

Übung und Seminar zur Vorlesung „Grundlagen der Technischen Informatik 2“

2. Aufgabenkomplex

1. Aufgabe

1. Aufgabe

disjunktiv- und konjunktive Minimierung

Gegeben ist folgendes KV-Diagramm:

$x_4=0$		x_0					
		0	1	1	0		
x_3	0	0	1	5	4	0	x_1
	0	2	3	7	6	1	
	1	10	11	15	14	1	
	1	8	9	13	12	0	
		0	0	1	1		
		x_2					

$x_4=1$		x_0					
		0	1	1	0		
x_3	0	1	16	17	21	20	0
	0	18	19	23	22	1	
	1	26	27	31	30	1	
	1	24	25	29	28	0	
		0	0	1	1		
		x_2					

Bei logischen Schaltungen mit 5-Variablen kann man die Minimierung mittels 2 übereinander liegenden KV-Diagrammen vornehmen.

Dabei ist das KV-Diagramm für $x_4=0$ oben und das für $x_4=1$ unten.

1. Aufgabe

1. Aufgabe

disjunktive und konjunktive Minimierung

- 1.1. Bestimmen Sie die Minterme $MINT(\dots)$
- 1.2. Bestimmen Sie die Maxterme $MAXT(\dots)$
- 1.3. Bestimmen Sie die Tabelle
- 1.4. Bestimmen Sie die Primimplikanten (0. Ordnung und höher)
- 1.5. Bestimmen Sie die Kernprimimplikanten (0. Ordnung und höher)
- 1.6. Bestimmen Sie die Primimplikate (0. Ordnung und höher)
- 1.7. Bestimmen Sie die Kernprimimplikate (0. Ordnung und höher)
- 1.8. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der disjunktiv minimierte(n) Form(en) mit den geringsten Kosten mittels des KV-Diagramms
- 1.9. Bestimmen Sie die Kosten
- 1.10. Bestimmen Sie die Schaltung (**nicht gefordert**)
- 1.11. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der konjunktiv minimierte(n) Form(en) mit den geringsten Kosten mittels des KV-Diagramms
- 1.12. Bestimmen Sie die Kosten
- 1.13. Bestimmen Sie die Schaltung (**nicht gefordert**)

1. Aufgabe

- 1.14. Führen Sie eine NAND-Konversion der minimierten disjunktiven Form durch.
- 1.15. Bestimmen Sie die Schaltung **(nicht gefordert)**
- 1.16. Führen Sie eine NOR-Konversion der minimierten konjunktiven Form durch.
- 1.17. Bestimmen Sie die Schaltung **(nicht gefordert)**

2. Aufgabe

2. Aufgabe

Fragen zur Theorie

2.1. Zeigen Sie, dass $\{V, \neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem ist.
Rückführung von $\{\wedge, \vee, \neg\}$ auf $\{V, \neg\}$

Punkteverteilung:

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte

Aufgabe 1.1-1.17 je 2 Punkte

davon Aufgabe 1.10, 1.13, 1.15, 1.17, je 0 Punkte (nicht gefordert)

Aufgabe 2.1 je 4 Punkte

Bemerkung:

- Gemeinschaftsarbeiten sind nicht erlaubt. Jeder muss ein Aufgabenblatt abgeben.
- Bei Unklarheiten jeder Art, bitte auf dem Lernserver im entsprechenden Verzeichnis nachsehen.
- Haben mehr als 2/3 der Studenten den Aufgabenkomplex abgegeben, dann werden die Lösungen ins Netz gestellt.
- Die Schaltungen sind streng zu zeichnen, d.h. es sind alle Inverter zu zeichnen.
- Die disjunktive Baumdarstellung bitte aus der kanonisch disjunktive Normalform erstellen.
- Im Allgemeinen sind die Variablen gewichtet x_0 entspricht 2^0 , x_1 entspricht 2^1 , usw., so dass man die Minterme und Maxterme als Zahl auffassen kann.
- Es sind, wenn nicht ausdrücklich anders gefordert, nur AND-, OR- und NOT-Gatter zu verwenden.
- Es sind Gatter mit beliebig vielen Eingängen erlaubt.
- Im Venn-Diagramm bei den Mintermen bitte ausmalen oder eine 1 hineinschreiben
- Bei der Wertetabelle brauchen nur die Einsen geschrieben werden, ebenso im KV-Diagramm. Leere Felder sind immer gleich 0.

