



## Seminaraufgaben

2.Semester – Sommersemester 2000

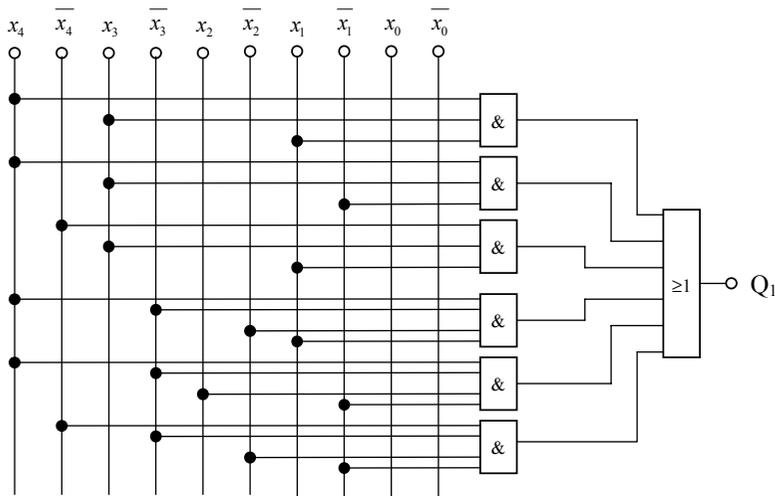
Abt. Technische Informatik  
Gerätebeauftragter  
Dr. rer.nat. Hans-Joachim Lieske  
Tel.: [49]-0341-97 32213  
Zimmer: HG 05-22  
e-mail: [lieske@informatik.uni-leipzig.de](mailto:lieske@informatik.uni-leipzig.de)

### Aufgaben zur Übung Grundlagen der Technische Informatik 2

#### 3. Aufgabenkomplex - 1. Aufgabe

##### Minimierung logischer Schaltungen mittels des Verfahrens von Quine-Mc-Cluskey

Gegeben ist folgende Schaltung:



Leider ist diese Schaltung nicht optimal.

Aufgaben:

Minimieren Sie die Schaltung nach Quine-Mc-Cluskey. **(30 Punkte)**

- Bestimmen Sie die logische Gleichung  $Q=f(x_4,x_3,x_2,x_1,x_0)$  nach der Schaltung. **(5 Punkte)**
- Bestimmen Sie die Minterme der Funktion. **(5 Punkte)**
- Bestimmen Sie die 1. Quinesche Tabelle. **(5 Punkte)**
- Bestimmen Sie die 2. Quinesche Tabelle. **(5 Punkte)**
- Lösen Sie das Überdeckungsproblem. minimieren Sie die Schaltung und bestimmen Sie die Lösungen  $Q_{1-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ ,  $Q_{2-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ , ... mit den geringsten und zweit-geringsten Kosten. **(5 Punkte - nur für geringste Kosten)**
- Zeichnen Sie die Schaltpläne der minimierten Booleschen Funktionen mit den geringsten und zweit-geringsten Kosten  $Q_{1-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ ,  $Q_{2-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ , ... nach der Gleichung ähnlich der Schaltung (nicht streng). **(5 Punkte - nur für geringste Kosten)**





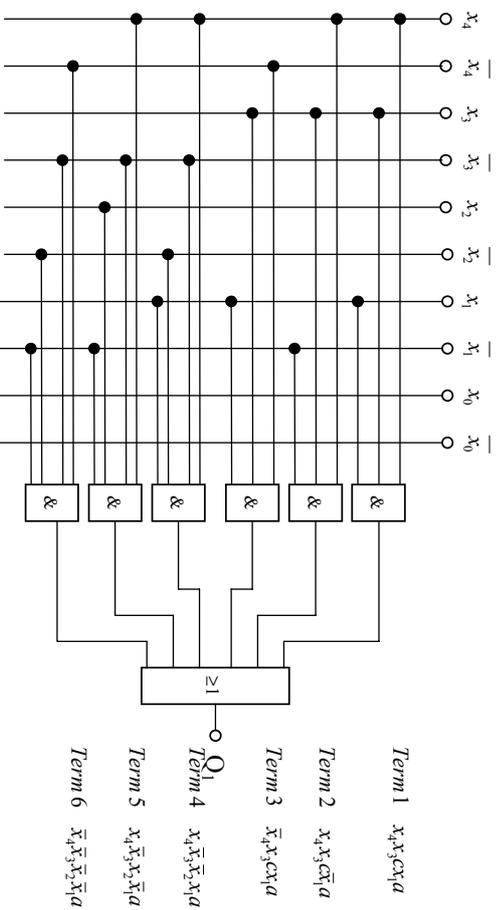


# Lösung

## 3. Aufgabenkomplex - 1. Aufgabe

Minimieren Sie die Schaltung nach Quine-McCluskey.

