UNIVERSITÄT LEIPZIG

Institut für Informatik

Abt. Technische Informatik
Gerätebeauftragter
Dr. Hans-Joachim Lieske
Tel. [49] - 0341 - 97 32213
lieske@informatik.uni-leipzig.de

Aufgaben zum Fach Technische Informatik

1. Semester / Wintersemester 1996/97

Aufgabe 1.4. - Berechnung komplexer Widerstände in der Normal- und Versorform (Exponentialform)

Aufgabe 1.4.1. - Transformation von Zeitfunktionen in die komplexe Ebene

Transformieren Sie folgende Zeitfunktionen in die komplexe Ebene und bestimmen Sie die komplexe Amplitude $\underline{U}$:

$u(t) = 1V \sin(12{,}5663 ks^{-1} t - 30^O)$

allgemein: $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi_U)$

und stellen Sie diese in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform dar.

allgemein: $\underline{U} = Re\{\underline{U}\} + jIm\{\underline{U}\} = U(\cos(\varphi_U) + j\sin(\varphi_U)) = U \exp(j\varphi_U) = U \angle\varphi_U$
mit: $U = (Re^2\{\underline{U}\} + Im^2\{\underline{U}\})^{1/2}$, $\varphi_U = \arctan(Im\{\underline{U}\}/Re\{\underline{U}\})$

(Beispiel für die Darstellung: $\underline{U} = 3V + j\,4V = 5V\,(\cos 53{,}1^O + j \sin 53{,}1^O) = 5V \exp(j53{,}1^O) = 5V \angle 53{,}1^O$**)**

Aufgabe 1.4.2. - Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität

Gegeben ist folgende Schaltung für $\underline{Z}_1$:

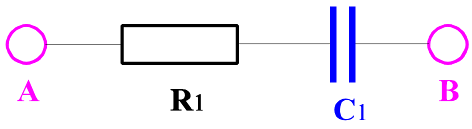


Abb. 1

$R_1 = 60\ \Omega$

$C_1 = 3{,}183\ \mu F$

$f = 1k\ Hz$

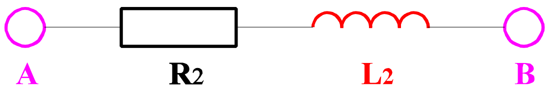
allgemein: $\underline{Z} = Re\{\underline{Z}\} + jIm\{\underline{Z}\} = Z(\cos(\varphi_Z) + j\sin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle\varphi_Z$
mit: $Re\{\underline{Z}\} = R$, $Im\{\underline{Z}\} = X_L + X_C$, mit $jX_L = j\omega L$ und $jX_C = -j(\omega C)^{-1}$
und: $Z = (Re^2\{\underline{Z}\} + Im^2\{\underline{Z}\})^{1/2}$, $\varphi_Z = \arctan(Im\{\underline{Z}\}/Re\{\underline{Z}\})$

Berechnen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.
Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar

(Beispiel für die Darstellung: $\underline{Z} = 3\ \Omega + j\,4\Omega = 5\Omega\,(\cos 53{,}1^O + j\sin 53{,}1^O) = 5\Omega \exp(j53{,}1^O) = 5\Omega \angle 53{,}1^O$**)**

Aufgabe 1.4.3. - Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

Gegeben ist folgende Schaltung für $\underline{Z}_2$:



$R_2 = 30\Omega$

$L_2 = 6{,}366 mH$

$f = 1 kHz$

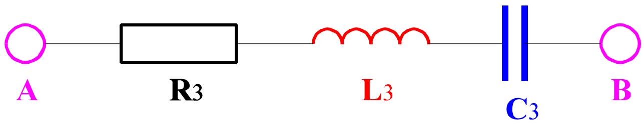
Abb. 2

allgemein: $\underline{Z}=Re\{\underline{Z}\}+jIm\{\underline{Z}\}=Z(\cos(\varphi_Z)+j\sin(\varphi_Z))=Z\exp(j\varphi_Z) = Z \angle\varphi_Z$
mit: $Re\{\underline{Z}\}=R$, $Im\{\underline{Z}\}=X_L+X_C$, mit $jX_L=j\omega L$ und $jX_C=-j(\omega C)^{-1}$
und: $Z=(Re^2\{\underline{Z}\}+Im^2\{\underline{Z}\})^{1/2}$, $\varphi_Z=\arctan(Im\{\underline{Z}\}/Re\{\underline{Z}\})$