Bemerkung:

- Kernprimimplikanten sind eine Untermenge der Primimplikanten.
Primimplikanten sind eine Untermenge der Implikanten.
Im einfachsten Fall sind die Kernprimimplikanten gleich den Primimplikanten.
Analog gilt das auch für die Implikate.
- Kennzeichnung von
Implikanten (I), Primimplikanten (PI) und Kernprimimplikanten (KPI),
Implikate (Ika), Primimplikate (PIka) und Kernprimimplikate (KPIka)
Beispiel für Primimplikate 1. Ordnung : (1,5), (2,10), (9,13)
→ PIka2{(1,5), (2,10), (9,13)} usw.
- Die Kosten sind entsprechend der Kostenbestimmung im Quine-McCluskey
Verfahren aus der Vorlesung zu berechnen. Für n-Variablen hat der (Prim)implikant
0. Ordnung (Minterm) die Kosten n, der (Prim)implikant 1. Ordnung (2er Block) die
Kosten n-1 usw.
Analog gilt es auch für die (Prim)implikate
Es kann mehrere minimale Funktionen mit gleichen Kosten geben.

Hilfswerkzeuge:

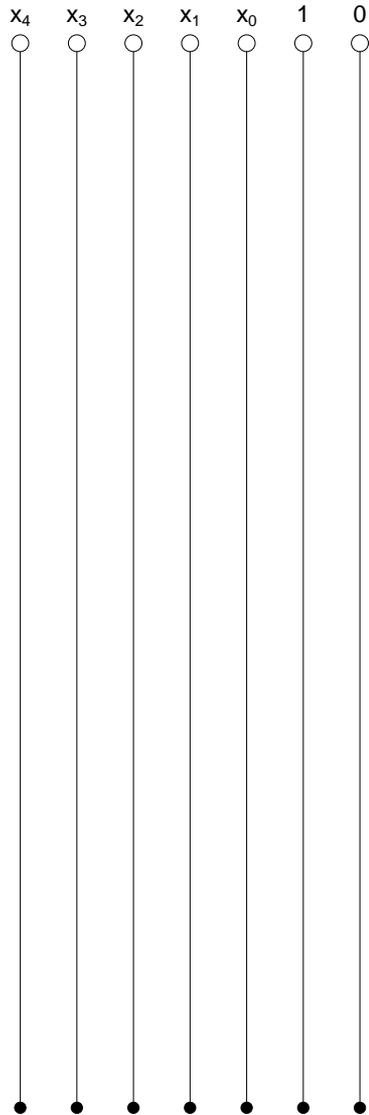
Nr.		Wert	Nr.		Wert
0	00000		16	10000	
1	00001		17	10001	
2	00010		18	10010	
3	00011		19	10011	
4	00100		20	10100	
5	00101		21	10101	
6	00110		22	10110	
7	00111		23	10111	
8	01000		24	11000	
9	01001		25	11001	
10	01010		26	11010	
11	01011		27	11011	
12	01100		28	11100	
13	01101		29	11101	
14	01110		30	11110	
15	01111		31	11111	

Hilfswerkzeuge:

$x_4=0$		x_0					
		0	1	1	0		
x_3	0	0	1	5	4	0	x_1
	0	2	3	7	6	1	
	1	10	11	15	14	1	
	1	8	9	13	12	0	
		0	0	1	1		
		x_2					

