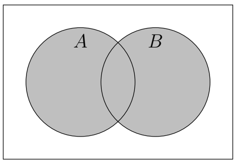
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \text{ - Durchschnitt von } A \text{ und } B.$$



Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B disjunkt.

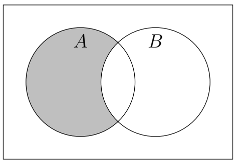
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \text{ - Vereinigung von } A \text{ und } B.$$

(Das oder ist ein mathematisches - 'nicht ausschließendes oder'.)



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} \text{ - Differenzmenge.}$$

(Achtung: A/B ist die Faktormenge!)



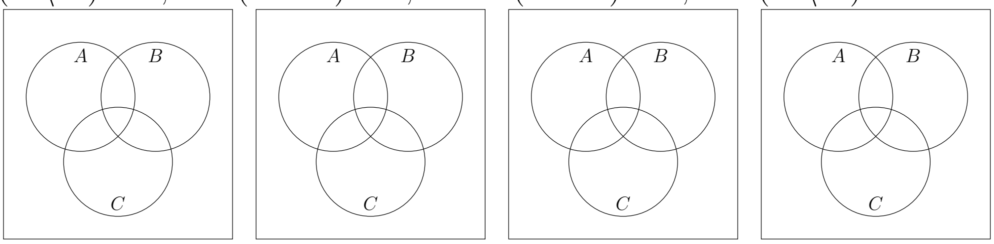
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \text{ - kartesisches Produkt,}$$

Menge aller geordneten Paare (x, y).

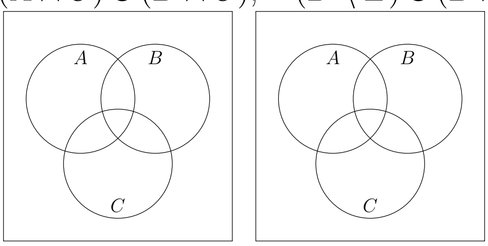
Beispiel: $A = \{1, 3, 5\}; B = \{a, d\} \rightarrow A \times B = \{(1, a), (1, d), (3, a), (3, d), (5, a), (5, d)\}$

Aufgaben: Markieren Sie die gesuchten Mengen im Venn-Diagramm.

(a) $(A \setminus C) \cap B$; $(C \cap B) \cap A$; $(A \cup B) \cap C$; $(B \setminus C) \cup A$



(b) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(D \setminus E) \cup (B \cap A)$



2.3 Zahlbereiche

Zahlbereich		Algebraische Ansätze
$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$	entsteht durch wiederholte Addition mit 1 besitzt neutrales Element der Multiplikation
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	besitzt neutrales Element der Addition
$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$	abgeschlossene Addition durch inverse Elemente (inverse Operation: Subtraktion)
$\mathbb{Q}^+$ positive rationale Zahlen	$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$	abgeschlossene Multiplikation durch inverse Elemente (inverse Operation: Division) aber: Addition nicht abgeschlossen
$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$	abgeschlossene Addition und Multiplikation
$\mathbb{R}$ reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ $\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ ist irrational }\}$	Eine Zahl heißt irrational, wenn sie nach dem Komma unendlich ist, aber nicht periodisch.
$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	Nullstellen sämtlicher Polynome mit reellen Koeffizienten

2.4 Intervallschreibweise für Mengen reeller Zahlen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; \quad \text{alternativ }]a, b[$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}; \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}; \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}; \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Aufgaben: Seien $I_1 = [1, 3), I_2 = [3, 7], I_3 = (-2, 10)$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

$I_1 \cap I_2$; $\quad I_1 \cap I_3$; $\quad I_1 \cup I_2$; $\quad I_1 \setminus I_2$; $\quad I_3 \setminus I_2$; $\quad (I_1 \cup I_2) \cap I_3$

3 Logik

griech. logos='das Wort' $\rightarrow$ Logik (math.) befasst sich mit Aussagen.

3.1 Aussagen

Aussagen: sinnvolle sprachliche Gebilde mit der Eigenschaft, entweder wahr oder falsch zu sein
$\rightarrow$ jeder Aussage p kann man einen Wahrheitswert zuordnen.

$$w(p) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{falls } p \text{ falsch ist} \end{cases}$$

p: Eine Stunde hat 60 Minuten. $\quad w(p) = 1$

q: 8 ist eine Primzahl. $\quad w(q) = 0$

$\rightarrow$ man kann Aussagen miteinander verknüpfen, sodass neue Aussagen entstehen:

Symbol	Bezeichnung	Lesart
$\neg p$ $\sim p$ $\bar{p}$	Negation	'*Nicht* p'
$p \wedge q$	Konjunktion	'p und q'
$p \vee q$	Disjunktion	'p oder q'
$p \Rightarrow q$	Implikation	'wenn p, dann folgt q'
$p \Leftrightarrow q$	Äquivalenz	'p genau dann, wenn q'

Bei einer Äquivalenz gilt immer: $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$.