Berechnen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.
Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar
(Beispiel für die Darstellung: $\underline{Z} = 3\ \Omega + j\ 4\Omega = 5\Omega\ (\cos 53{,}1^O + j\sin 53{,}1^O) = 5\Omega \exp(j53{,}1^O) = 5\Omega \angle 53{,}1^O$)

Aufgabe 1.4.4. - Reihenschaltung von Widerstand, Kapazität und Induktivität

Gegeben ist folgende Schaltung für $\underline{Z}_3$:



$R_3= 56{,}875\Omega$

$L_3= 4{,}0565 mH$

$C_3= 2{,}273\mu F$

$f = 1kHz$

Abb. 3

allgemein: $\underline{Z}=Re\{\underline{Z}\}+jIm\{\underline{Z}\}=Z(\cos(\varphi_Z)+j\sin(\varphi_Z))=Z\exp(j\varphi_Z)=Z \angle\varphi_Z$
mit: $Re\{\underline{Z}\}=R$, $Im\{\underline{Z}\}=X_L+X_C$, mit $jX_L=j\omega L$ und $jX_C=-j(\omega C)^{-1}$
und: $Z=(Re^2\{\underline{Z}\}+Im^2\{\underline{Z}\})^{1/2}$, $\varphi_Z=\arctan(Im\{\underline{Z}\}/Re\{\underline{Z}\})$

Berechnen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.
Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar
(Beispiel für die Darstellung: $\underline{Z} = 3\ \Omega + j\ 4\Omega = 5\Omega\ (\cos 53{,}1^O + j\sin 53{,}1^O) = 5\Omega \exp(j53{,}1^O) = 5\Omega \angle 53{,}1^O$)

Aufgabe 1.4.5. - Berechnung des Gesamtwiderstandes einer komplexen Schaltung

Gegeben ist folgende Schaltung für $\underline{Z}_4$:

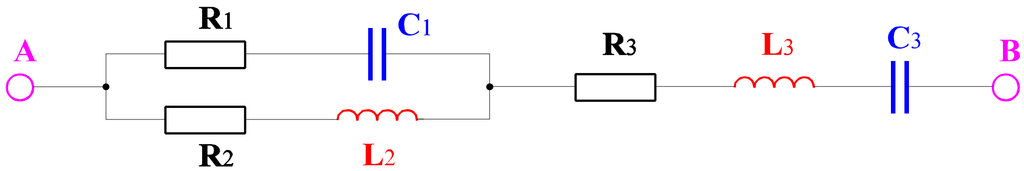


Abb. 4

Es sind die Werte aus den Aufgaben 1.4.2. bis 1.4.4. zu verwenden.

allgemein: $\underline{Z}=\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}+j\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}=Z(\cos(\varphi_Z)+j\sin(\varphi_Z))=Z\exp(j\varphi_Z)=Z\angle\varphi_Z$
mit: $\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}=R$, $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}=X_L+X_C$, mit $jX_L=j\omega L$ und $jX_C=-j(\omega C)^{-1}$
und: $Z=(\mathrm{Re}^2\{\underline{Z}\}+\mathrm{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}$, $\varphi_Z=\arctan(\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}/\mathrm{Re}\{\underline{Z}\})$

Berechnen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.
Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar
(Beispiel für die Darstellung: $\underline{Z} = 3\,\Omega + j\,4\Omega = 5\Omega\,(\cos 53{,}1^O + j\sin 53{,}1^O) = 5\Omega\,\exp(j53{,}1^O) = 5\Omega\,\angle 53{,}1^O$)

Bemerkung: **Fassen Sie die Ergebnisse für $\underline{U}$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, und $\underline{Z}_4$ in einer Tabelle zusammen! Berechnen Sie Multiplikationen und Divisionen von Komplexen Zahlen in der Versorform (Exponentialform) und Additionen und Subtraktionen in der Normalform.**

Lösungen:

Lösung: Aufgabe 1.4.1.

