

---

# **Grundlagen der Technischen Informatik 2**

**Digitaltechnik  
Rechneraufbau**

**Dr. M. Bogdan**

**Technische Informatik**

**[bogdan@informatik.uni-leipzig.de](mailto:bogdan@informatik.uni-leipzig.de)**

# Übersicht

---

- **Einleitung**
- **Grundlagen**
  - ⇒ aus TI 1
- **Schaltnetze**
  - ⇒ **KV-Diagramme (Wdh.)**
  - ⇒ **Minimierung nach Quine MC-Cluskey**
- **Speicherglieder**
  - ⇒ **RS-Flipflop**
  - ⇒ **D-Flipflop**
  - ⇒ **JK-Flipflop**
  - ⇒ **T-Flipflop**

# Übersicht

---

## ○ Schaltwerke

- ⇒ Darstellung endlicher Automaten
- ⇒ Minimierung der Zustandszahl
- ⇒ Einfluss der Zustandskodierung

## ○ Spezielle Schaltnetze und Schaltwerke

- ⇒ Multiplexer, Demultiplexer, Addierer
- ⇒ Register, Schieberegister, Zähler

## ○ Rechnerarithmetik

- ⇒ Formale Grundlagen
- ⇒ Addition und Subtraktion
- ⇒ Multiplikation und Division
- ⇒ Arithmetisch-Logische Einheit (ALU)

# Übersicht

---

- **Ein minimaler Rechner**
  - ⇒ **Befehlssatz**
  - ⇒ **Realisierung**
  - ⇒ **Arbeitsweise und Programmierung**
- **Aufbau von Rechnersystemen**
  - ⇒ **Komponenten eines Rechnersystems**
  - ⇒ **Prinzipieller Aufbau eines Mikroprozessors**
  - ⇒ **Steuerwerk und Mikroprogrammierung**
  - ⇒ **Rechenwerk**
  - ⇒ **Das Adresswerk**

# Übersicht

---

- **Rechner- und Gerätebusse**
  - ⇒ interne Busse
  - ⇒ externe Busse
- **E/A-Steuerungen**
  - ⇒ Prinzip der Datenein- und -ausgabe
  - ⇒ Parallele Schnittstellen
  - ⇒ Serielle Schnittstellen
  - ⇒ Analoge Ein- und Ausgabe
- **Peripheriegeräte**
  - ⇒ Tastatur
  - ⇒ Graphikadapter
  - ⇒ Festplatten- und Diskettenlaufwerke
  - ⇒ Sonstige E/A-Geräte

# Literatur

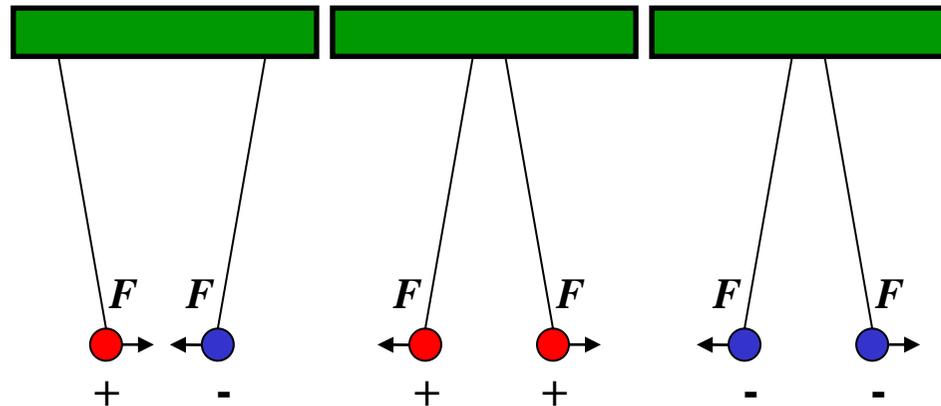
---

**Die Vorlesung basiert auf den Lehrbüchern:**

- **W. Schiffmann, R. Schmitz: „Technische Informatik 1  
Grundlagen der digitalen Elektronik“  
Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (1992)**
- **W. Schiffmann, R. Schmitz: „Technische Informatik 2  
Grundlagen der Computertechnik“  
Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (1992)**
- **H. Bähring: „Mikrorechnersysteme“  
Springer Lehrbuch, Springer-Verlag (1994)**

## 2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld (Wdh.)

---



○ Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus

⇒ ungleiche Ladungen ziehen sich an

⇒ gleiche Ladungen stoßen sich ab

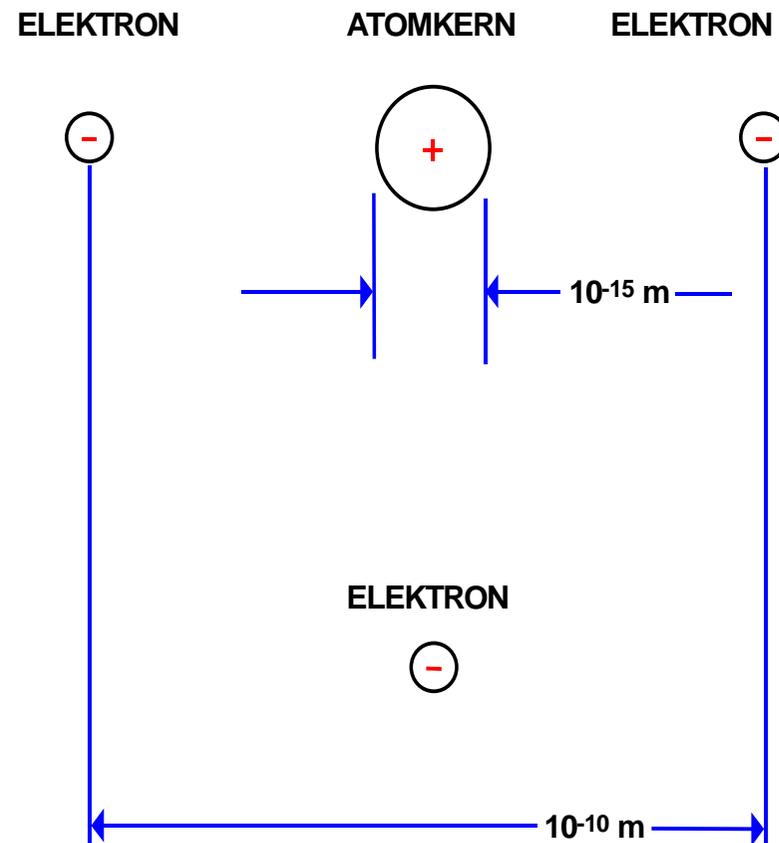
# 2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld (Wdh.)

## 2.1 Elektrische Ladung

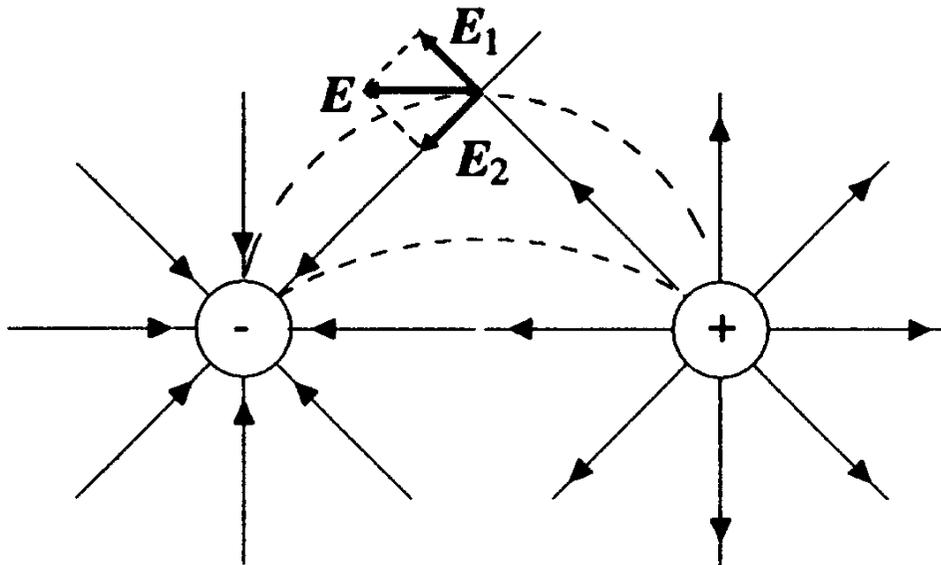


- Die Einheit der elektrischen Ladung ist  
 $1 \text{ C} = 1 \text{ Asec}$
- Die elektrische Ladung eines Elektrons beträgt  
 $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Man benötigt  
 $6,242 \cdot 10^{18}$  Elektronen  
um die Ladung 1 C zu erhalten
- Die Ladungsmenge  $Q$  ist das Vielfache der Elementarladung

$$Q = n \cdot e_0$$

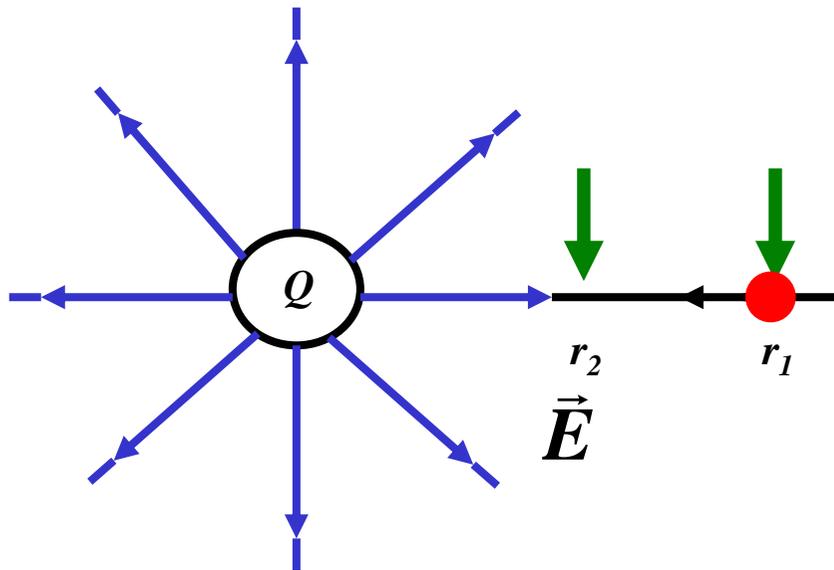


- **Feldlinien dienen zur Veranschaulichung des elektrischen Feldes**
  - ⇒ sie zeigen immer in Richtung der wirkenden Kraft,
  - ⇒ sie erfüllen den Raum kontinuierlich,
  - ⇒ sie verlaufen von einer positiven zu einer negativen Ladung,
  - ⇒ sie sind nicht geschlossen.