Wahrheitstabelle:

$w(p)$	$w(q)$	$w(\neg p)$	$w(p \wedge q)$	$w(p \vee q)$	$w(p \Rightarrow q)$	$w(q \Rightarrow p)$	$w(p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1

Für die Negation gelten: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ und $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.

Implikation und Äquivalenz sind in der Mathematik essentiell.

$$
\begin{array}{cc}
 & p \text{ ist hinreichend für } q \\
p \Rightarrow q & q \text{ ist notwendig für } p \\
 & p \text{ impliziert } q \\
 & \\
p \Leftrightarrow q & p \text{ ist hinreichend und notwendig für } q
\end{array}
$$

<u>Beispiel:</u> A: $f'(x_0) = 0$; B: $f''(x_0) \neq 0$; C: f besitzt in x_0 einen Extrempunkt

$$
\begin{gathered}
C \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg C \\
A \wedge B \Leftrightarrow C
\end{gathered}
$$

Wenn in der Mathematik mehrere Aussagen äquivalent zueinander sind, nutzt man häufig einen sog. 'Ringschluss', um dies zu zeigen. Das heißt:
Statt $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D \Leftrightarrow A$ zu zeigen, reicht es auch, $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow A$ zu zeigen.

3.2 Aussageformen und Quantoren

In der Mathematik hängen Aussagen oft von Variablen ab, darum betrachten wir Aussageformen $p(x)$, die von einer Variable abhängen.
<u>Beispiel:</u> $p(x) : x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow$ man kann $p(x)$ keinen Wahrheitswert $w(p(x))$ zuordnen.
1. Für x konkrete Objekte einsetzen.
($p(1)$ wahr; $p(2)$ falsch)
2. Variable x wird durch Quantoren gebunden.

<u>wichtigste Quantoren:</u>
$\forall$ - Allquantor ('Für alle') $\forall x \in \mathbb{R}$
$\exists$ - Existenzquantor ('Es existiert (mindestens) ein') $\exists x \in \mathbb{N}$
$\exists!$ - ('Es existiert genau ein')
$\nexists$ - ('Es existiert kein')

Auf das gewählte Beispiel angewendet:
$u : (\forall x \in \mathbb{R} : p(x))$ falsch
$v : (\exists x \in \mathbb{R} : p(x))$ wahr
$\neg u : (\exists x \in \mathbb{R} : \neg p(x))$ wahr
$\neg v : (\forall x \in \mathbb{R} : \neg p(x))$ falsch

Beispiel aus der Analysis (Stetigkeit): $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Negiere folgende Aussagen und prüfe den Wahrheitswert, wenn möglich:

(a) $17 < 23$

(b) 8 ist gerade.

(c) Alle Autos in Leipzig sind weiß.

(d) Alle Studenten haben Logik nicht verstanden.

4 Beweistechniken

4.1 Vollständige Induktion

Wiederholung Summenzeichen: Schreibe als Summenzeichen.

(a) $2 + 8 + 18 + 32 + 50 + 72 + 98 + 128$

(b) $\frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x^4} + \frac{4}{3x^5} + \frac{5}{4x^6} + \frac{6}{5x^7}$

vollständige Induktion:
Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl k richtig, wenn sie:
1. für $k = 1$ richtig ist. (manchmal auch $k = 0$ oder $k = 2$)
2. aus der Richtigkeit der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl n die Richtigkeit für $n + 1$ schließen kann.

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

(IA): Da $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV): Sei $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ derart, dass:

$$\sum_{k=1}^{\tilde{n}} k = \frac{\tilde{n} \cdot (\tilde{n}+1)}{2}$$

(IB):

$$\tilde{n} \mapsto (\tilde{n}+1) : \sum_{k=1}^{\tilde{n}+1} k = \frac{(\tilde{n}+1) \cdot (\tilde{n}+2)}{2}$$

(IS):

$$\sum_{k=1}^{\tilde{n}+1} k = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} k + (\tilde{n}+1) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{\tilde{n} \cdot (\tilde{n}+1)}{2} + (\tilde{n}+1) = \frac{\tilde{n}^2 + \tilde{n}}{2} + \frac{2\tilde{n}+2}{2} = \frac{\tilde{n}^2 + 3\tilde{n} + 2}{2} = \frac{(\tilde{n}+1) \cdot (\tilde{n}+2)}{2}$$

Aufgaben: Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0; \forall\, q \in \mathbb{R}$$

4.2 Indirekte Beweise

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist irrational

Beweis: Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational

$$\Rightarrow \exists\ p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad p, q \text{ sind teilerfremd}$$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad |()^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p \text{ ist gerade, also } p = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$2q^2 = 4m^2$$

$$q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow q \text{ ist gerade} \quad \lightning$$

$$\Rightarrow p \text{ und } q \text{ hätten den selben Teiler 2.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \text{ ist irrational.} \quad \square$$

5 Zahlensysteme

Es gibt verschiedene Arten von Zahlensystemen.