Transformation der Zeitfunktionen einer Spannung in die komplexe Ebene

$u(t) = 1V \sin(12{,}5663ks^{-1}t - 30^{O})$

daraus folgt:

$U = 1V$ und $\varphi_U = -30^{O}$

$\omega = 2\pi f = 12{,}5663ks^{-1}$ und $f = \omega/2\pi = 12{,}5663ks^{-1}/2\pi =$ **$1999{,}989Hz \approx 2kHz$**

$Re\{\underline{U}\} = U\cos(\varphi_U) = 1V\cos(-30^{O}) = 1V \cdot 0{,}86603 = 0{,}86603V \approx$ **866 mV**

$Im\{\underline{U}\} = U\sin(\varphi_U) = 1V\sin(-30^{O}) = 1V \cdot (-0{,}5) = -0{,}5V =$ **-500mV**

$\underline{U} = 866mV - j\,500mV = 1V(\cos[-30^{O}] + j\sin[-30^{O}]) = 1V\exp(-j30^{O}) = 1V\angle{-30^{O}})$

für genauere Betrachtungen kann man die Definitionsgleichung betrachten:

allgemein:

$\underline{a}(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{A}e^{j\omega t}$ mit $a_2(t) = Re\{\underline{a}(t)\} = A\cos(\omega t+\varphi)$ - T_2-Transformation (Projektion auf die Abszisse)

mit $a_1(t) = Im\{\underline{a}(t)\} = A\sin(\omega t+\varphi)$ - T_1-Transformation (Projektion auf die Ordinate)

und $\underline{A} = Ae^{j\varphi}$

Bemerkung:

Transformiert man mit T_1 in die Komplexe Ebene muß man auch mit T_1 zurücktransformieren!
Analog gilt dies auch für T_2

Lösung: Aufgabe 1.4.2.

Berechnung der Ersatzschaltung - Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität

$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\}=R_1=\mathbf{60\Omega}$
$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\}=X_C=-(\omega C)^{-1}=-(2\pi\cdot 1kHz\cdot 3{,}183\mu F)^{-1}=-(2\pi\cdot 3{,}183mS)^{-1}=-(19{,}9999mS)^{-1}\approx-(20mS)^{-1}$
$=\mathbf{-50\Omega}$

$\underline{Z}_1=\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\}+j\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\}=\mathbf{60\Omega-j50\Omega}$

$Z_1=(\mathrm{Re}^2\{\underline{Z}_1\})+\mathrm{Im}^2\{\underline{Z}_1\})^{1/2}=([60\Omega]^2+[-50\Omega]^2)^{1/2}=(3600\Omega^2+2500\Omega^2)^{1/2}=(6100\Omega^2)^{1/2}=78{,}1025\Omega$

$\varphi_{Z1}=\arctan(\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\}/\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1))=\arctan(-50\Omega/60\Omega)=\arctan(-0{,}833333)=\mathbf{-39{,}8056°}$

$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{1}}\mathbf{=60\Omega-j50\Omega=78{,}1025\Omega(\cos[-39{,}8056°]+j\sin[-39{,}8056°])=78{,}1025\Omega\ \exp(-j39{,}8056°)}$
$\mathbf{=78{,}1025\Omega\ \angle-39{,}8056°}$

Lösung: Aufgabe 1.4.3.

