

### Aufgaben zum Fach Technische Informatik

1. Semester / Wintersemester 1997/98

#### Aufgabe 1.5.1. - Berechnung zeitabhängiger Spannungen und - Ströme durch Hin- und Rücktransformation von Spannungen, Strömen und Widerständen in die komplexe Ebene

Gegeben ist folgende Schaltung:

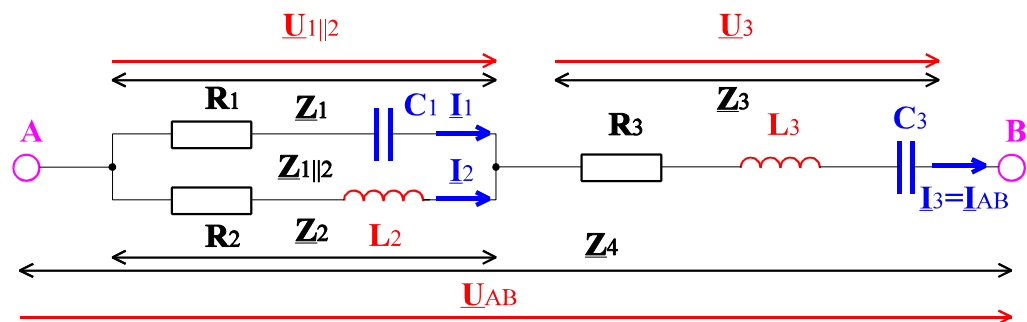


Abb. 1

und die Zeitfunktion:

$$u_{AB}(t) = 20V \sin(9,4248ks^{-1}t + 0^\circ)$$

Die Werte für die Bauelemente entsprechen denen des Aufgabenkomplexes 1.4.

**Werte:**

$$R_1 = 75\Omega$$

$$C_1 = 2,307\mu F$$

$$R_2 = 25\Omega$$

$$L_2 = 3,714mH$$

$$R_3 = 75\Omega$$

$$C_3 = 2,449\mu F$$

$$L_3 = 4,0565mH$$

$$f = 1,5kHz$$

## Aufgabe:

Bestimmen Sie die Zeitfunktionen der Spannungen  $u_{1||2}(t)$  und  $u_3(t)$  und der Ströme  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  und  $i_3(t)$   $=i_{AB}(t)$

## Vorgehensweise:

1. Bestimmen Sie die komplexe Amplitude  $\underline{U}_{AB}$  durch Transformation der Zeitfunktion  $u_{AB}(t)$  in die komplexe Ebene. Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
2. Berechnen Sie den Gesamtstrom  $\underline{I}_{AB}=I_3$  aus der Spannung  $\underline{U}_{AB}$  und dem Widerstand  $\underline{Z}_4$ . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
3. Berechnen Sie die Teilspannung  $\underline{U}_3$  aus dem Strom  $\underline{I}_{AB}$  und dem Widerstand  $\underline{Z}_3$ . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
4. Berechnen Sie die Teilspannung  $\underline{U}_{1||2}$  aus dem Strom  $\underline{I}_{AB}$  und dem Widerstand  $\underline{Z}_{1||2}$ . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
5. Berechnen Sie den Teilstrom  $\underline{I}_2$  aus der Spannung  $\underline{U}_{1||2}$  und dem Widerstand  $\underline{Z}_2$ . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
6. Berechnen Sie den Teilstrom  $\underline{I}_1$  aus der Spannung  $\underline{U}_{1||2}$  und dem Widerstand  $\underline{Z}_1$ . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
7. Stellen Sie die Ergebnisse für die komplexen Spannungen und -Ströme grafisch dar. Zeigen Sie, daß man bei vektorieller Addition von  $\underline{U}_{1||2}$  und  $\underline{U}_3$  die Spannung  $\underline{U}_{AB}$  erhält und bei vektorieller Addition von  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$  den Strom  $\underline{I}_{AB}$ .
8. Transformieren Sie die Spannungen  $\underline{U}_3$  und  $\underline{U}_{1||2}$  in die Zeitfunktionen  $u_3(t)$  und  $u_{1||2}(t)$
9. Transformieren Sie die Ströme  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  und  $\underline{I}_{AB}$  in die Zeitfunktionen  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  und  $i_{AB}(t)$ .

Stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle dar.

## Bemerkung:

- Der Widerstand  $\underline{Z}_{1||2}$  besteht aus der Parallelschaltung von  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$ .
- Negative Werte von Winkeln brauchen nicht umgerechnet werden.
- Schreiben Sie alle komplexen Ergebnisse in der Normal- und der Versorform auf.
- Berechnen Sie Multiplikationen und Divisionen von komplexen Zahlen in der Versorform (Exponentialform) und Additionen und Subtraktionen in der Normalform.