**Elektrische Felder  
überlagern sich additiv**

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n$$



- Das elektrische Potential ist eng verbunden mit dem Begriff Arbeit. Physikalische Arbeit ergibt sich als Kraft mal Weg

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- Im elektr. Feld wirkt auf eine Ladung q die Kraft

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

- Damit beträgt die Arbeit um eine Ladung q von r<sub>1</sub> nach r<sub>2</sub> zu bewegen

$$W_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

# Die elektrische Spannung

(Wdh.)

- Verschiebt man eine Ladung von P 1 nach P 2, so muß die Arbeit  $W_{1,2}$  aufgebracht werden

$$W_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} dr = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} dr$$

⇒ Die Spannung ist

$$\vec{U}_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} dr$$

⇒ Es ergibt sich allgemein

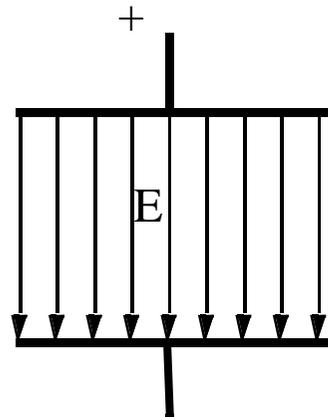
$$W = U \cdot q \Rightarrow U = \frac{W}{q}$$

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$$

⇒ Die Einheit der Spannung ist

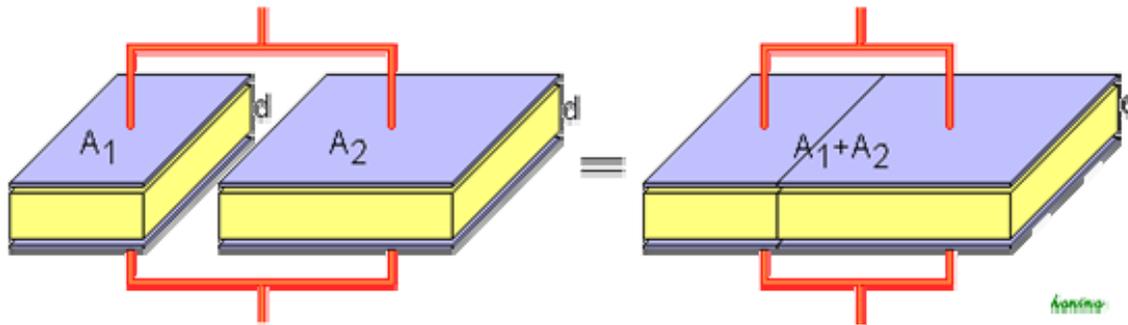
$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}}$$

- Auf metallischen Leitern sind elektrische Ladungen frei beweglich und verteilen sich aufgrund der Abstoßung gleichmäßig auf der gesamten Oberfläche.
- Feldlinien des elektrischen Feldes sind senkrecht zur Oberfläche gerichtet. Das Innere eines metallischen Hohlraumes ist ein feldfreier Raum (Faraday'scher Käfig).
- Eine parallele Anordnung zweier Metallflächen (Elektroden), von denen eine positiv, die andere negativ geladen ist, heißt Kondensator.



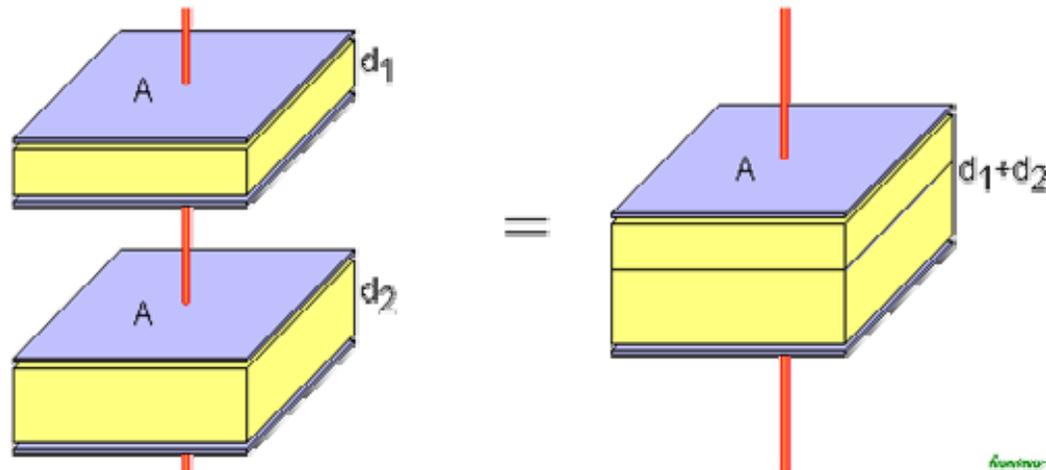
Elektrisches Feld eines geladenen Plattenkondensators

## ○ Parallelschaltung



$$C_{ges} = \sum_{n=1}^N C_n$$

## ○ Reihenschaltung



Bilder: Wikipedia.de

$$C_{ges} = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}}$$

## 2.2 Der elektrische Strom

(Wdh.)

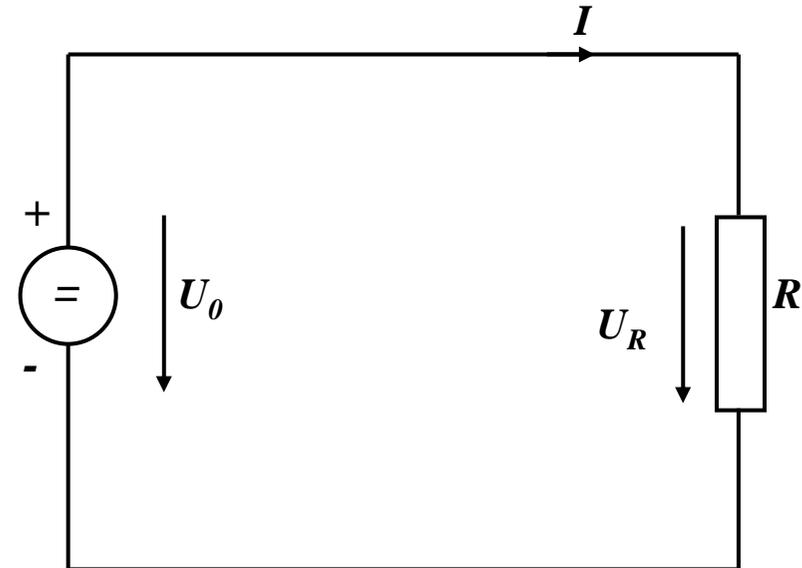
- Ist der Ladungstransport in eine Richtung und gleichmäßig, dann sprechen wir von Gleichstrom.
- Zusammenhang zwischen Stromstärke, Spannung und Widerstand wird durch das **Ohmsche Gesetz** und die **Kirchhoffschen Gesetz** beschrieben.
- Elektrischer Strom ist der Fluss von Elektronen
- Die Stromstärke  $I$  entspricht der bewegten Ladungsmenge pro Zeiteinheit

$$I = \frac{Q}{t}$$

- Fließen durch einen Leiter pro Sekunde  $n$  Coulomb [C], so messen wir einen Strom von  $n$  Ampere [A]

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = \frac{1}{1,602} \cdot 10^{19} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

- Ein elektrischer Stromkreis ist eine Anordnung aus
  - ⇒ Spannungsquelle (Stromquelle)
  - ⇒ Verbraucher  $R$
  - ⇒ Verbindungsleitungen
- In der Spannungsquelle wird Energie aufgewendet
  - ⇒  $(W < 0)$
- In  $R$  wird Energie verbraucht
  - ⇒  $(W > 0)$
- Der elektrische Strom fließt (per Definition) von Plus (+) nach Minus (-)
- Die Elektronen fließen von Minus (-) nach Plus (+)
- Die Spannungsquelle bewirkt im Verbraucher  $R$  einen Stromfluss von von Plus nach Minus (Pfeilrichtung)



## 2.3 Ohmsches Gesetz

(Wdh.)

- Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen dem Strom  $I$  und der Spannung  $U$

⇒ ohmsches Gesetz

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

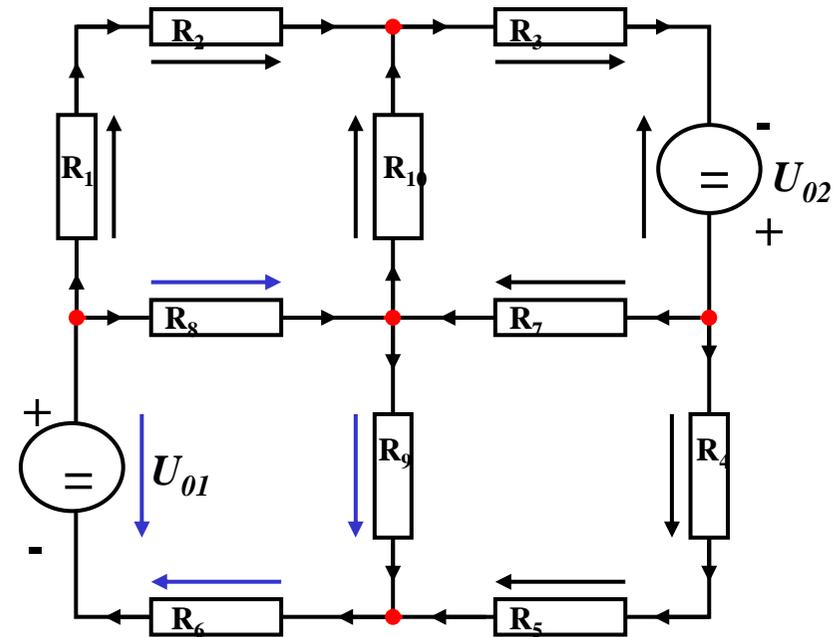
- Die Einheit für den Widerstand ist Ohm  $\Omega$

$$1\Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

## 2.4 Die kirchhoffschen Sätze

(Wdh.)