Wichtig für uns sind:
- Additionssysteme (römische Zahlen, z.B. MMXIX$= 1000 + 1000 + 10 - 1 + 10 = 2019$),
- polyadische Zahlensysteme/Stellenwertsysteme.

Bildungsgesetz für Stellenwertsysteme:

$$a = \sum_{k=-m}^{n} z_k \cdot B^k \qquad (m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0),$$

z.B. ist dies für die Zahl $1034,28507$:

3	2	1	0		-1	-2	-3	-4	-5
1	0	3	4	,	2	8	5	0	7

gebräuchliche Zahlensysteme:

Zahlensystem	Basis	zulässige Ziffern	Vorkommen
Dualsystem	2	0,1	Programmierung
Oktalsystem	8	0,1,2,3,4,5,6,7	Datenzugriffsrechte
Dezimalsystem	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9	Mitteleuropäische Mathematik
Hexadezimalsystem	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F	Farb-Codierung, Datenverarbeitung
Vigesimalsystem	20	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F,G,H,I,J	Maya-Mathematik

Umrechnung:

Von einem beliebigen Zahlsystem in das Dezimalsystem durch ausmultiplizieren:
Beispiel: $(74104)_5 = 4 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 7 \cdot 5^4 = 4 + 25 + 500 + 4375 = (4914)_{10}$

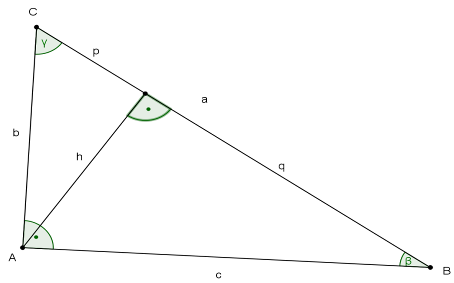
Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlsystem durch Division mit Rest:
Beispiel: $(2534)_{10}$ in das Oktalsystem (Basis 8) umwandeln.

$$\begin{array}{ccccc} 2534 & : & 8 & = & 316 \quad R6 \\ 316 & : & 8 & = & 39 \quad R4 \\ 39 & : & 8 & = & 4 \quad R7 \\ 4 & : & 8 & = & 0 \quad R4 \end{array}$$

$$\Rightarrow (2534)_{10} = (4746)_8$$

6 Trigonometrie

Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck:



a ... Hypotenuse; b, c ... Katheten, h ... Höhe, p, q ... Hypotenusenabschnitte

Ein Winkel kann im Grad- und Bogenmaß angegeben werden. Die Umrechnung ist am Einheitskreis sichtbar. (Erinnerung: Der Einheitskreis ist der Kreis mit Flächeninhalt $A = \pi$ und Umfang $u = 2 \cdot \pi$.)

$$90° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{2} \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{4} \text{ Umfang des (Einheits-)Kreises}$$

$$180° \mathrel{\widehat{=}} \pi \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{2} \text{ Umfang des (Einheits-)Kreises}$$

$$360° \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot \pi \mathrel{\widehat{=}} \text{ voller Umfang des (Einheits-)Kreises}$$

Damit ergibt sich für die Umrechnung eines beliebigen Winkels α aus dem Gradmaß in einen Winkel β des Bogenmaßes und umgekehrt:

$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{180°}}, \text{ was zu folgender Umrechnung führt: } \boxed{\beta = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}} \text{ und } \boxed{\alpha = \frac{180° \cdot \beta}{\pi}}$$

Am rechtwinkligen Dreieck gelten außerdem:

der bekannte Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

der Kathetensatz: $b^2 = p \cdot a, c^2 = q \cdot a$

der Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

die Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

die Seitenverhältnisse: $\sin\beta = \frac{b}{a}$, $\cos\beta = \frac{c}{a}$, $\tan\beta = \frac{b}{c}$, $\cot\beta = \frac{c}{b}$

(Analog können Seitenverhältnisse für den Winkel γ aufgestellt werden.)