## Formeln:

- Transformation Zeitbereich in komplexen Bildbereich (allgemein):

$$\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad a_2(t) = \operatorname{Re}\{\underline{a}(t)\} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad - T_2\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Abszisse)}$$

$$\text{mit} \quad a_1(t) = \operatorname{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad - T_1\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Ordinate)}$$

$$\text{und} \quad \underline{A} = A e^{j\varphi}$$

Wir verwenden die  $T_1$ -Transformation entsprechend der Vorlesung.  
Der Buchstabe A kann für Strom, Spannung u.s.w. stehen.

- Ohmsches Gesetz für komplexe Widerstände:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underline{I} / \underline{Y}$$

Analog gelten die Kirchhoffschen Sätze

- komplexe Spannungen:

$$\text{allgemein: } \underline{U} = \operatorname{Re}\{\underline{U}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{U}\} = U (\cos(\varphi_U) + j \sin(\varphi_U)) = U \exp(j\varphi_U) = U \angle \varphi_U$$

$$\text{mit: } U = (\operatorname{Re}^2\{\underline{U}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{U}\})^{1/2}, \quad \varphi_U = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{U}\} / \operatorname{Re}\{\underline{U}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{U} = 30V + j 40V = 50V (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 50V \exp(j53,1^\circ) = 50V \angle 53,1^\circ)$$

- komplexe Ströme:

$$\text{allgemein: } \underline{I} = \operatorname{Re}\{\underline{I}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{I}\} = I (\cos(\varphi_I) + j \sin(\varphi_I)) = I \exp(j\varphi_I) = I \angle \varphi_I$$

$$\text{mit: } I = (\operatorname{Re}^2\{\underline{I}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{I}\})^{1/2}, \quad \varphi_I = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{I}\} / \operatorname{Re}\{\underline{I}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{I} = 300\text{mA} + j 400\text{mA} = 500\text{mA} (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 500\text{mA} \exp(j53,1^\circ) = 500\text{mA} \angle 53,1^\circ)$$

- komplexe Widerstände:

$$\text{allgemein: } \underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = Z (\cos(\varphi_Z) + j \sin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle \varphi_Z$$

$$\text{mit: } \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = R, \quad \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = X_L + X_C, \quad \text{mit } jX_L = j\omega L \text{ und } jX_C = -j(\omega C)^{-1}$$

$$\text{und: } Z = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Z}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}, \quad \varphi_Z = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} / \operatorname{Re}\{\underline{Z}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{Z} = 300\Omega + j 400\Omega = 500\Omega (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 500\Omega \exp(j53,1^\circ) = 500\Omega \angle 53,1^\circ)$$

- komplexe Leitwerte

$$\text{allgemein: } \underline{Y} = 1 / \underline{Z}$$

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = Y (\cos(\varphi_Y) + j \sin(\varphi_Y)) = Y \exp(j\varphi_Y) = Y \angle \varphi_Y$$

$$\text{mit: } \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = G, \quad \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = B_L + B_C, \quad \text{mit } jB_L = -j(\omega L)^{-1} \text{ und } jB_C = j\omega C$$

$$\text{und: } Y = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Y}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Y}\})^{1/2}, \quad \varphi_Y = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Y}\} / \operatorname{Re}\{\underline{Y}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{Y} = 300\text{mS} + j 400\text{mS} = 500\text{mS} (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 500\text{mS} \exp(j53,1^\circ) = 500\text{mS} \angle 53,1^\circ)$$

# Lösungen:

## Lösung: Aufgabe 1.5.1.

### 1. Transformation der Zeitfunktionen einer Spannung in die komplexe Ebene, Bestimmung der komplexen Amplitude

$$u_{AB}(t) = 20V \sin(9,4248ks^{-1}t + 0^{\circ})$$

daraus folgt:

$$U = 20V \quad \text{und} \quad \varphi_U = 0^{\circ}$$

$$\omega = 2\pi f = 9,4248ks^{-1} \quad \text{und} \quad f = \omega / 2\pi = 9,4248ks^{-1} / 2\pi = \mathbf{1500,003Hz \approx 1,5kHz}$$

$$T = 1/f = 1/1,5kHz = \mathbf{0,66ms}$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{U}\} = U \cos(\varphi_U) = 20V \cos(0^{\circ}) = 20V \cdot 1 = \mathbf{20V}$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{U}\} = U \sin(\varphi_U) = 20V \sin(0^{\circ}) = 20V \cdot 0 = \mathbf{0V}$$