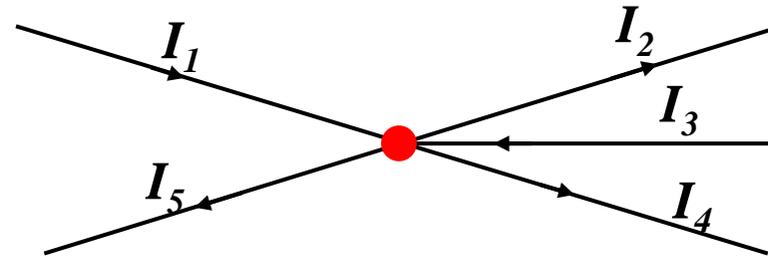
- Nur selten wird an einer Spannungsquelle nur ein einzelner Verbraucher  $R$  angeschlossen
- Eine Anordnung aus Spannungsquellen und Verbrauchern heißt Netz
- Es besteht aus Knoten und Maschen
  - ⇒ **Knoten**: Verzweigungspunkte
  - ⇒ **Masche**: Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird
- Richtung der Pfeile (Vorzeichen)
  - ⇒ Spannung ist von Plus nach Minus gerichtet
  - ⇒ Strom fließt von Plus nach Minus



# Knotenregel (1. kirchhoffscher Satz)

(Wdh.)

- In einem **Knoten** ist die Summe aller Ströme Null
  - ⇒ An keiner Stelle des Netzes werden Ladungen angehäuft
- Definition der Stromrichtung für die mathematische Formulierung
  - ⇒ zufließende Ströme werden mit einem **positiven** Vorzeichen behaftet
  - ⇒ abfließende Ströme werden mit einem **negativen** Vorzeichen behaftet



$$0 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5$$

oder

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3$$

allgemein

$$\sum_{i=0}^n I_i = 0$$

# Maschenregel (2. kirchhoffscher Satz) (Wdh.)

- Bei einem geschlossenen Umlauf einer **Masche** ist die Summe aller Spannungen Null

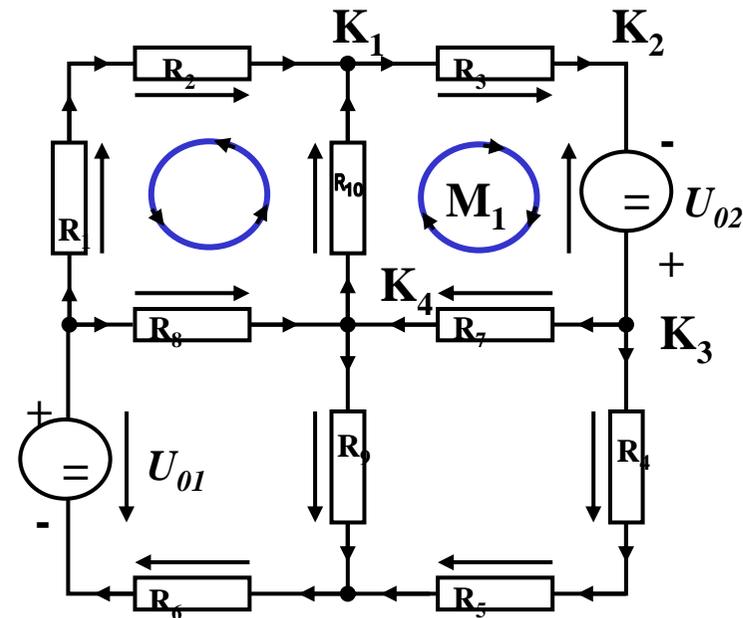
⇒ die Spannungsquellen erzeugen die Spannungen  $U_{01}$  und  $U_{02}$

⇒ durch die Widerstände fließt ein Strom

⇒ nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Spannung

$$U = R \cdot I$$

⇒ die Knotenpunkte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  können deshalb unterschiedliches Potenzial besitzen

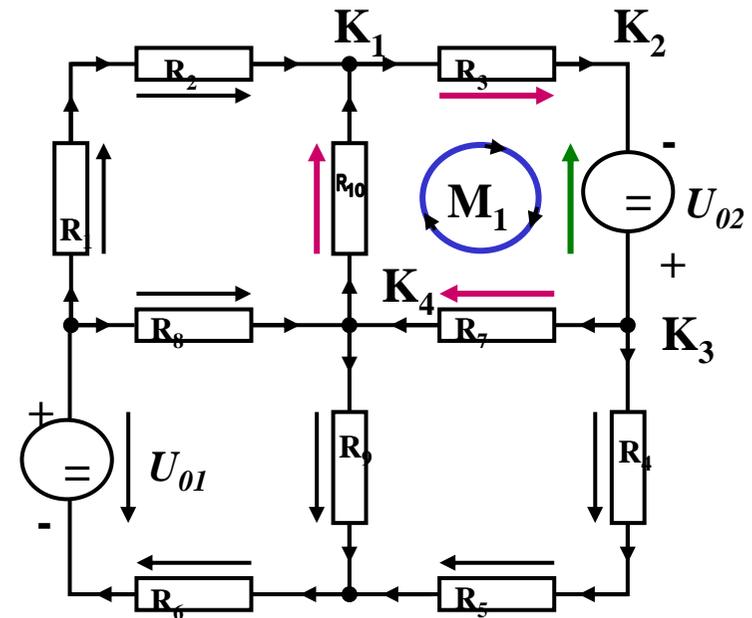


# Maschenregel (2. kirchhoffscher Satz) (Wdh.)

- Werden die Knotenspannungen addiert, so folgt:

$$U_{K_{12}} + U_{K_{23}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

- Vorzeichen der Spannung
  - ⇒ die Spannungsrichtung der Quellen ist vorgegeben (von + nach -)
  - ⇒ Umlaufrichtung der **Masche** wird festgelegt
  - ⇒ Spannungspfeile mit der Umlaufrichtung werden **positiv** gezählt
  - ⇒ Spannungspfeile gegen die Umlaufrichtung werden **negativ** gezählt



$$U_{K_{12}} - U_{02} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = U_{02}$$

# Anwendung 1: Knotenregel

(Wdh.)

Sie haben einen neuen Personal Computer gekauft.

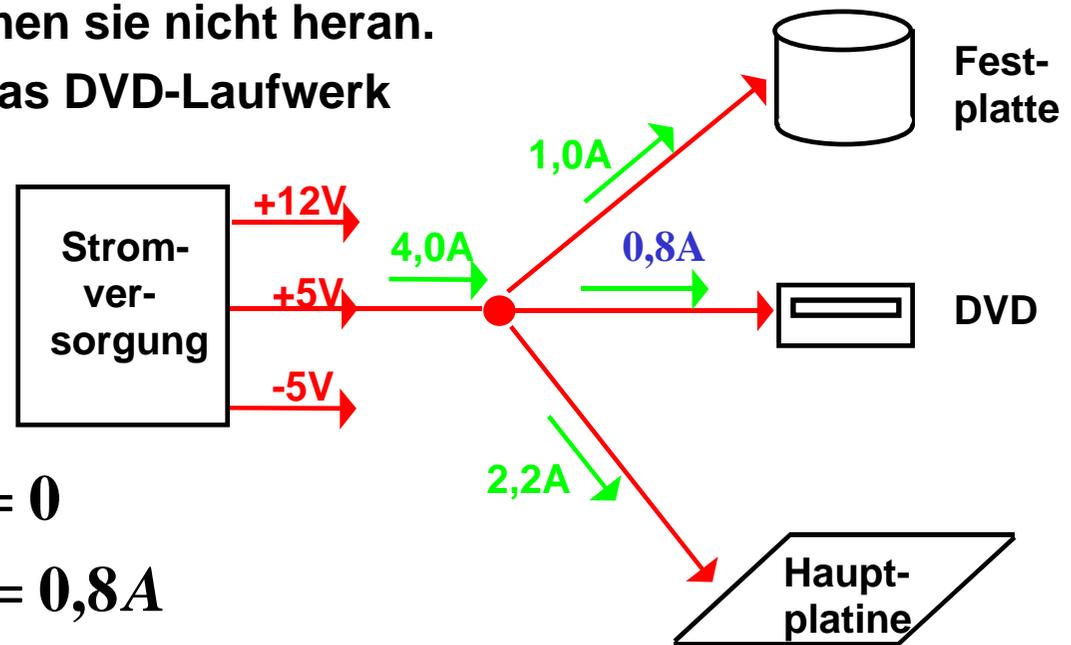
Sie benutzen ein Strommeßgerät (Ampere-Meter) und stellen damit fest, dass die 5 Volt Stromversorgung Ihres PC im eingeschalteten Zustand 4,0 A liefert. Versorgt wird damit die Hauptplatine, das Festplattenlaufwerk und das DVD-Laufwerk.

Sie messen, dass der Strom in die Hauptplatine 2,2 A beträgt und der Strom in die Festplatte 1,0 A.