Berechnung der Ersatzschaltung - Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_2\}=R_2=30\Omega$
$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_2\}=X_L=\omega L=2\pi\cdot 1kHz\cdot 6{,}366mH=2\pi\cdot 6{,}366\Omega=39{,}999\Omega\approx 40\Omega$

$\underline{Z}_2=\mathrm{Re}\{\underline{Z}_2\}+j\mathrm{Im}\{\underline{Z}_2\}=30\Omega+j40\Omega$

$Z_2=(\mathrm{Re}^2\{\underline{Z}_2\}+\mathrm{Im}^2\{\underline{Z}_2\})^{1/2}=([30\Omega]^2+[40\Omega]^2)^{1/2}=(900\Omega^2+16000\Omega^2)^{1/2}=(2500\Omega^2)^{1/2}=50\Omega$

$\varphi_{Z2}=\arctan(\mathrm{Im}\{\underline{Z}_2\}/\mathrm{Re}\{\underline{Z}_2\})=\arctan(40\Omega/30\Omega)=\arctan(1{,}333333))=53{,}1301°$

$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}}\mathbf{=30\Omega+j40\Omega=50\Omega(\cos[53{,}1301°]+j\sin[53{,}1301°])=50\Omega\ \exp(j53{,}1301°)=50\Omega\ \angle 53{,}1301°}$

Lösung: Aufgabe 1.4.4.

Berechnung der Ersatzschaltung - Reihenschaltung von Widerstand, Kapazität und Induktivität

$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_3\}=R_3=56{,}875\Omega$

$X_C=-(\omega C)^{-1}=-(2\pi\cdot 1\mathrm{kHz}\cdot 2{,}273\mu\mathrm{F})^{-1}=-(2\pi\cdot 2{,}273\mathrm{mS})^{-1}=-(14{,}28168\mathrm{mS})^{-1}=-70{,}0198\Omega\approx -70\Omega$

$X_L=\omega L=2\pi\cdot 1\mathrm{kHz}\cdot 4{,}0565\mathrm{mH}=2\pi\cdot 4{,}0565\Omega=25{,}4877\Omega$

$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_3\}=X_L+X_C=25{,}4877\Omega-70\Omega=-44{,}5123\Omega$

$\underline{Z}_3=\mathrm{Re}\{\underline{Z}_3\}+j\mathrm{Im}\{\underline{Z}_3\}=56{,}875\Omega-j44{,}5123\Omega$

$Z_3=(\mathrm{Re}^2\{\underline{Z}_3\}+\mathrm{Im}^2\{\underline{Z}_3\})^{1/2}=([56{,}875\Omega]^2+[-44{,}5123\Omega]^2)^{1/2}=(3234{,}77\Omega^2+1981{,}34\Omega^2)^{1/2}$
$=(5216{,}11\Omega^2)^{1/2}=72{,}2223\Omega$

$\varphi_{Z3}=\arctan(\mathrm{Im}\{\underline{Z}_3\}/\mathrm{Re}\{\underline{Z}_3\})=\arctan(-44{,}5123\Omega/56{,}875\Omega)=\arctan(-0.782634))=-38{,}0479°$

$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{3}}$**=56,875Ω-j44,5123Ω=72,2223Ω(cos[-38,0479°]+jsin[-38,0479°])=72,2223Ω exp(-j38,0479°)**
=72,2223Ω ∠-38,0479°

Lösung: Aufgabe 1.4.5.

Berechnung der Ersatzschaltung - Gruppenschaltung von $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$

1. Berechnung der Parallelschaltung von $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$

1.1. Erste Variante - Berechnung über die Leitwerte:

$\underline{Y}_1=1/\underline{Z}_1=(78{,}1025\Omega\ \angle-39{,}8056°)^{-1}=12.8037\text{mS}\angle39{,}8056°=9{,}8361\text{ms}+j8{,}1967\text{mS}$

$\underline{Y}_2=1/\underline{Z}_2=(50\Omega\ \angle53{,}1301°)^{-1}=20\text{mS}\angle-53{,}1301°=12\text{mS}-j16\text{mS}$

$\underline{Y}_{1\|2}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2=9{,}8361\text{ms}+j8{,}1967\text{mS}+12\text{mS}-j16\text{mS}=(9{,}8361\text{mS}+12\text{mS})+j(8{,}1967\text{mS}-16\text{mS})$
$=21{,}8361\text{mS}-j7{,}8033\text{mS}=23{,}1885\text{mS}\angle-19{,}6647°$
$\underline{Z}_{1\|2}=1/\underline{Y}_{1\|2}=(23{,}1885\text{mS}\angle-19{,}6647°)^{-1}=43{,}1248\Omega\angle19{,}6647°=40{,}6097\Omega+j14{,}5121\Omega$