$x_4=1$		x_0					
		0	1	1	0		
x_3	0	16	17	21	20	0	x_1
	0	18	19	23	22	1	
	1	26	27	31	30	1	
	1	24	25	29	28	0	
		0	0	1	1		
		x_2					

Hilfswerkzeuge:



08.05.2009

1. Aufgabe Lösung

Gegeben ist folgendes KV-Diagramm:

$x_4=0$		x_0					
		0	1	1	0		
x_3	0	0	1	5	4	0	x_1
	0	2	3	7	6	1	
	1	10	11	15	14	1	
	1	8	9	13	12	0	
		0	0	1	1		
		x_2					

$x_4=1$		x_0					
		0	1	1	0		
x_3	0	16	17	21	20	0	x_1
	0	18	19	23	22	1	
	1	26	27	31	30	1	
	1	24	25	29	28	0	
		0	0	1	1		
		x_2					

Bei logischen Schaltungen mit 5-Variablen kann man die Minimierung mittels 2 übereinander liegenden KV-Diagrammen vornehmen.

Dabei ist das KV-Diagramm für $x_4=0$ oben und das für $x_4=1$ unten.

1. Aufgabe Lösung

- 1.1. Bestimmen Sie die Minterme $MINT(\dots)$
- 1.2. Bestimmen Sie die Maxterme $MAXT(\dots)$
- 1.3. Bestimmen Sie die Tabelle
- 1.4. Bestimmen Sie die Primimplikanten (0. Ordnung und höher)
- 1.5. Bestimmen Sie die Kernprimimplikanten (0. Ordnung und höher)
- 1.6. Bestimmen Sie die Primimplikate (0. Ordnung und höher)
- 1.7. Bestimmen Sie die Kernprimimplikate (0. Ordnung und höher)
- 1.8. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der disjunktiv minimierte(n) Form(en) mit den geringsten Kosten mittels des KV-Diagramms
- 1.9. Bestimmen Sie die Kosten
- 1.10. Bestimmen Sie die Schaltung
- 1.11. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der konjunktiv minimierte(n) Form(en) mit den geringsten Kosten mittels des KV-Diagramms
- 1.12. Bestimmen Sie die Kosten
- 1.13. Bestimmen Sie die Schaltung

1. Aufgabe Lösung

- 1.14. Führen Sie eine NAND-Konversion der minimierten disjunktiven Form durch.
- 1.15. Bestimmen Sie die Schaltung (nicht gefordert)
- 1.16. Führen Sie eine NOR-Konversion der minimierten konjunktiven Form durch.
- 1.17. Bestimmen Sie die Schaltung (nicht gefordert)

Lösung - 1. Aufgabe

- 1.1. Bestimmen Sie die Minterme $\text{MINt}(\dots)$
- 1.2. Bestimmen Sie die Maxterme $\text{MAXt}(\dots)$
- 1.3. Bestimmen Sie die Tabelle

$$Q = \text{MINt}(6,7,8,12,13,14,15,16,19,22,23,30,31)$$

$$Q = \text{MAXt}(0,1,2,3,4,5,9,10,11, \\ 17,18,20,21,24,25,26,27,28,29)$$

Nr.		Wert	Nr.		Wert
0	00000		16	10000	1
1	00001		17	10001	
2	00010		18	10010	
3	00011		19	10011	1
4	00100		20	10100	
5	00101		21	10101	
6	00110	1	22	10110	1
7	00111	1	23	10111	1
8	01000	1	24	11000	
9	01001		25	11001	
10	01010		26	11010	
11	01011		27	11011	
12	01100	1	28	11100	
13	01101	1	29	11101	
14	01110	1	30	11110	1
15	01111	1	31	11111	1

Lösung - 1. Aufgabe

- 1.4. Bestimmen Sie die Primimplikanten (0. Ordnung und höher)
1.5. Bestimmen Sie die Kernprimimplikanten (0. Ordnung und höher)