Weitere Verhältnisse:

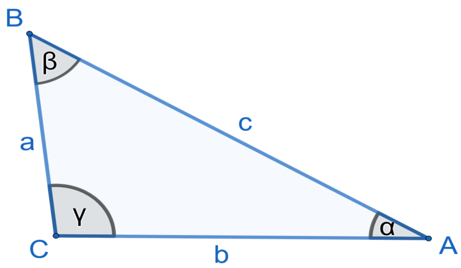
$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta},\ \cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{\tan\beta}$$

$$\sin\beta^2 + \cos\beta^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} \overset{\text{Pyth.}}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$1 + \tan\beta^2 = 1 + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2+b^2}{c^2} \overset{\text{Pyth.}}{=} \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{\cos\beta^2}$$

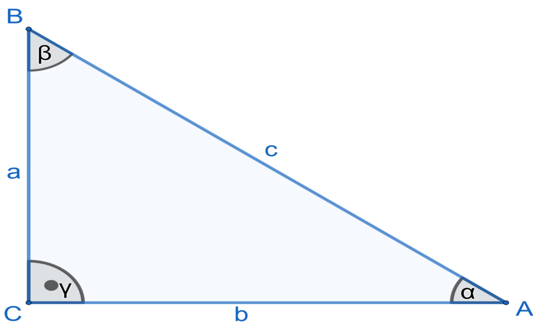
$$1 + \cot\beta^2 = \frac{1}{\sin\beta^2}$$

Aufgabe: geg.: $\alpha = 30°$, $b = 5$cm ges.: β, c, a



Trigonometrische Formeln:

Ziel: Lösungsformel für Winkelfunktionen mit 2 verschiedenen 'Winkeln' im Argument. Herleitung am allgemeinen Dreieck:



Wissen: $\sin\alpha = \frac{h}{b}, \cos\alpha = \frac{q}{b}, \sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ bzw. $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$ Sinussatz

Kosinussatz $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ bzw. $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$ oder $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

Daraus lassen sich folgende Formeln finden:

(a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

(b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta$

(c) $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$

(d) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

(e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(f) $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(g) $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(h) $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

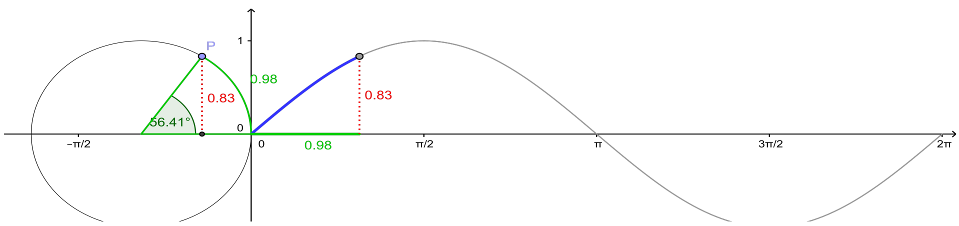
Aufgaben:

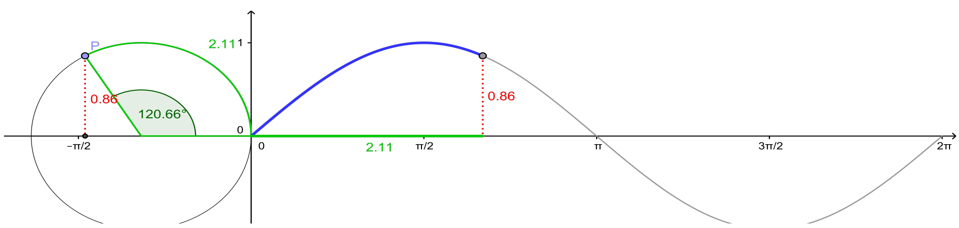
1. Beweisen Sie (b) für den Fall '+'.

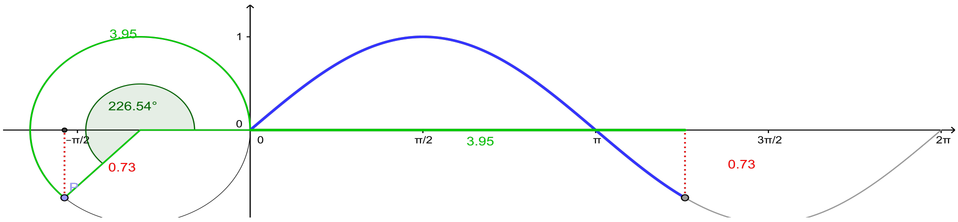
2. Vereinfachen Sie $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

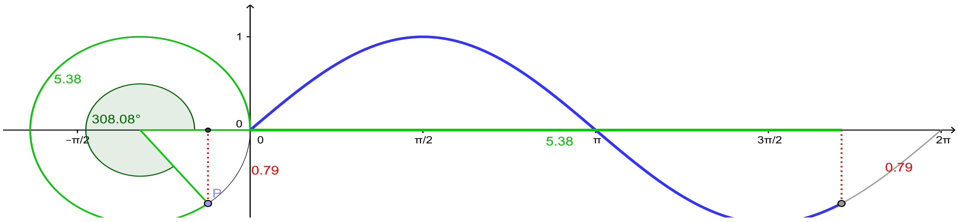
Winkelfunktionen am Einheitskreis:

Die Winkelfunktionen leiten sich vom Einheitskreis ab. Dies wird am Sinus folgendermaßen deutlich:





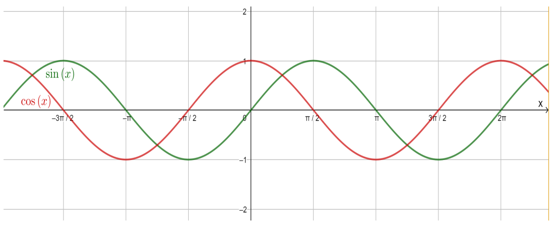




Die Sinusfunktion hat damit folgende Eigenschaften:

$$\text{- } 2\pi\text{-periodisch} \Leftrightarrow \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$
$$\text{- } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$\text{- } \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\text{- } \sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Weitere Funktionen sind die Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion. Hier exemplarisch Sinus und Kosinus:



7 Komplexe Zahlen

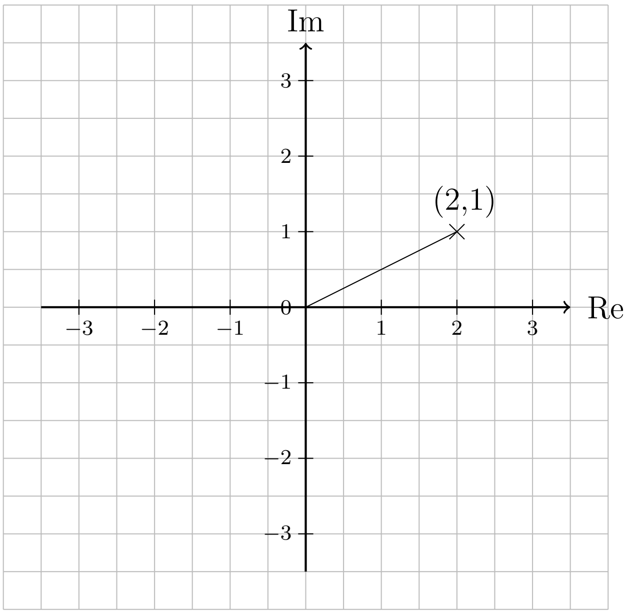
Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit. Ursprung: Lösung der Gleichung $x^2+1=0$

$$\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Bezeichnung: Sei $z \in \mathbb{C}$, also $z = a + i \cdot b$. Dann heißen:

$$\mathrm{Re}\,(z) = a \text{ der Realteil von } z,$$
$$\mathrm{Im}\,(z) = b \text{ der Imaginärteil von } z \text{ und}$$
$$i \text{ die imaginäre Einheit.}$$

Darstellung komplexer Zahlen:



Es gilt hierbei: $i^2 = -1$.
Man kann analoge Rechengesetze von den reellen Zahlen übertragen. Seien also $x = a+i\cdot b, y = c+i\cdot d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(i) $x + y = (a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b + d)$

(ii) $x \cdot y = (a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = (ac - bd) + i \cdot (bc + ad)$

Beispiel:

(a) $(3 + 4i) \cdot i - (2 - 4i) = 3i - 4 - 2 + 4i = -6 + 7i$

(b) $(1 - i)(2 + i)(3 - i) = (2 + i - 2i + 1)(3 - i) = (3 - i)(3 - i) = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$

Auf den komplexen Zahlen kann man eine weitere Operation, die sogenannte Konjugation, betrachten:
Abbildung: $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a + i \cdot b \mapsto a - i \cdot b$, also $\overline{a + i \cdot b} = a - i \cdot b$

Der Betrag einer komplexen Zahl lässt sich mit dem Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^2$ identifizieren (Erinnerung: der (bisher bekannte) Betrag von Vektoren). Es gilt:
$|a + i \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aufgaben:

(a) $|3 + 4 \cdot i|$

(b) $(\sqrt{3} - 5 \cdot i) \cdot (5 + \sqrt{3}i)$

(c) Beweisen Sie: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

(d) Beweisen Sie: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(e) Beweisen Sie: $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$.

Man kann ebenso den Quotienten aus 2 komplexen Zahlen bilden. Um diesen auf die Gestalt $a + i \cdot b$ zu bringen, muss man mit dem Komplexkonjugierten des Nenners erweitern.
Es gilt:

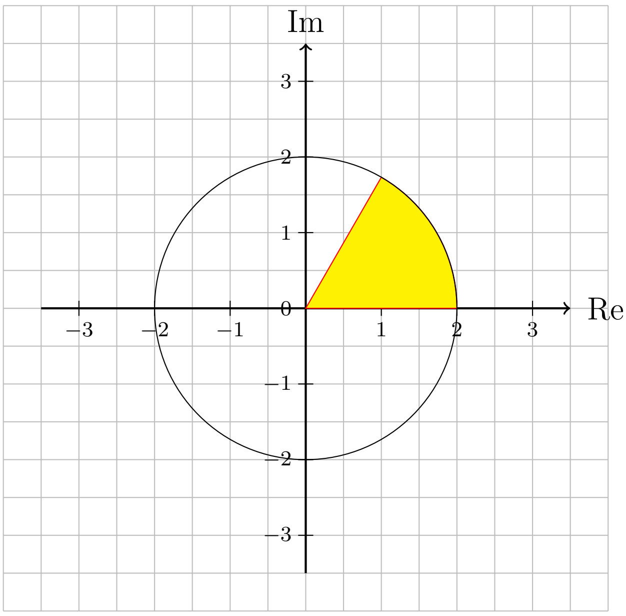
$$\frac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} = \frac{(a + i \cdot b)(c - i \cdot d)}{(c + i \cdot d)(c - i \cdot d)} = \frac{ac - i \cdot ad + i \cdot bc + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Aufgaben: Berechnen Sie:

(a) $\dfrac{1 + 2 \cdot i}{i}$

(b) $\dfrac{\sqrt{2} + 3 \cdot i}{\sqrt{3} - 2 \cdot i}$

Die komplexen Zahlen können auch als Punkt auf einem Kreisbogen mit Radius r und Winkel φ dargestellt werden. Dies nennt man Polarkoordinatendarstellung.



$z = a + i \cdot b = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$ (Eulersche Identität) mit $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)$.
Es gelten dabei: $r = |z|$ und φ ist der Winkel zwischen positiver reeller Achse und komplexer Zahl, also $\tan\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z)}$.

Aufgaben: Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinaten um:

(a) i

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$

(c) $\sqrt{i}$

(d) $3 - 3 \cdot i$

8 Gleichungen und Ungleichungen

Bei Gleichungen der Form $ax + b = c$ sind erlaubte Umformungen:

1. Addition/Subtraktion mit $\alpha \in \mathbb{R}$ (zum Beispiel $-b$),
2. Multiplikation/Division mit $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zum Beispiel $\frac{1}{a}, a \neq 0$).

Diese müssen auf beiden Seiten angewendet werden, damit Äquivalenz (Gleichwertigkeit) erhalten bleibt.

Achtung: Beim Potenzieren können Scheinlösungen auftauchen (Definition der Wurzel!, Potenzieren ist im engen Sinne keine Äquivalenzumformung) → PROBE.

Beispiel: $x = -1 \quad \to \quad x^2 = 1 \quad \to \quad x_{1,2} = \pm 1$

8.1 Wahrheitswerte für Gleichungen

$2 = 2$	wahr	
$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$	wahr	
$1 = 2$	falsch	
$x + x = 2x$	wahr für alle x (allgemeingültig)	$\mathcal{L} = \mathbb{R}$
$x + 2 = 3$	wahr für $x = 1,$ sonst falsch	$\mathcal{L} = \{1\}$
$x^2 = 4$	wahr für $x = -2$ und $x = 2,$ sonst falsch	$\mathcal{L} = \{-2, 2\}$

8.2 Ungleichungen

... sind von der Form $T_1 < T_2, T_1 \leq T_2, T_1 > T_2$ oder $T_1 \geq T_2$ (T_1, T_2 mathematische Terme).

Es gelten:
1. Wenn man die Seiten vertauscht, muss man das Relationszeichen umdrehen.
2. Wenn $T_1 \leq T_2, T_2 \leq T_3 \Rightarrow T_1 \leq T_3$ (Transitivität).

Mindestens ein Term sollte eine Unbekannte enthalten.

Umformungsregeln:

$$T_1 < T_2 \to T_1 + T_3 < T_2 + T_3$$

$$T_1 < T_2 \to T_1 \cdot T_3 \quad \begin{cases} < T_2 \cdot T_3, & \text{falls } T_3 > 0, \\ > T_2 \cdot T_3, & \text{falls } T_3 < 0. \end{cases}$$

(Analog für andere Relationszeichen.)

Aufgaben: Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an:

(a) $x + 2 \geq 2x + 3$

(b) $\dfrac{2x+3}{2} \leq \dfrac{2x-1}{-3}$

(c) $\dfrac{2x-3}{2} > \dfrac{2x-1}{-3}$

8.3 Quadratische Gleichungen

... sind Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$.
Normalform: $x^2 + px + q = 0$ besitzt die bekannte Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Herleitung der Formel:
$0 = x^2 + px + q \Leftrightarrow 0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\Leftrightarrow |x + \frac{p}{2}| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Eigenschaften:

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist die Diskriminante der Lösungsformel.
Die Anzahl der reellen Lösungen hängt von dieser Diskriminante ab:
Ist sie > 0, so existieren zwei reelle Lösungen. Ist sie $= 0$, so existiert eine reelle Lösung (zwei Lösungen fallen zusammen $\rightarrow$ Doppelwurzel). Wenn sie < 0 ist, so existiert keine reelle Lösung (sondern ein Paar komplex konjugierter Lösungen).