An das DVD-Laufwerk kommen sie nicht heran.

→ Wieviel Strom bekommt das DVD-Laufwerk bei der Spannung 5 V?

$$\sum_{n=1}^4 I_n = 0$$
$$I_{ein} - I_{Fest} - I_{HP} - I_{DVD} = 0$$
$$4,0A - 1,0A - 2,2A - I_{DVD} = 0$$
$$4,0A - 1,0A - 2,2A = I_{DVD} = 0,8A$$



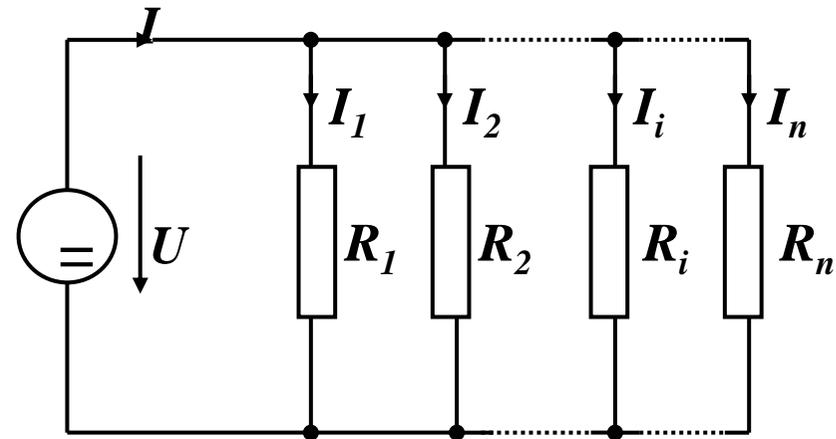
# Parallelschaltung von Widerständen (Wdh.)

- Für die Teilströme  $I_1, I_2, \dots, I_n$  gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}$$

- Nach Knotenregel:

$$\begin{aligned} I_{ges} &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\ &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \\ &= U \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \end{aligned}$$



- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

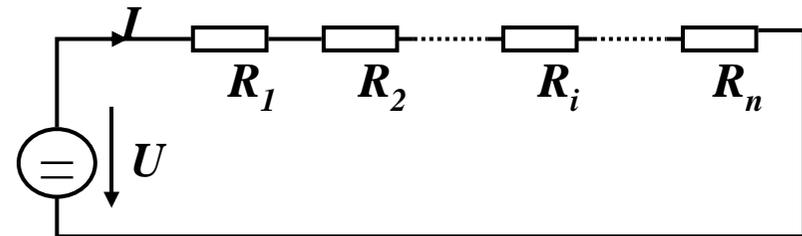
# Reihenschaltung von Widerständen (Wdh.)

- Für die Spannungen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  an den Widerständen gilt:

$$U_1 = I \cdot R_1, U_2 = I \cdot R_2, \dots, U_n = I \cdot R_n$$

- Nach Maschenregel:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ &= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n \\ &= I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$



- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$R_{\text{gesamt}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k$$

# 0 Einleitung

---

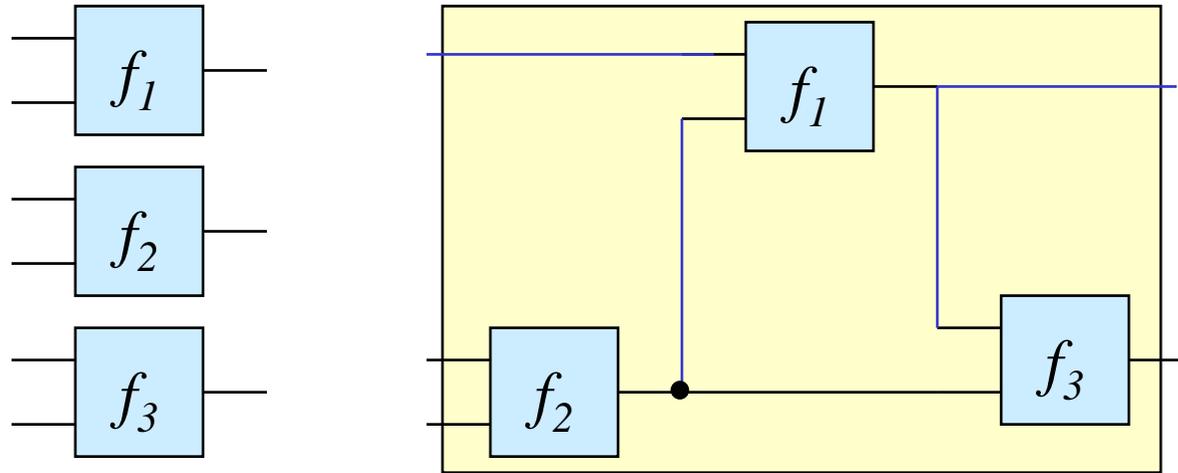
**Der Entwurf elektronischer Systeme ist gekennzeichnet durch:**

- **Zunahme der Komplexität und Integrationsdichte**
- **höhere Packungsdichten aufgrund geringerer Strukturgrößen**
- **steigende Anforderungen (Platzbedarf, Taktrate, Leistungsverbrauch, Zuverlässigkeit)**
- **kurze Entwicklungszeiten (time to market)**
- **Wiederverwendung von Entwurfsdaten (Re-use)**

 **Die Entwicklung elektronischer Systeme ist bei der heutigen Komplexität nur durch eine strukturierte Vorgehensweise beherrschbar!**

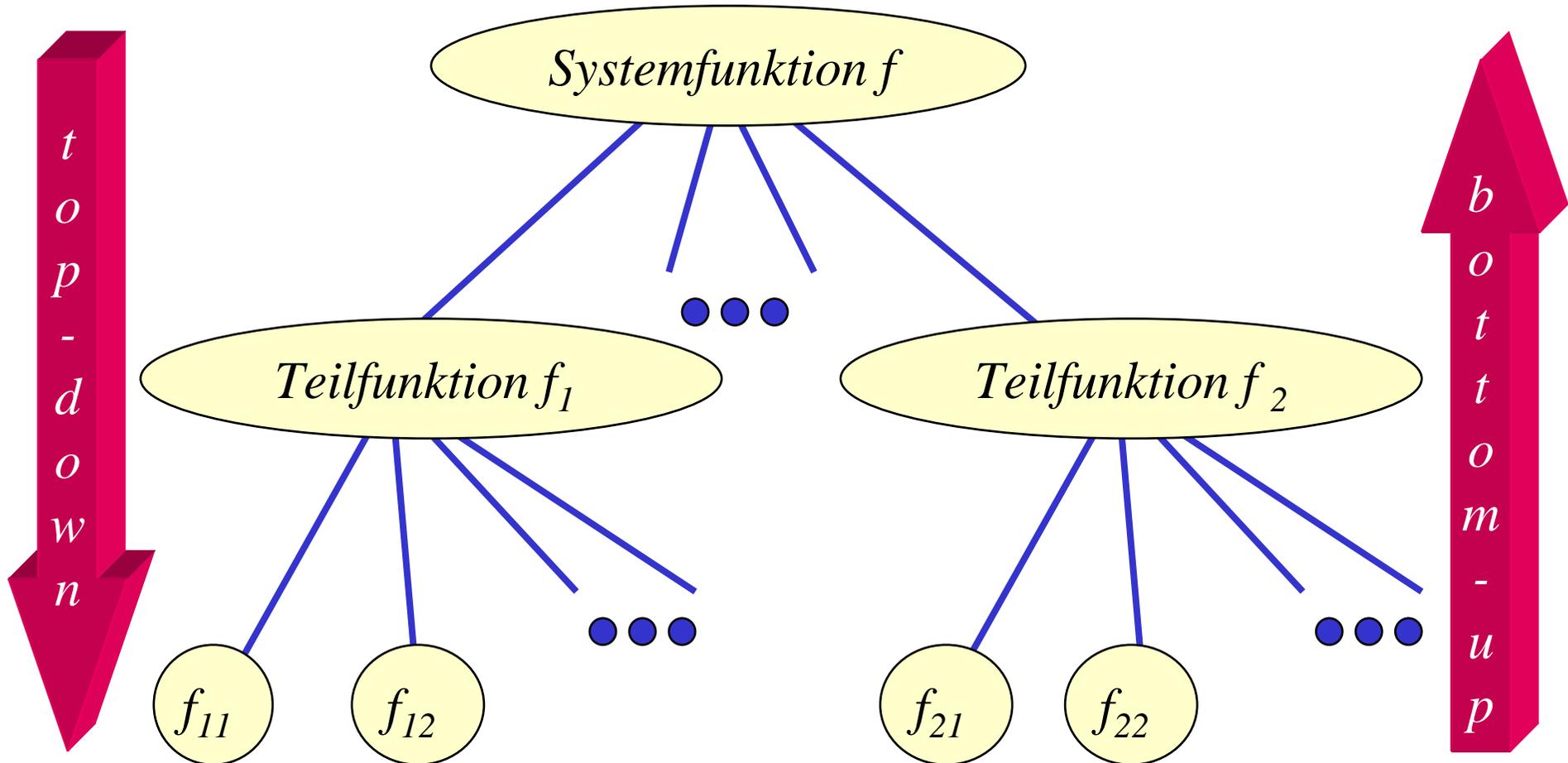
# Grundprinzip des Entwurfs

---



*Komponenten* + *Struktur*  
= *gewünschtes Verhalten*

# „top-down“ und „bottom-up“



# Technische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

---

- **Korrekte Realisierung unter Beachtung des statischen und dynamischen Verhaltens der verwendeten Bauelemente**
- **Berücksichtigung technischer Beschränkungen (Anzahl der Eingänge, begrenzte Belastbarkeit der Ausgänge, zur Verfügung stehende Bausteine (Bausteinbibliothek), Temperaturgrenzen, Speicherplatz (bei PLAs), Taktfrequenz)**
- **Gewährleistung hoher Systemzuverlässigkeit (leichte Testbarkeit, Selbsttest, Fehlertoleranz, zuverlässiger Betrieb)**
- **Berücksichtigung von Forderungen an die Gebrauchseigenschaften (universelle Einsatzmöglichkeit, großer Funktionsumfang)**
- **Berücksichtigung technologischer Nebenbedingungen (Kühlung, Versorgungsspannung)**
- **Vermeidung von Störeinflüssen (elektromagnetische Felder)**