 $PI_0 \{16\}$ $PI_1 \{(8,12), (19,23)\}$ $PI_2 \{(12,13,14,15)\}$ $PI_3 \{(6,7,14,15,22,23,30,31)\}$ $KPI_0 \{16\}$ $KPI_1 \{(8,12), (19,23)\}$ $KPI_2 \{(12,13,14,15)\}$ $KPI_3 \{(6,7,14,15,22,23,30,31)\}$

Die Kernprimimplikanten sind gleich den Primimplikanten

Lösung - 1. Aufgabe

1.6. Bestimmen Sie die Primimplikate (0. Ordnung und höher)

1.7. Bestimmen Sie die Kernprimimplikate (0. Ordnung und höher)

neu

$PIka0\{\}$

$PIka1\{\}$

$PIka2\{(0,1,2,3), (0,1,4,5), (1,3,9,11), (1,5,17,21), (1,9,17,25), (2,3,10,11), (2,10,18,26), (4,5,20,21), (9,11,25,27), (10,11,26,27), (17,21,25,29), (20,21,28,29), (24,25,26,27), (24,25,28,29)\}$

$PIka3\{\}$

$PIka4\{\}$

$KPIka0\{\}$

$KPIka1\{\}$

$KPIka2\{(2,10,18,26)\}$