$$\underline{U}_{AB} = \mathbf{20V \angle 0^{\circ} = 20V \exp(j0^{\circ}) = 20V(\cos[0^{\circ}] + j \sin[0^{\circ}]) = 20V + j 0V}$$

für genauere Betrachtungen kann man die Definitionsgleichung betrachten:

allgemein:

$$\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad a_2(t) = \operatorname{Re}\{\underline{a}(t)\} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad - T_2\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Abszisse)}$$

$$\text{mit} \quad a_1(t) = \operatorname{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad - T_1\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Ordinate)}$$

$$\text{und} \quad \underline{A} = A e^{j\varphi}$$

Bemerkung:

Transformiert man mit  $T_1$  in die Komplexe Ebene muß man auch mit  $T_1$  zurücktransformieren!  
Analog gilt dies auch für  $T_2$

## 2. Berechnung des Gesamtstroms $\underline{I}_{AB}$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_4 = \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_{AB}$$

$$\underline{I}_{AB} = \underline{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB} = 20\text{V} \angle 0^\circ / 108,63\Omega \angle 7,01^\circ = \mathbf{184,11\text{mA} \angle -7,01^\circ}$$

$$= 184,11\text{mA} (\cos[-7,01^\circ] + j \sin[-7,01^\circ]) = \mathbf{182,735\text{mA} - j22,469\text{mA}}$$

## 3. Berechnung der Teilspannung $\underline{U}_3$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_3 = 184,11\text{mA} \angle -7,01^\circ \cdot 75,17\Omega \angle -3,885^\circ = \mathbf{13,84\text{V} \angle -10,895^\circ}$$

$$= 13,84\text{V} (\cos[-10,895^\circ] + j \sin[-10,895^\circ]) = \mathbf{13,59\text{V} - j2,6158\text{V}}$$

## 4. Berechnung der Teilspannung $\underline{U}_{1||2}$

$$\underline{U}_{1||2} = \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_{1||2} = 184,11\text{mA} \angle -7,01^\circ \cdot 37,6\Omega \angle 29,217^\circ = \mathbf{6,9225\text{V} \angle 22,207^\circ}$$

$$= \mathbf{6,409\text{V} + j2,616\text{V}}$$

## 5. Berechnung des Teilstromes $\underline{I}_2$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_{1||2} / \underline{Z}_2 = 6,9225\text{V} \angle 22,207^\circ / 43\Omega \angle 54,46^\circ = \mathbf{160,988\text{mA} \angle -32,253^\circ}$$

$$= \mathbf{136,1478\text{mA} - j85,9126\text{mA}}$$

## 6. Berechnung des Teilstromes $\underline{I}_1$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_{1||2} / \underline{Z}_1 = 6,9225\text{V} \angle 22,207^\circ / 87,98\Omega \angle -31,52^\circ = \mathbf{78,68\text{mA} \angle 53,727^\circ}$$

$$= \mathbf{46,551\text{mA} + 63,4345\text{mA}}$$

## 8. Bestimmung der Zeitfunktionen $u_3(t)$ und $u_{1||2}(t)$

$$a_1(t) = \text{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega[t + t_\varphi]) \quad \varphi_{\text{RAD}} = (2\pi/360^\circ) \cdot \varphi, \quad t_\varphi = \varphi_{\text{RAD}} / \omega$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_3 = 13,84\text{V} \angle -10,895^\circ & \quad \Rightarrow \quad u_3(t) = \mathbf{13,84\text{V} \sin(9,4248\text{ks}^{-1} \cdot t - 10,895^\circ)} \\ & \quad = \mathbf{13,84\text{V} \sin(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot t - 10,895^\circ)} \\ & \quad = \mathbf{13,84\text{V} \sin(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot t - 0,1902)} \\ & \quad = \mathbf{13,84\text{V} \sin(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot [t - 20,18\mu\text{s}])} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1||2} = 6,9225\text{V} \angle 22,207^\circ & \quad \Rightarrow \quad u_{1||2}(t) = \mathbf{6,9225\text{V} \sin(9,4248\text{ks}^{-1} \cdot t + 22,207^\circ)} \\ & \quad = \mathbf{6,9225\text{V} \sin(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot t + 22,207^\circ)} \\ & \quad = \mathbf{6,9225\text{V} \sin(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot t + 0,3876)} \\ & \quad = \mathbf{9,9225\text{V} \sin(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot [t + 41,13\mu\text{s}])} \end{aligned}$$