# Ökonomische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

---

- **Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand)**
  - ⇒ Lohnkosten
  - ⇒ Rechnerbenutzung, Softwarelizenzen
- **Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand)**
  - ⇒ Bauelemente, Gehäuseformen
  - ⇒ Kühlung
- **Geringe Kosten für die Inbetriebnahme**
  - ⇒ Kosten für den Test
  - ⇒ Fertigstellung programmierbarer Bauelemente
- **Geringe Kosten für den Betrieb**
  - ⇒ Wartung
  - ⇒ Stromverbrauch

# Entwurfsziele

---

- **Manche Kriterien stehen im Widerspruch**
  - ⇒ **zuverlässigere Schaltungen erfordern einen höheren Realisierungsaufwand**
  - ⇒ **Verringerung des Realisierungsaufwand erfordert eine Erhöhung der Entwurfskosten**
- **Ziel des Entwurfs ist das Finden des günstigsten Kompromisses aus**
  - ⇒ **Korrektheit der Realisierung**
  - ⇒ **Einhaltung der technologischen Grenzen**
  - ⇒ **ökonomische Kriterien**

☞ **Wir betrachten in dieser Vorlesung nur die Minimierung des Realisierungsaufwands**

# 1 Minimierungsverfahren

(Wdh.)

- **Finden von Minimalformen Boolescher Funktionen**
  - ⇒ ohne Betrachtung der Zieltechnologie
  - ⇒ mit Betrachtung der Zieltechnologie
- **Drei Minimierungsansätze**
  - ⇒ algebraische Verfahren
  - ⇒ graphische Verfahren
  - ⇒ tabellarische Verfahren
- **Man unterscheidet**
  - ⇒ **exakte Minimierungsverfahren (z.B. Quine McCluskey), deren Ergebnis das absolute Minimum einer Schaltungsdarstellung ist**
  - ⇒ **heuristische Minimierungsverfahren auf der Basis von iterativen Minimierungsschritten**

# Darstellung Boolescher Funktionen durch Funktionstabellen

(Wdh.)

- Darstellung des Verhaltens einer Booleschen Funktion mit Hilfe einer vollständigen Funktionstabelle
  - ⇒ Jeder Belegung der Booleschen Variablen wird ein Funktionswert zugeordnet
  - ⇒  $f(x_2, x_1, x_0) \rightarrow y$ , mit  $x_i, y \in \{0,1\}$

Index	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

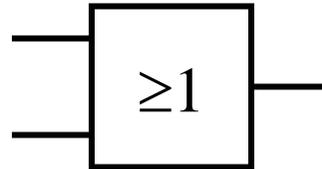
$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

# Wichtige Funktionen

(Wdh.)

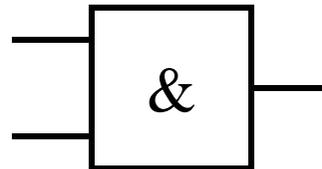
**ODER**

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> ∨ x <sub>2</sub>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



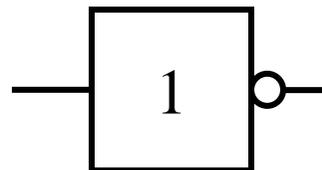
**UND**

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> ∧ x <sub>2</sub>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



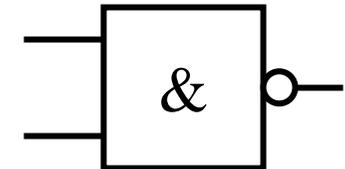
**Nicht**

x <sub>1</sub>	$\overline{x_1}$	
0	1	
1	0	



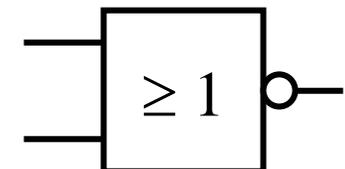
**NAND**

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> $\overline{\wedge}$ x <sub>2</sub>
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



**NOR**

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> $\overline{\vee}$ x <sub>2</sub>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



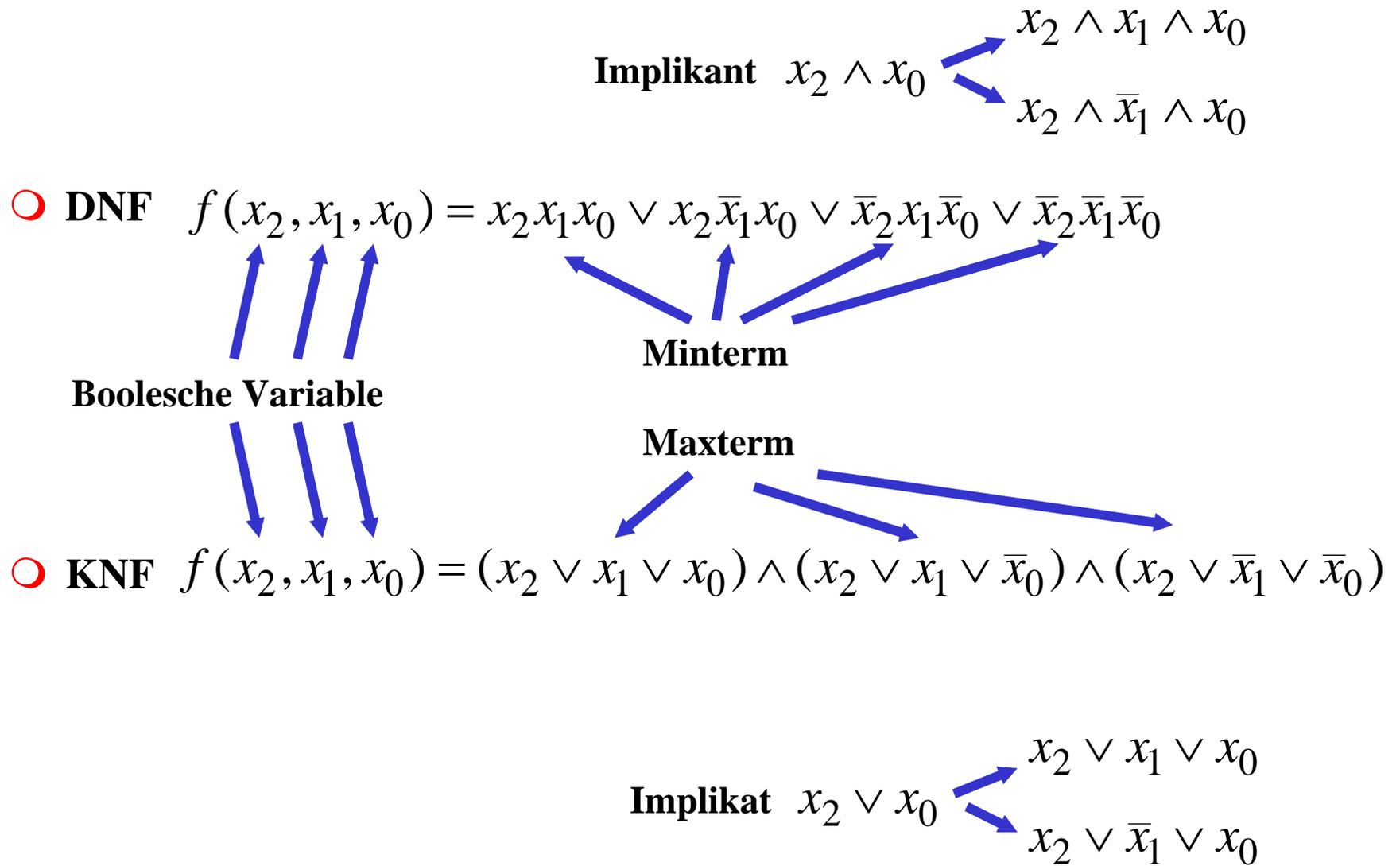
# Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe aus TI1

(Wdh.)

- **Boolesche Variable** Variable, die den Wert wahr (1) oder falsch (0) annehmen kann
- **Produktterm:** UND-Verknüpfung von Booleschen Variablen
- **Literal:** Variable oder deren Negation
- **Implikant:** Produktterm, der eine oder mehrere „1“-Stellen einer booleschen Funktion beschreibt (impliziert)
- **Implikat:** Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen
- **Minterm:** Implikant, der genau eine „1“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **Maxterm:** Implikat, des genau eine „0“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **disjunktive Normalform:** Darstellung der Funktion, die nur aus Mintermen besteht (DNF)
- **konjunktive Normalform:** Darstellung der Funktion, die nur aus Maxtermen besteht (KNF)

# Beispiel

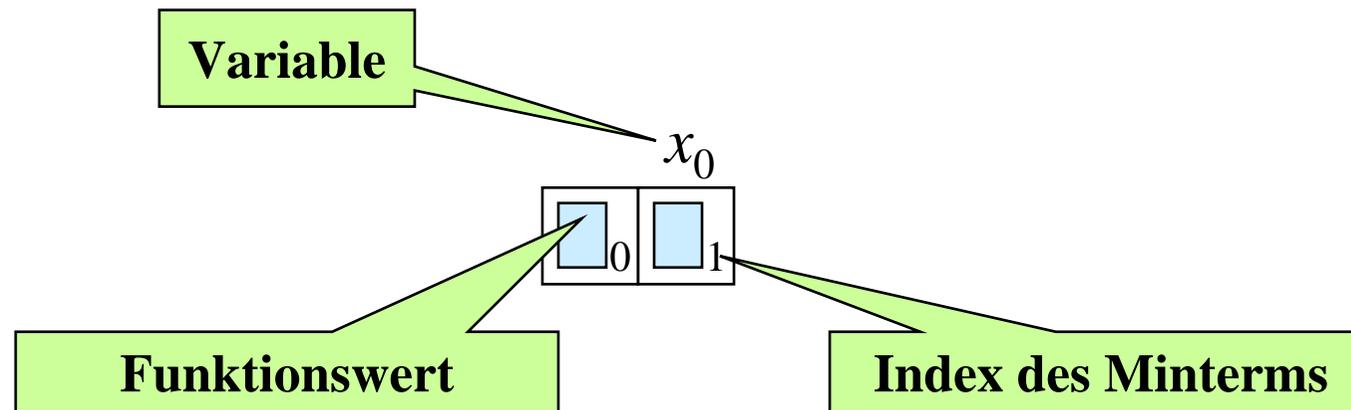
(Wdh.)