Aufgaben: Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:

(a) $2x - (x-2)^2 = (x-2)^2 - 4(x+1)$

(b) $\dfrac{x^2 + 2x}{2x^2 + 2x - 4} = 1$

(c) $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = 0$

(d) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Methode der Reduktion des Grades:
Wenn x_s eine Lösung von $\sum_{l=0}^{n} a_l \cdot x^l = 0$ ist, dann kann man den Linearfaktor $(x - x_s)$ mittels Polynomdivision abspalten. Der Grad des Polynoms wird so um 1 verringert.
Gleichungen mit ungeradem Grad haben immer mindestens eine reelle Lösung!

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung:

$$x^3 + x^2 - 4x + 4 = 8$$

8.4 Quadratische Ungleichungen

Beispiel: $x^2 \leq +6x - 5$
1. Schritt: Ungleichung umformen, bis auf einer Seite ein quadratisches Polynom in Normalform steht
$\rightarrow$ Parabel ist nach oben geöffnet.

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

2. Schritt: Nullstellen bestimmen.

$$x_{1,2} = 3 \pm 2$$

Fallunterscheidung nach Nullstellen:

1. $P(x)$ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1, x_2 (wie im Beispiel).

$$\text{Falls} \quad P(x) \leq 0 \rightarrow \mathcal{L} = [x_1, x_2], \quad P(x) < 0 \rightarrow \mathcal{L} = (x_1, x_2).$$

(innerhalb des Intervalls)

$$\text{Falls} \quad P(x) > 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2] \quad P(x) \geq 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus (x_1, x_2).$$

(außerhalb des Intervalls)

2. $P(x)$ hat eine doppelte Nullstelle x_0.

$$\text{Falls } P(x) \leq 0 \rightarrow \mathcal{L} = \{x_0\}.$$
$$\text{Falls } P(x) \geq 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R}.$$
$$\text{Falls } P(x) > 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$
$$\text{Falls } P(x) < 0 \rightarrow \mathcal{L} = \emptyset.$$

3. $P(x)$ hat keine reelle Nullstelle.

$$\rightarrow P(x) > 0 \text{ oder } P(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, sodass $P(x) \leq 0$ oder $P(x) < 0$ gilt.

Aufgaben: Geben Sie die Lösungsmengen an:

(a) $x^2 + 2x > 3$

(b) $x^2 < -x + 6$

(c) $0 < 3x^2 - 6x + 3$

(d) $-x^2 - 6 < -x$

(e) $x^2 \leq 3x - 2$

(f) $x^2 + 2 \geq \frac{9}{2}x$

(g) $x^2 - 4x \leq -4$

(h) $x + 4 < -2x^2 - 11x - 9$

8.5 Bruchungleichungen

Beispiel: $\frac{2}{x+1} \leq 1, \qquad x \neq -1$
Beide Seiten mit dem Hauptnenner der auftretenden Brüche multiplizieren und anschließende Fallunterscheidung bzgl. der Vorzeichen des Hauptnenners.

Fall 1: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \rightarrow I_1 = (-1, \infty)$

Nun die Ungleichung für diesen Fall lösen.
$\frac{2}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x+1 \Leftrightarrow 1 \leq x \rightarrow I_2 = [1, \infty)$
Das erste Lösungsintervall ist $\mathcal{L}_1 = I_1 \cap I_2 = [1, \infty) = I_2$.

Fall 2: $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \rightarrow I_3 = (-\infty, -1)$
$\frac{2}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq x+1 \Leftrightarrow 1 \geq x \rightarrow I_4 = (-\infty, 1]$
Das zweite Lösungsintervall ist $\mathcal{L}_2 = I_3 \cap I_4 = (-\infty, -1) = I_3$.

Damit ist die gesamte Lösungsmenge $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathbb{R} \setminus [-1, 1)$.

Aufgaben: Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $\frac{3x-8}{2x-1} > -5, \qquad x \neq \frac{1}{2}$

(b) $\frac{3x+9}{2x-3} > 6, \qquad x \neq \frac{3}{2}$

8.6 Betragsungleichungen

Beträge sind durch eine Fallunterscheidung definiert und müssen dementsprechend auch betrachtet werden.
Beispiel: $|3-5x| > 5$
Fall 1: $3-5x < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < x \rightarrow I_1 = (\frac{3}{5}, \infty)$
Dann wird die Betragsungleichung folgendermaßen aufgelöst:
$-(3-5x) > 5 \Leftrightarrow x > \frac{8}{5} \rightarrow I_2 = (\frac{8}{5}, \infty)$
$\Rightarrow \mathcal{L}_1 = I_1 \cap I_2 = I_2$.