$KPIka3\{\}$

$KPIka4\{\}$

Lösung - 1. Aufgabe

- 1.8. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der disjunktiv minimierte(n) Form(en) mit den geringsten Kosten mittels des KV-Diagramms
- 1.9. Bestimmen Sie die Kosten

$$\text{KPI0} \{(16)\} \Rightarrow (x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0)$$

$$\text{KPI1} \{(8,12), (19,23)\} \Rightarrow (\bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_0), (x_4 \bar{x}_3 x_1 x_0)$$

$$\text{KPI2} \{(12,13,14,15)\} \Rightarrow (\bar{x}_4 x_3 x_2)$$

$$\text{KPI3} \{(6,7,14,15,22,23,30,31)\} \Rightarrow (x_2 x_1)$$

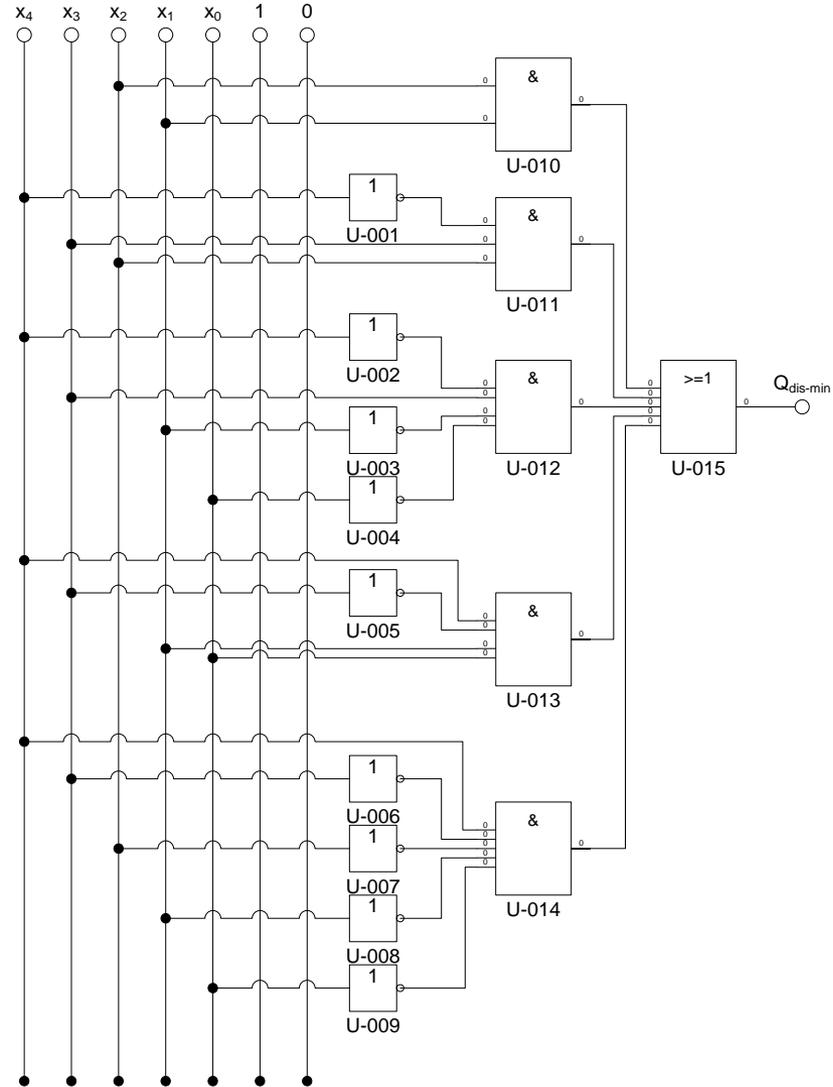
$$Q_{dis-min} : (6,7,14,15,22,23,30,31), (12,13,14,15), (8,12), (19,23), (16)$$