## 9. Bestimmung der Zeitfunktionen $i_1(t)$ , $i_2(t)$ und $i_{AB}(t)$

$$\begin{aligned} I_1 &= 78,68 \text{mA} \angle 53,727^\circ & \implies & i_1(t) = 78,68 \text{mA} \cdot \sin(9,4248 \text{ks}^{-1} \cdot t + 53,727^\circ) \\ & & & = 78,68 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot t + 53,727^\circ) \\ & & & = 78,68 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot t + 0,9377) \\ & & & = 78,68 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot [t + 99,494 \mu\text{s}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 160,988 \text{mA} \angle -32,253^\circ & \implies & i_2(t) = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(9,4248 \text{ks}^{-1} \cdot t - 32,253^\circ) \\ & & & = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot t - 32,253^\circ) \\ & & & = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot t - 0,5629) \\ & & & = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot [t - 59,727 \mu\text{s}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{AB} &= 184,11 \text{mA} \angle -7,01^\circ & \implies & i_{AB}(t) = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(9,4248 \text{ks}^{-1} \cdot t - 7,01^\circ) \\ & & & = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot t - 7,01^\circ) \\ & & & = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot t - 0,1223) \\ & & & = 160,988 \text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1,5 \text{kHz} \cdot [t - 12,976 \mu\text{s}]) \end{aligned}$$