$\underline{Z}_4=\underline{Z}_{1\|2}+\underline{Z}_3=40{,}6097\Omega+j14{,}5121\Omega+56{,}875\Omega-j44{,}5123\Omega$
$=(40{,}6097\Omega+56{,}875\Omega)+j(14{,}5121\Omega-44{,}5123\Omega)=97{,}4847\Omega-j30{,}0002\Omega$
$=101{,}9965\Omega\angle-17{,}1054°$

$\underline{Z}_4=97{,}4847\Omega-j30{,}0002\Omega=101{,}9965\Omega(\cos[-17{,}1054°]+j\sin[-17{,}1054°])$

$=101{,}9965\Omega\exp(-j17{,}1054°)=101{,}9965\Omega\angle-17{,}1054°$

1.1. Zweite Variante - Berechnung über die Widerstände:

$\underline{Z}_{1\|2}=\underline{Z}_1\|\underline{Z}_2=\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)=78{,}1025\Omega\ \angle-39{,}8056°\cdot50\Omega\ \angle53{,}1301°/(60\Omega-j50\Omega+30\Omega+j40\Omega)$

$=3905{,}125\Omega^2\angle13{,}3245°\ /\ (90\Omega-j10\Omega)=3905{,}125\Omega^2\angle13{,}3245°\ /\ 90{,}5539\Omega\angle-6{,}3402°$
$=43{,}1249\Omega\angle19{,}6647°=40{,}6098\Omega+j14{,}5122\Omega$

$\underline{Z}_4=\underline{Z}_{1\|2}+\underline{Z}_3=40{,}6098\Omega+j14{,}5122\Omega+56{,}875\Omega-j44{,}5123\Omega=97{,}4848\Omega-j30{,}0001\Omega$
$=101{,}9965\Omega\angle-17{,}1053°$

$\underline{Z}_4=97{,}4848\Omega-j30{,}0001\Omega=101{,}9965\Omega(\cos[-17{,}1053°]+j\sin[-17{,}1053°])$

$=101{,}9965\Omega\exp(-j17{,}1053°)=101{,}9965\Omega\angle-17{,}1053°$

Zusammenfassung:

$\underline{U}$=866mV-j 500mV=1V(cos[-30°]+j sin[-30°])=1V exp(-j30°)=1V ∠-30°)

$\underline{Z}_1$=60Ω-j50Ω=78,1025Ω(cos[-39,8056°]+jsin[-39,8056°])=78,1025Ω exp(-j39,8056°)
=78,1025Ω ∠-39,8056°

$\underline{Z}_2$=30Ω+j40Ω=50Ω(cos[53,1301°]+jsin[53,1301°])=50Ω exp(j53,1301°)=50Ω ∠53,1301°

$\underline{Z}_3$=56,875Ω-j44,5123Ω=72,2223Ω(cos[-38,0479°]+jsin[-38,0479°])=72,2223Ω exp(-j38,0479°)
=72,2223Ω ∠-38,0479°

$\underline{Z}_4$=97,4847Ω-j30,0002Ω=101,9965Ω(cos[-17,1054°]+jsin[-17,1054°])
= 101,9965Ωexp(-j17,1054°)=101,9965Ω∠-17,1054°