# 1.1 KV-Diagramme

(Wdh.)

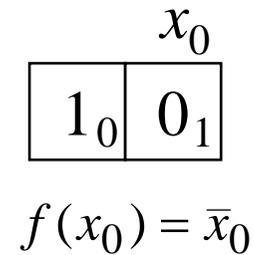
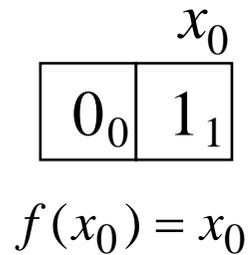
- Nach Karnaugh und Veitch
- Möglichkeit, Boolesche Funktionen übersichtlich darzustellen
  - ⇒ bis 6 Variablen praktisch einsetzbar
- Ausgangspunkt ist ein Rechteck mit 2 Feldern



# KV-Diagramme

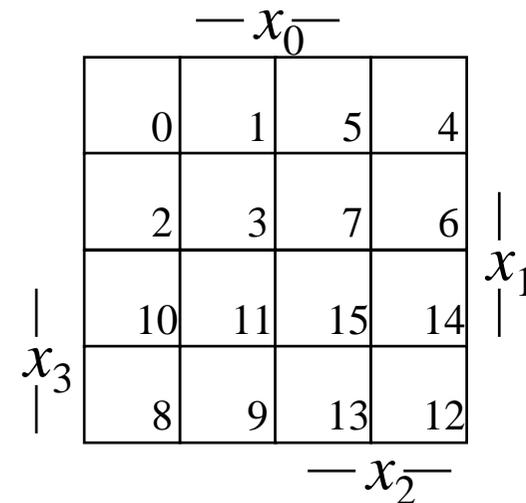
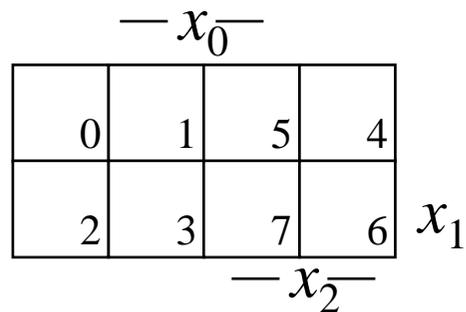
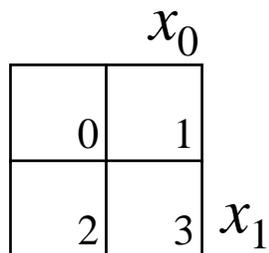
(Wdh.)

## ○ Beispiele



## ○ Erweiterung durch Spiegelung

⇒ für jede zusätzliche Variable verdoppelt sich die Zahl der Felder

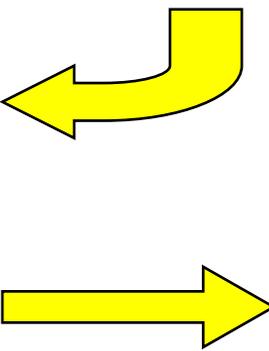


# Eigenschaften von KV-Diagrammen

(Wdh.)

- Jedes Feld ist ein Funktionswert
  - ⇒ Ein Minterm der Funktion
  - ⇒ Eindeutige Variablenzuordnung
- Oft werden  $x_1$  und  $x_2$  vertauscht
  - ⇒ Lediglich eine andere Numerierung der Felder
  - ⇒ Kein Einfluss auf das Minimierungsverfahren
- Aufstellen der KV-Diagramme über die Funktionstabelle:

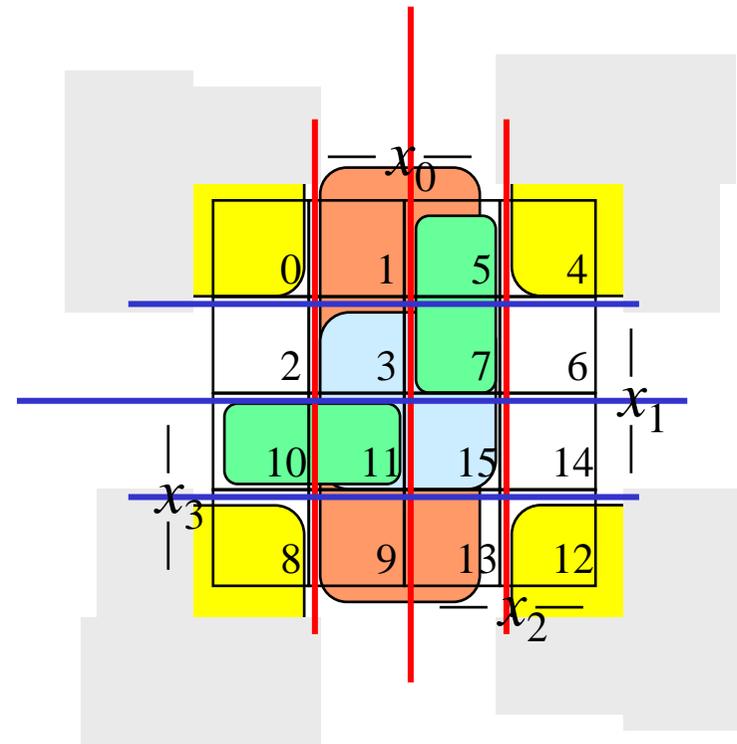
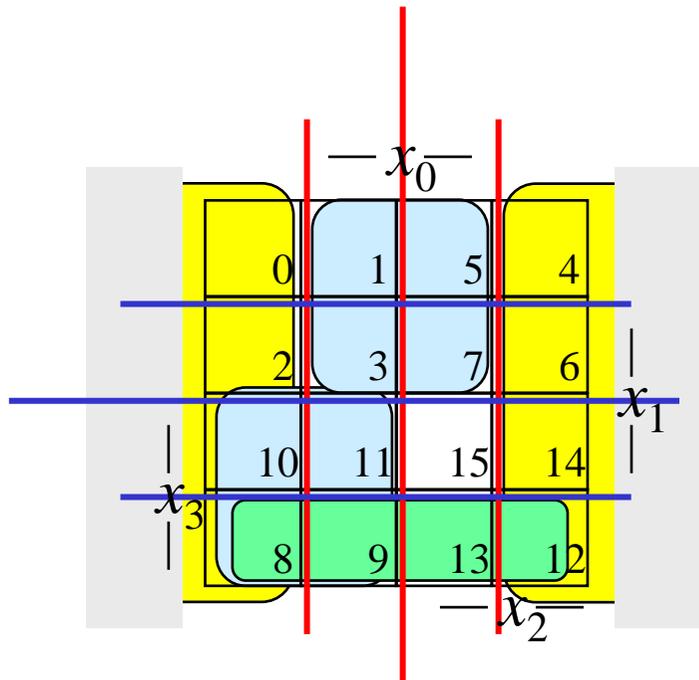
Index	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$


				$\bar{x}_0$
$0_0$	$0_1$	$0_5$	$1_4$	
$1_2$	$0_3$	$1_7$	$1_6$	$x_1$
				$\bar{x}_2$

# Minimalformen aus KV-Diagrammen (Wdh.)

- Finden von 1-Blöcken, die symmetrisch zu denjenigen Achsen, an denen eine Variable von 0 auf 1 wechselt
- Jede Funktion lässt sich als disjunktive Verknüpfung solcher Implikanten darstellen
- Beispiele



**Def. 1.2:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Implikant  $p$  heißt Primimplikant, wenn es keinen Implikanten  $q$  gibt, der  $p$  impliziert.

**Satz 1.1:** Zu jeder Booleschen Funktion  $f$  gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten

**Def. 1.3:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Implikant  $p$  heißt Kernprimimplikant (oder essentieller Primimplikant), wenn er einen Minterm überdeckt, der von keinem anderen Primimplikant überdeckt wird.

# Beispiel

(Wdh.)