$$\text{Kosten}(Q_{dis-min}) = 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 18$$

$$Q_{dis-min} = f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 \vee \bar{x}_4 x_3 x_2 \vee \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_4 \bar{x}_3 x_1 x_0 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

Lösung - 1. Aufgabe

1.10. Bestimmen Sie die Schaltung



$$Q_{dis-min} = x_2 x_1 \vee \bar{x}_4 x_3 x_2 \vee \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_4 \bar{x}_3 x_1 x_0 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

Lösung - 1. Aufgabe

- 1.11. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der konjunktiv minimierte(n) Form(en) mit den geringsten Kosten mittels des KV-Diagramms
- 1.12. Bestimmen Sie die Kosten

Eine von mehreren Möglichkeiten. Laut 2. Quinescher Tabelle.

$$PI_{ka} \{(0,1,4,5), (1,3,9,11), (17,21,25,29), (20,21,28,29), (24,25,26,27)\}$$

$$\Rightarrow (x_4 \vee x_3 \vee x_1)(x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)$$

$$KPI_{ka} \{(2,10,18,26)\} \Rightarrow (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$$

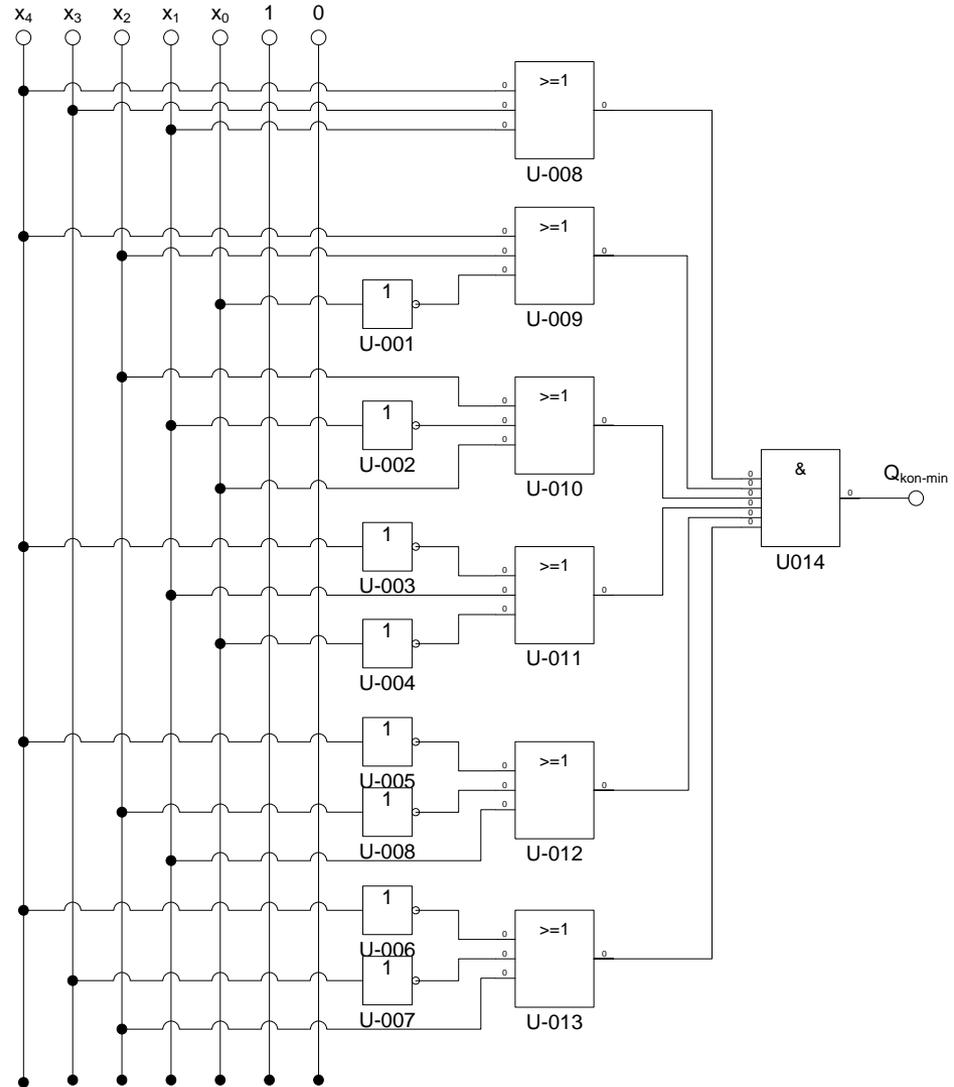
$$Q_{kon-min} : (0,1,4,5), (1,3,9,11), (2,10,18,26), (17,21,25,29), (20,21,28,29), (24,25,26,27)$$

$$Kosten(Q_{dis-min}) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$$

$$Q_{kon-min} = f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = (x_4 \vee x_3 \vee x_1)(x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \\ (\bar{x}_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)$$

Lösung - 1. Aufgabe

1.13. Bestimmen Sie die Schaltung



$$Q_{kon-min} = (x_4 \vee x_3 \vee x_1)(x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)(\bar{x}_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)$$