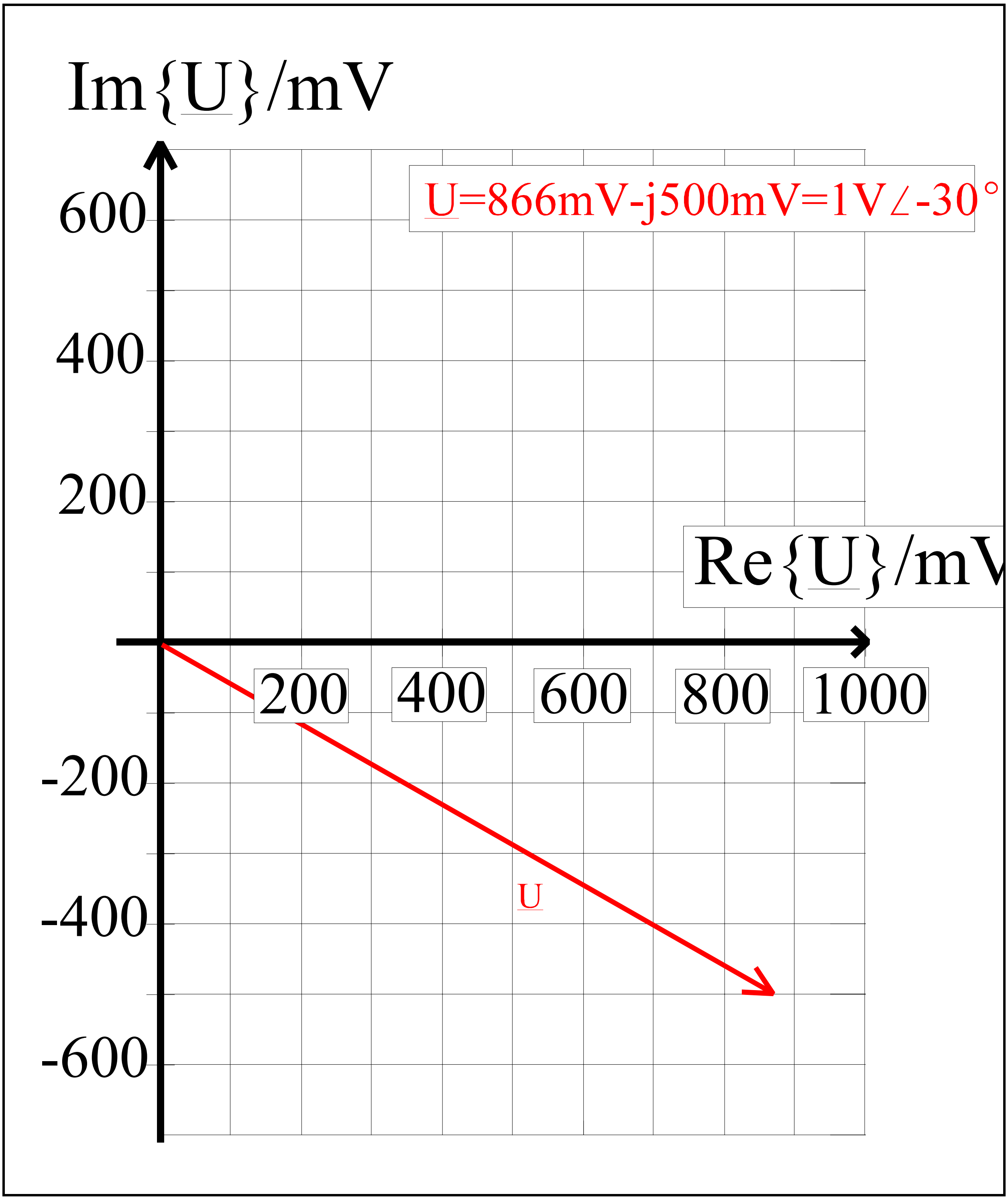