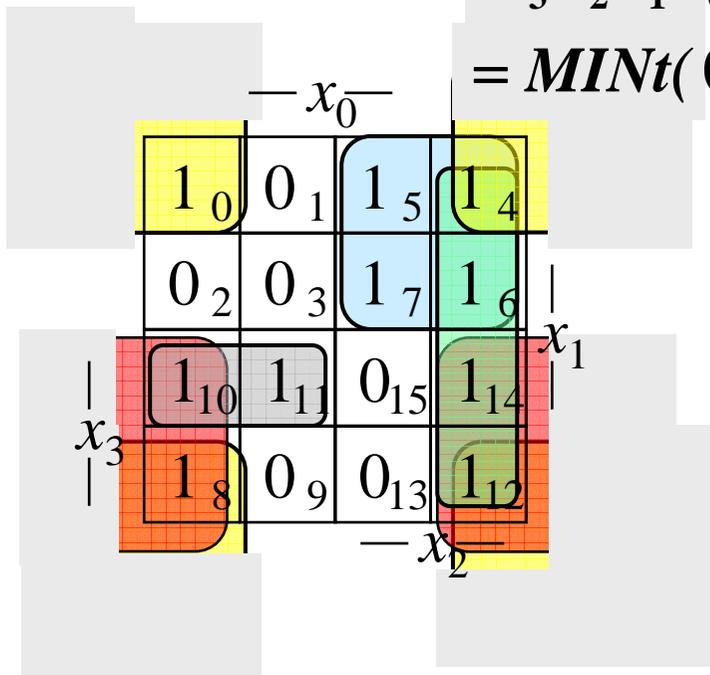
$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee$$

$$\bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee$$

**DNF**

$$x_3 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0$$

$$= \text{MINT}(0, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14)$$



$$e \quad \bar{x}_1 \bar{x}_0 \quad (0, 4, 8, 12)$$

$$e \quad \bar{x}_3 x_2 \quad (4, 5, 6, 7)$$

$$e \quad x_2 \bar{x}_0 \quad (4, 6, 12, 14)$$

$$e \quad x_3 \bar{x}_0 \quad (8, 10, 12, 14)$$

$$e \quad x_3 \bar{x}_2 x_1 \quad (10, 11)$$

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1$$

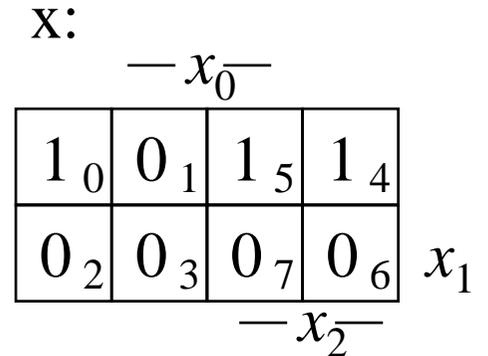
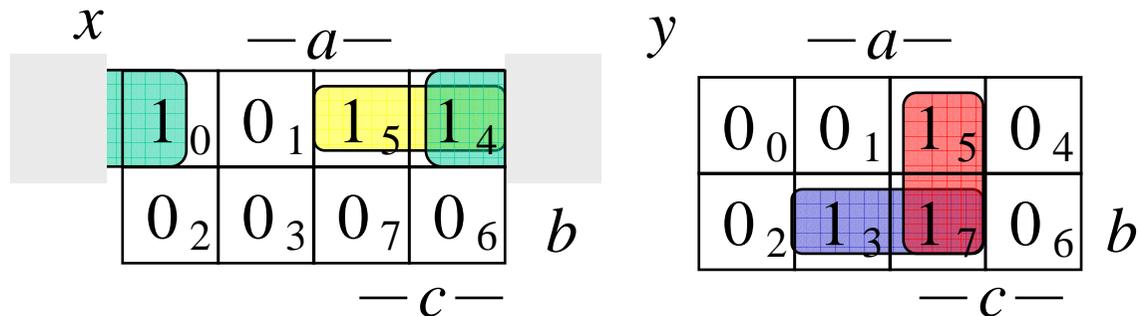
**DMF**

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_2 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1$$

# Bündelminimierung

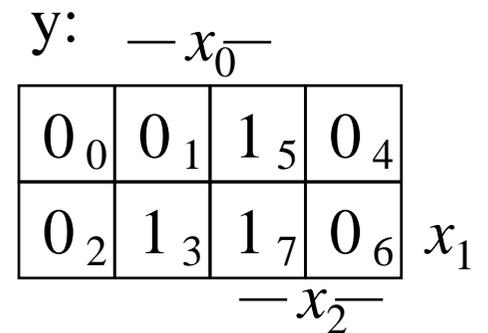
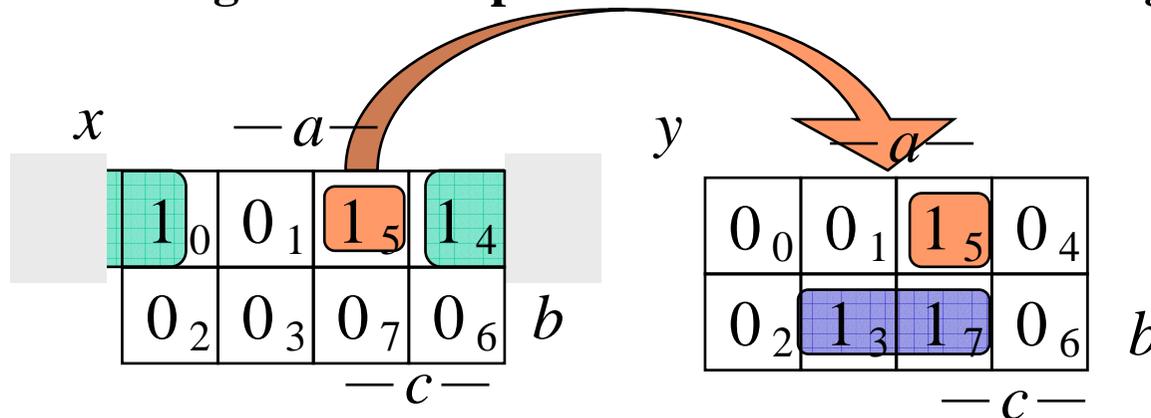
- Funktionen mit mehreren Ausgängen werden gemeinsam minimiert
- Getrennte Minimierung

⇒ insgesamt 4 Implikanten für die Realisierung



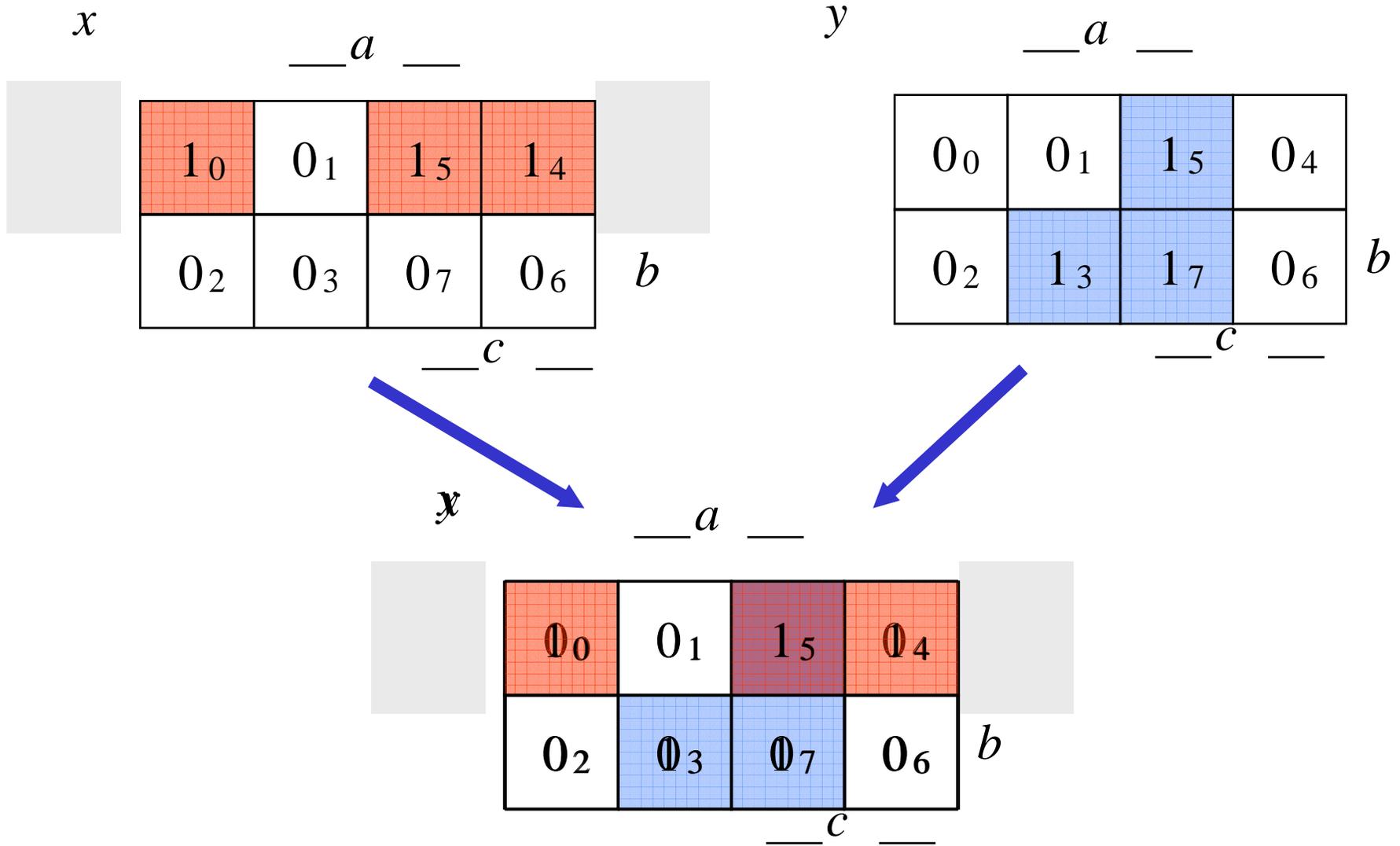
- Bündelminimierung

⇒ insgesamt 3 Implikanten für die Realisierung



# 1.2 Bündelminimierung

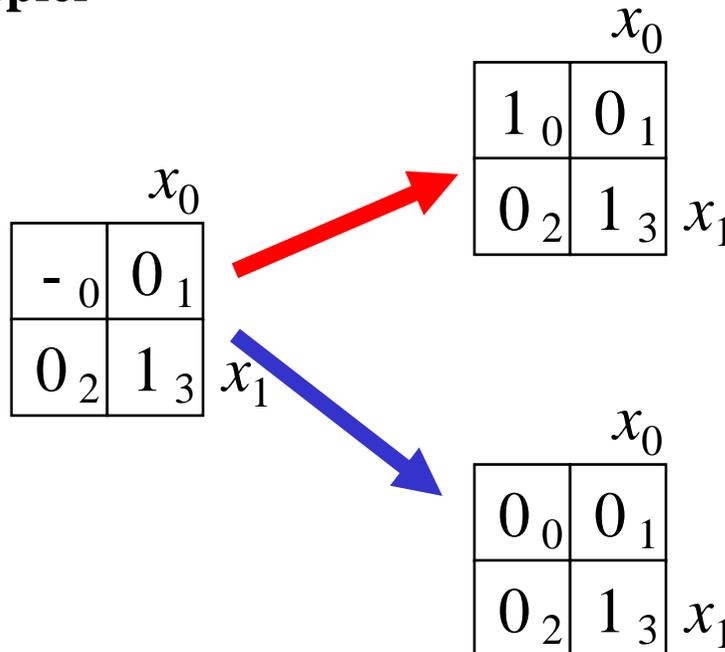
(Wdh.)