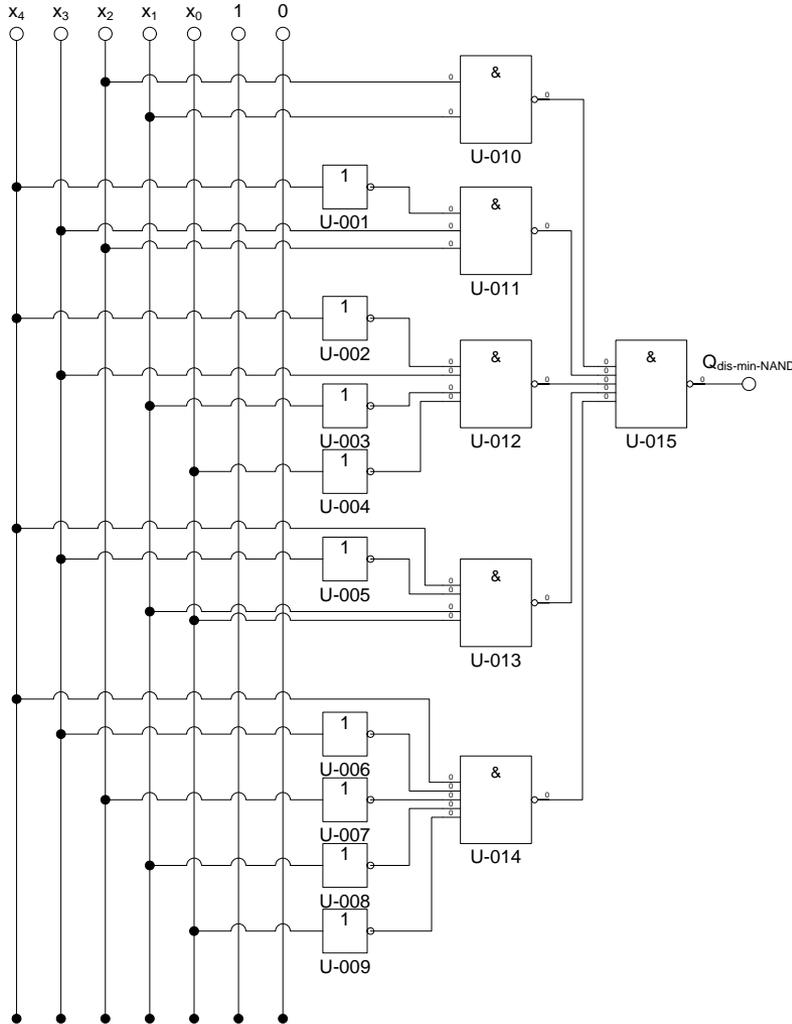
1. Aufgabe

1.14. Führen Sie eine NAND-Konversion der minimierten disjunktiven Form durch.

$$\begin{aligned}
 Q_{dis-min} &= \underline{\underline{x_2 x_1 \vee \bar{x}_4 x_3 x_2 \vee \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_4 \bar{x}_3 x_1 x_0 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
 &= \underline{\underline{x_2 x_1 \vee \bar{x}_4 x_3 x_2 \vee \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_4 \bar{x}_3 x_1 x_0 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
 Q_{dis-min-NAND} &= \underline{\underline{\underline{\underline{x_2 x_1} \wedge \underline{\underline{\bar{x}_4 x_3 x_2}} \wedge \underline{\underline{\bar{x}_4 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \wedge \underline{\underline{x_4 \bar{x}_3 x_1 x_0}} \wedge \underline{\underline{x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}}}}}} \\
 &= \underline{\underline{NAND_5[NAND_2(x_2, x_1), NAND_3(\bar{x}_4, x_3, x_2), NAND_4(\bar{x}_4, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_0), \\
 &NAND_4(x_4, \bar{x}_3, x_1, x_0), NAND_5(x_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0)]}}
 \end{aligned}$$

1. Aufgabe

1.15. Bestimmen Sie die Schaltung (nicht gefordert)



$$Q_{dis-min-NAND} = x_2 x_1 \wedge \overline{x_4} x_3 x_2 \wedge \overline{x_4} x_3 \overline{x_1} \overline{x_0} \wedge x_4 \overline{x_3} x_1 x_0 \wedge x_4 \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}$$