Fall 2: $3-5x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \geq x \rightarrow I_3 = (-\infty, \frac{3}{5}]$
$3-5x > 5 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} > x \rightarrow I_4 = (-\infty, -\frac{2}{5})$
$\Rightarrow \mathcal{L}_2 = I_3 \cap I_4 = I_4 \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}]$

Aufgaben: Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an:

(a) $|2x+7| \geq 2$

(b) $|2x-5| > 2(x+1)$

(c) $|2x-5| < |2x+1|$

8.7 Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbestimmte mindestens einmal im Radikant einer Wurzel vorkommt.
Beispiel: $\sqrt[3]{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$
1. Schritt: Wurzel isolieren.
2. Schritt: Potenzieren $\rightarrow$ Scheinlösungen können entstehen $\rightarrow$ PROBE.

Aufgabe: Geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-4} = 5$$

8.8 Exponentialgleichungen

Unbekannte tritt nur im Exponenten auf $\rightarrow$ häufig nicht lösbar, außer bei der Form:

$$a^{P_1(x)} = b^{P_2(x)} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+, P_1(x), P_2(x) \text{ sind Polynome.}$$

Fall 1: $a = b$, dann wende $\log_c$ auf beiden Seiten an.
$\rightarrow P_1(x) = P_2(x)$
Fall 2: $a \neq b$, beliebiger Logarithmus anwendbar.
$\rightarrow P_1(x) \cdot \log_c a = P_2(x) \cdot \log_c b \Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x) \cdot \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x) \cdot \log_a b$

Aufgabe: Geben Sie die Lösungsmenge an:

$$5^{3x-5} = 25^{2x+1}$$

8.9 Logarithmengleichungen

Unbekannte tritt im Argument einer logarithmischen Funktion auf.
Da die Lösung nur für positive Argumente definiert ist, muss der Definitionsbereich bestimmt werden.
$\rightarrow$ Probe, ob der Logarithmus im Definitionsbereich liegt.

1. Schritt: Logarithmengesetze anwenden und Gleichung auf folgende Formen bringen:

$$\log_a P_1(x) = b \quad a \neq 1 \qquad \text{oder} \qquad \log_a P_1(x) = \log_a P_2(x).$$

2. Schritt: Potenzieren.

$$P_1(x) = a^b \qquad\qquad P_1(x) = P_2(x)$$

3. Schritt: PROBE

Bemerkung: Bei $\log_a P_1(x) = \log_b P_2(x)$ versuchen, Basen mit Logarithmengesetzen umzuwandeln.

Aufgaben: Geben Sie die Lösungsmengen an:

(a) $\log_4 x - \log_4 (x-2) = 2$

(b) $\log_3 x + \log_3 (2x+1) = \log_3 (x+4)$

(c) $\log_9 (2x^2+1) = \log_3 (x+1)$

9 Matrizen und Gaußalgorithmus

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

besteht aus m Gleichungen, n Unbekannten und Koeffizienten a_{ij} $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$.

Es heißt homogen, wenn $b \equiv 0$. Wenn (mindestens) ein $b_i \neq 0$ ist, so heißt das LGS inhomogen.

Ein geordnetes n-Tupel $(y_1, ..., y_n)$ reeller Zahlen ist ein Element der Lösungsmenge, wenn es gleichzeitig die m Gleichungen löst.
Fälle:

(a) Es existiert eine bestimmte Lösung (eindeutig).

(b) Es gibt unendlich viele Lösungen, d.h., wir erhalten eine (mehr)parametrige Lösungsschar.

(c) Es gibt keine Lösung.

Das obige LGS kann auch als erweiterte Koeffizientenmatrix dargestellt werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Gaußalgorithmus
Ziel: Ein zum Ausgangssystem äquivalentes 'gestrafftes' System konstruieren.
Dreiecksgestalt (eindeutige Lösung):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

Trapezgestalt (unendlich viele Lösungen):

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

andere Gestalt (keine Lösung):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 4 \end{array}$$

Wann bleibt die Lösungsmenge erhalten?
$\rightarrow$ Man darf folgende elementare Umformungen durchführen:
1. Eine Gleichung mit einem reellen Faktor (außer 0) multiplizieren.
2. Zwei Gleichungen miteinander vertauschen.
3. Eine Gleichung zu einer anderen addieren.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & = & 10 \\ x & + & 2z & + & 3y & = & 6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & 2y & + & 2z & = & 4 \\ & & & & -z & = & -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \rightarrow y = 1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow x = 1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgaben: Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender LGS:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & - & 2z & = & 12 \\ -4x & & & + & 3z & = & -17 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w & + & 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 2w & + & 3x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 3w & + & 4x & + & 5y & + & 6z & = & 7 \\ & & x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$