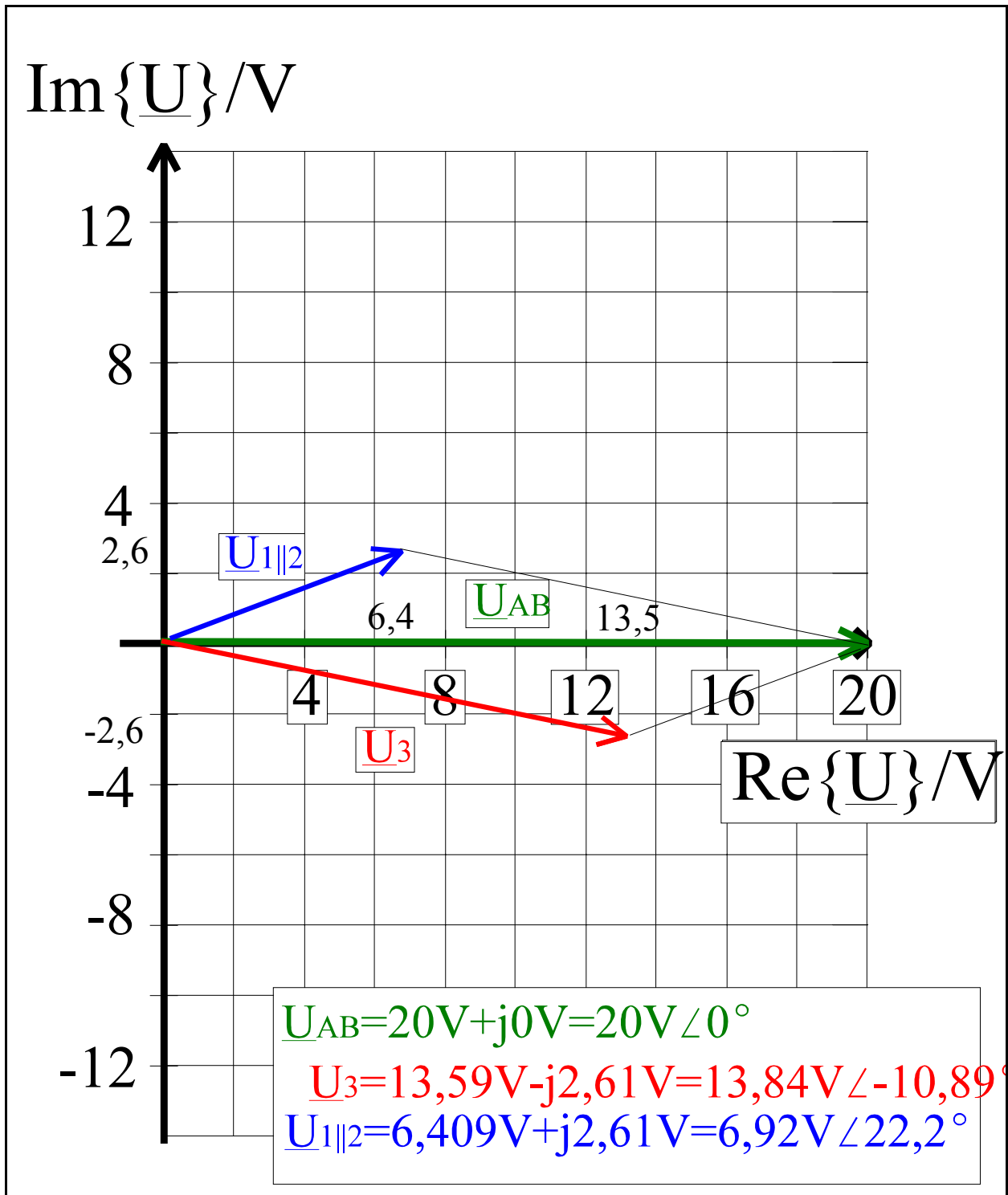


Abb. 2

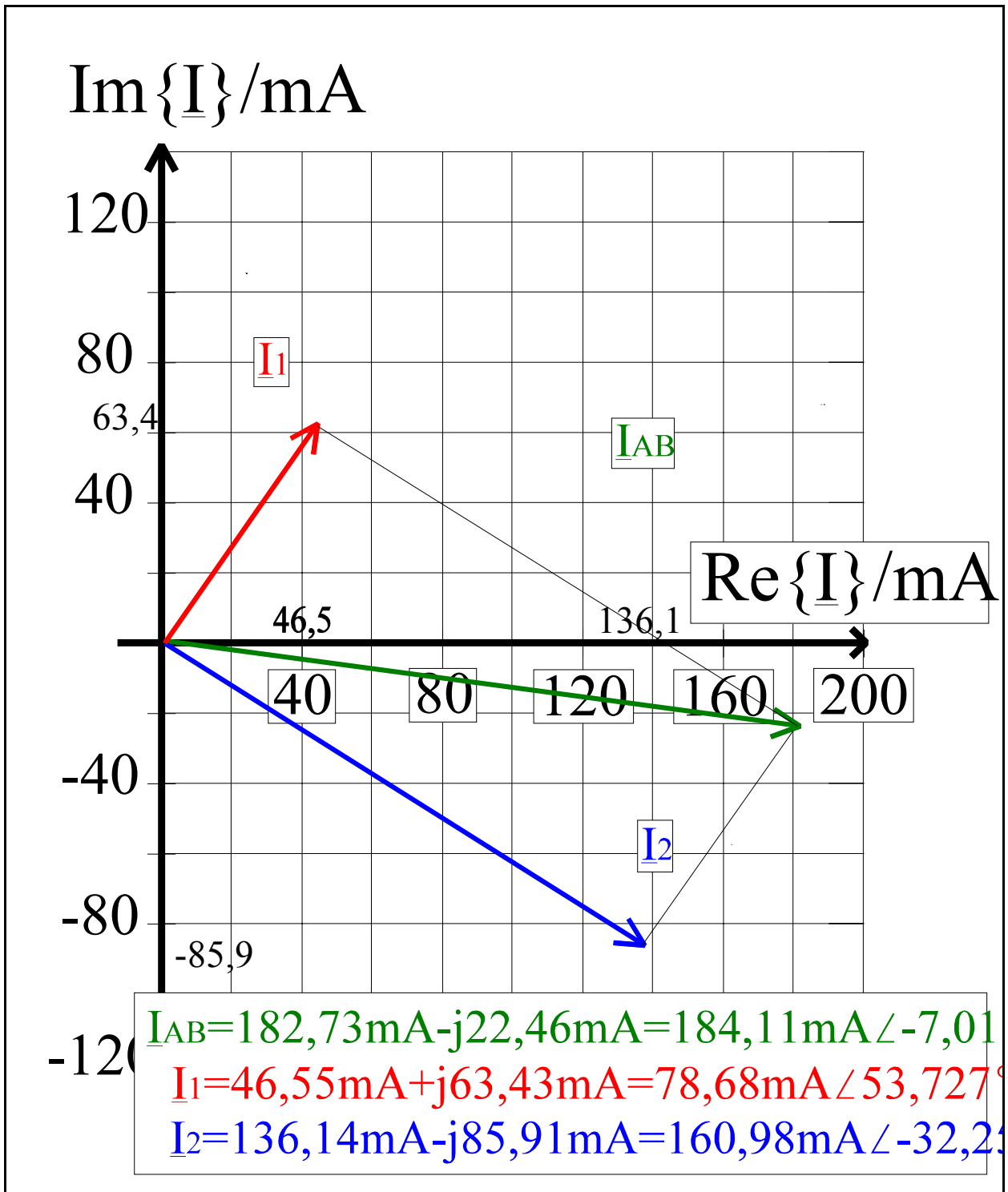


Abb. 3