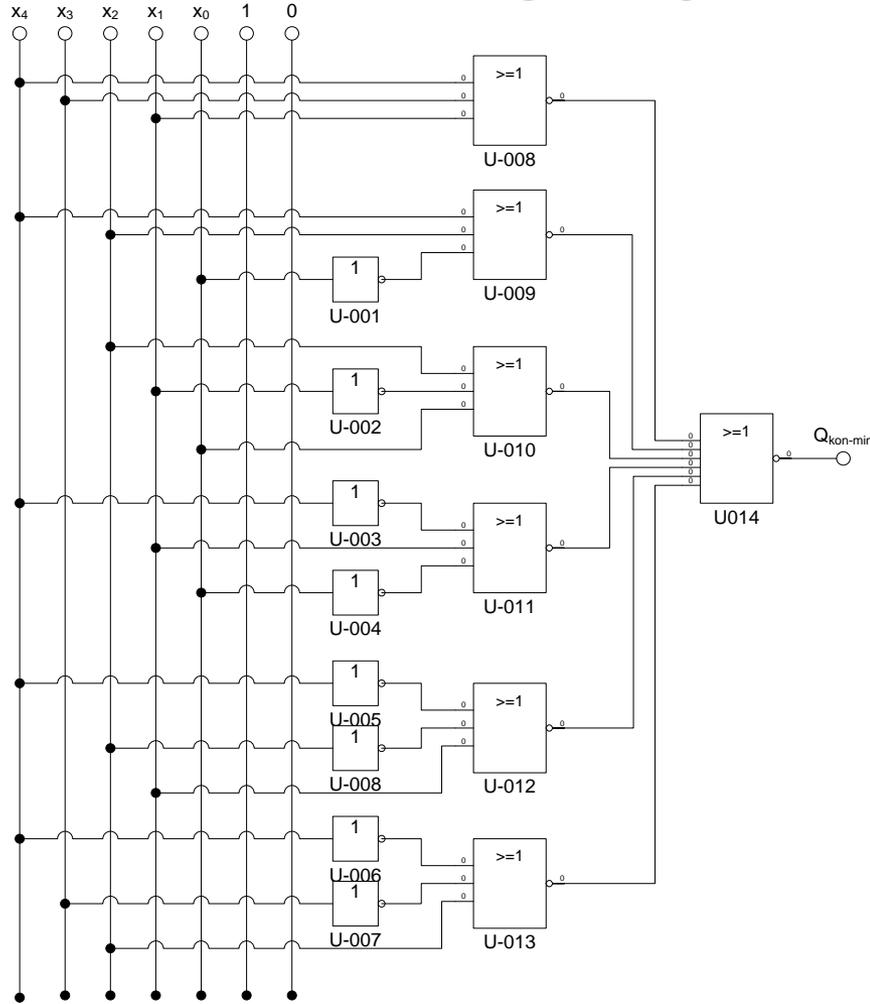
1. Aufgabe

1.16. Führen Sie eine NOR-Konversion der minimierten konjunktiven Form durch.

$$\begin{aligned}
 Q_{kon-min} &= (x_4 \vee x_3 \vee x_1)(x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \\
 &\quad (\bar{x}_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2) \\
 &= \overline{\overline{(x_4 \vee x_3 \vee x_1)(x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}} \\
 &\quad \overline{\overline{(\bar{x}_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)}} \\
 Q_{kon-min-NOR} &= \overline{\overline{(x_4 \vee x_3 \vee x_1) \vee (x_4 \vee x_2 \vee \bar{x}_0) \vee (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \vee}} \\
 &\quad \overline{\overline{(\bar{x}_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \vee (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \vee (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)}}} \\
 &= NOR_6[NOR_3(x_4, x_3, x_1), NOR_3(x_4, x_2, \bar{x}_0), NOR_3(x_2, \bar{x}_1, x_0), \\
 &\quad NOR_3(\bar{x}_4, x_1, \bar{x}_0), NOR_3(\bar{x}_4, \bar{x}_2, x_1), NOR_3(\bar{x}_4, \bar{x}_3, x_2)]
 \end{aligned}$$

1. Aufgabe

1.17. Bestimmen Sie die Schaltung (nicht gefordert)



$$Q_{kon-min-NOR} = (\overline{x_4} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_1}) \vee (\overline{x_4} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_0}) \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_0}) \vee (\overline{x_4} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_0}) \vee (\overline{x_4} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}) \vee (\overline{x_4} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2})$$

2. Aufgabe Lösung neu

Fragen zur Theorie

- 2.1. Zeigen Sie, dass $\{V, \neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem ist.
Rückführung von $\{\wedge, \vee, \neg\}$ auf $\{V, \neg\}$

2.1. Zeigen Sie, dass $\{V, \neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem ist.

Rückführung von $\{\wedge, \vee, \neg\}$ auf $\{V, \neg\}$

Wir gehen davon aus, dass $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem ist.

$$a \wedge b = \neg (\neg (a \wedge b)) = \neg (\neg a \vee \neg b))$$