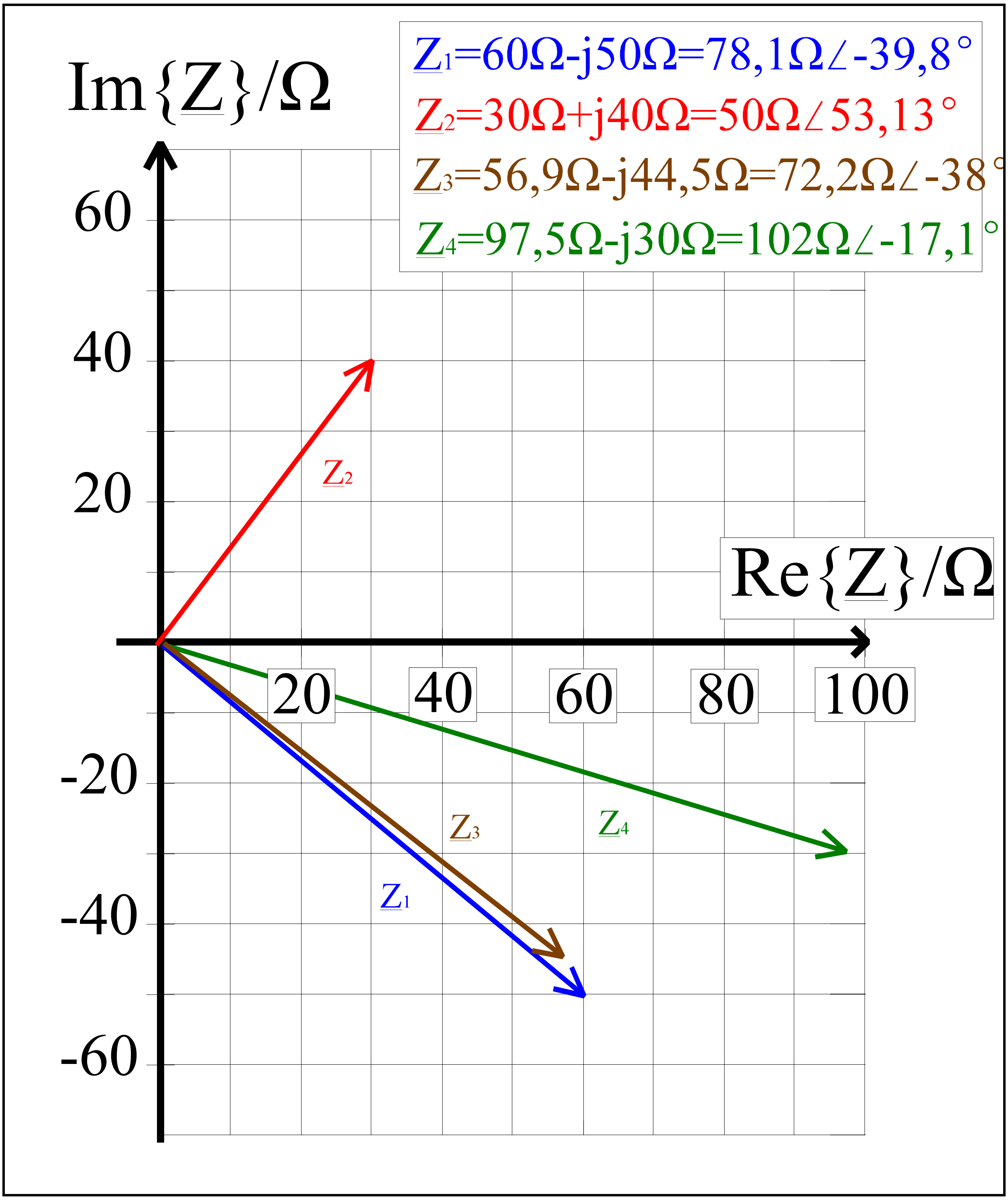