# 1.3 Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

(Wdh.)

○ Beispiel



$$f(x_1, x_0) = x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0$$

$$f(x_1, x_0) = x_1x_0$$

# Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen (Wdh.)

				$\overline{x_0}$							
				1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	- 5	0 <sub>4</sub>				
				- 2	0 <sub>3</sub>	- 7	0 <sub>6</sub>				
				0 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>14</sub>				
				- 8	1 <sub>9</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>12</sub>				
				$\overline{x_2}$							
		$x_3$									
								$x_1$			

				$\overline{x_0}$							
				1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>4</sub>				
				0 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>				
				0 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>14</sub>				
				1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>12</sub>				
				$\overline{x_2}$							
		$x_3$									
								$x_1$			

$$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

				$\overline{x_0}$							
				1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>4</sub>				
				1 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>				
				0 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>14</sub>				
				1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>12</sub>				
				$\overline{x_2}$							
		$x_3$									
								$x_1$			

$$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_0$$

# 1.4 Das Verfahren nach Quine-McCluskey

---

- **KV-Diagramme mit mehr als 6 Variablen werden sehr groß und unübersichtlich**
  - ⇒ dieses Problem wurde zuerst von Quine und McCluskey erkannt und gelöst
  - ⇒ das Verfahren nach Quine-McCluskey ist ein tabellarisches Verfahren
  - ⇒ es führt auf eine DMF (disjunktive minimale Form)
- **Ausgangspunkt ist die Funktionstabelle der Funktion**
  - ⇒ nur die Minterme werden berücksichtigt
- **Der Suchraum wird eingeschränkt, weil der Satz 1.1 gilt:**
  - ⇒ zu jeder Booleschen Funktion  $f$  gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten
- **Verfahren nach Quine McCluskey in 2 Schritten:**
  1. Schritt: berechne alle Primimplikanten
  2. Schritt: suche eine minimale Überdeckung aller Minterme

# Beispiel: Die vollständige Funktionstabelle

Nr.	e	d	c	b	a	y	Nr.	e	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	0	0	16	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	17	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1	18	1	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0	19	1	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1	20	1	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	1	1	21	1	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	1	22	1	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0	23	1	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0	24	1	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0	25	1	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1	26	1	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0	27	1	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1	28	1	1	1	0	0	0
13	0	1	1	0	1	1	29	1	1	1	0	1	0
14	0	1	1	1	0	1	30	1	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0	31	1	1	1	1	1	0

# 1. Schritt: Berechnung aller Primimplikanten

---

## ○ Schreibweise

- ⇒ **1** steht für eine nicht negierte Variable
- ⇒ **0** steht für eine negierte Variable
- ⇒ **-** steht für eine nicht auftretende Variable

## ○ Man betrachtet nur die Minterme

- ⇒ **1-Stellen der Funktion**

## ○ Die Minterme werden geordnet

- ⇒ **Gruppen mit der gleichen Anzahl von Einsen**
- ⇒ **innerhalb der Gruppen: aufsteigende Reihenfolge**
- ⇒ **man erhält die 1. Quinesche Tabelle, 0. Ordnung**

## ○ Minterme benachbarter Gruppen die sich nur in 1 Variable unterscheiden werden gesucht

- ⇒ **diese können durch Streichen der Variable zusammengefaßt werden**
- ⇒ **man erhält die 1. Quineschen Tabellen höherer Ordnung**

# Beispiel: 1. Quinesche Tabelle

Nr.	e	d	c	b	a
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
10	0	1	0	1	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
22	1	0	1	1	0
26	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0

## 0. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6	0	0	-	1	0
2,10	0	-	0	1	0
2,18	-	0	0	1	0
4,5	0	0	1	0	-
4,6	0	0	1	-	0
4,12	0	-	1	0	0
5,13	0	-	1	0	1
6,14	0	-	1	1	0
6,22	-	0	1	1	0
10,14	0	1	-	1	0
10,26	-	1	0	1	0
12,13	0	1	1	0	-
12,14	0	1	1	-	0
18,22	1	0	-	1	0
18,26	1	-	0	1	0
14,30	-	1	1	1	0
22,30	1	-	1	1	0
26,30	1	1	-	1	0

## 1. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6,10,14	0	-	-	1	0
2,6,18,22	-	0	-	1	0
2,10,18,26	-	-	0	1	0
4,5,12,13	0	-	1	0	-
4,6,12,14	0	-	1	-	0
6,14,22,30	-	-	1	1	0
10,14,26,30	-	1	-	1	0
18,22,26,30	1	-	-	1	0

## 2. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6,10,14					
18,22,26,30	-	-	-	1	0

## 3. Ordnung

## 2. Schritt: Suche einer minimalen Überdeckung

- **Aufstellen der 2. Quineschen Tabelle**

- ⇒ alle Primimplikanten werden zusammen mit der Nummer des Minterms aus dem sie hervorgegangen sind in eine Überdeckungstabelle eingetragen

- **Kosten für einen Primimplikanten:**

- ⇒ Anzahl der UND-Eingänge (Anzahl der Variablen des Terms)

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

- **Aufgabe: Finden einer Überdeckung aller Minterme mit minimalen Kosten**

# Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

## ○ Aufstellung einer Überdeckungsfunktion $\ddot{u}_f$

⇒  $w_A, w_B$  und  $w_C$  sind Variablen, die kennzeichnen, ob ein entsprechender Primimplikant in der vereinfachten Darstellung aufgenommen wird, oder nicht

⇒ Konjunktive Form über alle den jeweiligen Minterm überdeckenden Primimplikanten

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30
A		X	X			X	X					
B		X		X		X		X				
C	X			X	X			X	X	X	X	X

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_f &= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_Cw_Cw_Cw_C \\
 &= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C) \\
 &= (w_Cw_A \vee w_Cw_B)(w_Aw_B \vee w_Aw_C) \\
 &= w_Cw_Bw_A \vee w_Aw_C \\
 & (= w_Aw_C)
 \end{aligned}$$

# Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

---

○ Ergebnis nach der Vereinfachung:  $\ddot{u}_f = w_C w_B w_A \vee w_A w_C$

○ Damit  $f$  ganz überdeckt ist, muss  $\ddot{u}_f$  eine Tautologie sein

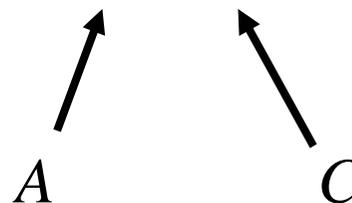
⇒ man sucht einen konjunktiven Term mit minimalen Kosten

$$w_C w_B w_A \quad \text{Kosten : } 3 + 3 + 2 = 8$$

$$w_A w_C \quad \text{Kosten : } 3 + 2 = 5$$

○ Als Endergebnis der Minimierung für die Funktion  $f$  erhält man

$$f(e, d, c, b, a) = \bar{e} c \bar{b} \vee b \bar{a}$$



# Vereinfachung des Überdeckungsproblems

- Die Primimplikantentabelle kann reduziert werden, indem essentielle Primterme (Kernprimimplikanten) und die von ihnen überdeckten Minterme gestrichen werden
  - ⇒ tragen mit einem einzigen „X“ zu einer Spalte bei
  - ⇒ müssen auf jeden Fall in der Überdeckung enthalten sein

- In diesem Beispiel sind dies die beiden Primimplikanten A und C

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

⇒ A: 5, 13

⇒ C: 2, 10, 18, 22, 26, 30

⇒ B ist vollständig überdeckt und kann ebenfalls gestrichen werden

# Aufwandsbetrachtungen

---

- **Alle Verfahren benötigen 2 Schritte**
  - ⇒ **1. Erzeugen aller Primimplikanten (Primimplikate)**
  - ⇒ **2. Auswahl der Primimplikanten (Primimplikate), welche die Minterme (Maxterme) mit minimalen Kosten überdecken**
- **Die Anzahl der Primimplikanten (Primimplikaten) kann exponentiell steigen**
  - ⇒ **Es gibt Funktionen mit  $\frac{3^n}{n}$  Primimplikanten**
- **Das Überdeckungsproblem ist NP-Vollständig**
  - ⇒ **es besteht wenig Hoffnung einen Algorithmus zu finden, der dieses Problem polynomial mit der Zahl der Eingabevariablen löst**

# Heuristische Verfahren

---

- **Heuristische Minimierungsverfahren werden eingesetzt,**
  - ⇒ wenn die zweistufige Darstellung optimiert werden muss, aber
  - ⇒ nur begrenzte Rechenzeit und Speicherplatz zur Verfügung steht
- **Die meisten heuristischen Minimierungsansätze basieren auf einer schrittweisen Verbesserung der Schaltung**
- **Unterschiede zu exakten Verfahren:**
  - ⇒ man wendet eine Menge von Transformationen direkt auf die Überdeckung des *ON-Sets* an
  - ⇒ man definiert die Optimierung als beendet, wenn diese Transformationen keine Verbesserungen mehr bringen