Im{U}/mV
U=866mV-j500mV=1V∠-30°
600
400
200
Re{U}/mV
200
400
600
800
1000
-200
-400
-600
U

Abb. 5



Im{Z}/Ω
Z1=60Ω-j50Ω=78,1Ω∠-39,8°
Z2=30Ω+j40Ω=50Ω∠53,13°
Z3=56,9Ω-j44,5Ω=72,2Ω∠-38°
Z4=97,5Ω-j30Ω=102Ω∠-17,1°
60
40
20
-20
-40
-60
Re{Z}/Ω
20
40
60
80
100
Z2
Z3
Z4
Z1

Abb. 6

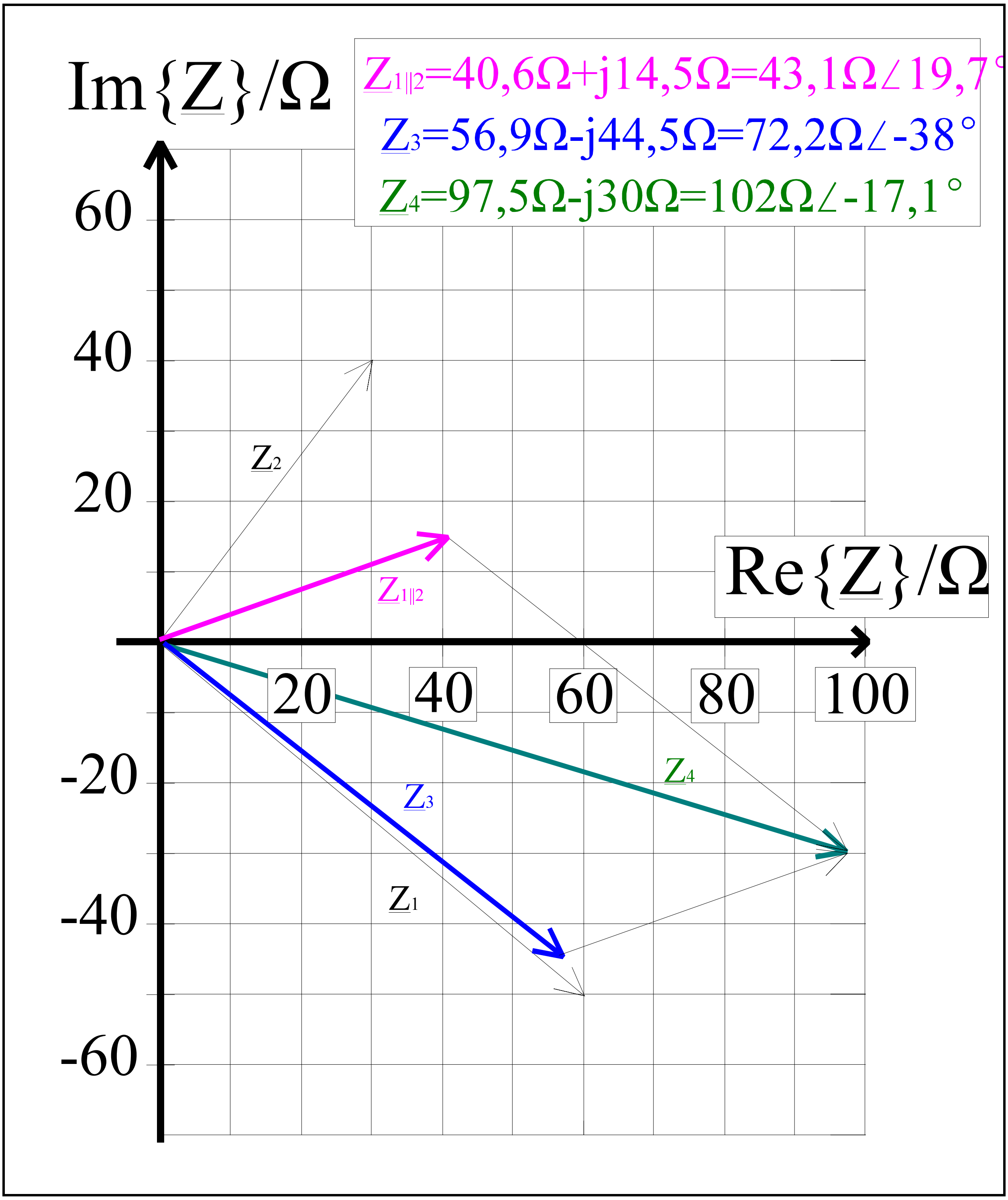

Im{Z}/Ω
Z1||2=40,6Ω+j14,5Ω=43,1Ω∠19,7°
Z3=56,9Ω-j44,5Ω=72,2Ω∠-38°
Z4=97,5Ω-j30Ω=102Ω∠-17,1°
60
40
20
-20
-40
-60
Z2
Z1||2
Re{Z}/Ω
20
40
60
80
100
Z4
Z3
Z1

Abb. 7