1. Bestimmen Sie die logische Gleichung  $Q=f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$  nach der Schaltung.



$$Q = x_4x_3x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4\bar{x}_3x_2x_1 \vee \bar{x}_4\bar{x}_3x_2x_1 \\ = x_4x_3cx_1a \vee x_4x_3c\bar{x}_1a \vee \bar{x}_4x_3cx_1a \vee x_4x_3x_2x_1a \vee x_4\bar{x}_3x_2x_1a \vee \bar{x}_4\bar{x}_3x_2x_1a$$

11c1a = Term 1 11010 = 26 11011 = 27 11110 = 30 11111 = 31	11c0a = Term 2 11000 = 24 11001 = 25 11100 = 28 11101 = 29	01c1a = Term 3 01010 = 10 01011 = 11 01110 = 14 01111 = 15
1001a = Term 4 10010 = 18 10011 = 19	1010a = Term 5 10100 = 20 10101 = 21	0000a = Term 6 00000 = 00 00001 = 01

2. Bestimmen Sie die Minterme der Funktion.

Zahl	vollständige Funktionstabelle				
	Eingangsvariablen $x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$	Einsen	Minterme	Maxterme	Term
0	00000	0	$\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>6</b>
1	00001	1	$\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>6</b>
2	00010			$x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$	
3	00011			$x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	
4	00100			$x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$	
5	00101			$x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0x_4 \vee$	
6	00110			$x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$	
7	00111			$x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	
8	01000			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0$	
9	01001			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$	
10	01010	2	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>3</b>
11	01011	3	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>3</b>
12	01100			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$	
13	01101			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$	
14	01110	3	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>3</b>
15	01111	4	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>3</b>
16	10000			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0$	
17	10001			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$	
18	10010	2	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>4</b>
19	10011	3	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>4</b>
20	10100	2	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>5</b>
21	10101	3	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>5</b>
22	10110			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$	
23	10111			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	
24	11000	2	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>2</b>
25	11001	3	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>2</b>
26	11010	3	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>1</b>
27	11011	4	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>1</b>
28	11100	3	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>2</b>
29	11101	4	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>2</b>
30	11110	4	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>1</b>
31	11111	5	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>1</b>

3. Bestimmen Sie die 1. Quinesche Tabelle

1. Quinesche Tabelle (1. Teil)						2. Ordnung						
0. Ordnung	1. Ordnung			2. Ordnung			3. Ordnung			4. Ordnung		
Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	
$K_0^0$	$K_0^1$	$K_1^0$	$K_1^1$	$K_0^2$	$K_1^2$	$K_2^0$	$K_2^1$	$K_2^2$	$K_3^0$	$K_3^1$	$K_3^2$	
0	00000	(1A) 01	0000-	26,27	1101-	10,11,14,15	01-1-	25,29,27,31	11--1			
			26,30	11-10	10,11,26,27	-101-	26,27,30,31	11-1-				
1	00001	----	28,29	1110-	10,14,11,15	01-1-	26,30,27,31	11-1-				
			28,30	111-0	10,14,26,30	-1-10	28,29,30,31	111--				
10	01010	10,11	0101-		10,26,11,27	-101-	28,30,29,31	111--				
18	10010	10,14	01-10	15,31	-1111	10,26,14,30	-1-10					
20	10100	10,26	-1010	27,31	11-11	(2A) 18,19,26,27	1-01-					
24	11000	18,19	1001-	29,31	111-1	18,26,19,27	1-01-					
		18,26	1-010			(2B) 20,21,28,29	1-10-					
11	01011	20,21	1010-	30,31	1111-	20,28,21,29	1-10-					
14	01110	20,28	1-100			24,25,26,27	110--					
19	10011	24,25	1100-			24,25,28,29	11-0-					
21	10101	24,26	110-0			24,26,25,27	110--					
25	11001	24,28	11-00			24,26,28,30	11-0-					
26	11010					24,28,25,29	11-0-					
28	11100	11,15	01-11			24,28,26,30	11-0-					
		11,27	-1011									
15	01111	14,15	0111-			11,15,27,31	-1-11					
27	11011	14,30	-1110			11,27,15,31	-1-11					
29	11101	19,27	1-011			14,15,30,31	-111-					
30	11110	21,29	1-101			14,30,15,31	-111-					
		25,27	110-1									
31	11111	25,29	11-01			25,27,29,31	11-1-					

Wenn der Term der mit den Termen der niederen- und der höheren Gruppe nicht vereinfacht werden kann, dann Primimplikant.

1. Quinesche Tabelle (2. Teil)		Primimplikant
3. Ordnung		
10,11,14,15, 26,27,30,31	-1-1-	3A
10,11,26,27, 14,15,30,31	-1-1-	
10,14,26,30, 11,15,27,31	-1-1-	
24,25,26,27, 28,29,30,31	11---	3B
24,25,28,29, 26,27,30,31	11---	
24,26,28,30, 25,27,29,31	11---	
4. Ordnung		
----		

- Bestimmen Sie die 2. Quinesche Tabelle
- Lösen Sie das Überdeckungsproblem, minimieren Sie die Schaltung und bestimmen Sie die Lösung  $Q_{1-\min}$ (Kosten=...),  $Q_{2-\min}$ (Kosten=...), ... mit den geringsten und zweitgeringsten Kosten.
- Zeichnen Sie die Schalpläne der minimierten Booleschen Funktionen mit den geringsten und zweitgeringsten Kosten  $Q_{1-\min}$ (Kosten=...),  $Q_{2-\min}$ (Kosten=...), ... nach der Gleichung ähnlich der Schaltung (nicht streng).

		2. Quinesche Tabelle																			
Prim-implikant		0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31	Kosten	
1A	x x																			4	
2A								x	x											3	
2B										x	x									3	
3A				x	x	x	x													2	
3B																				2	
		0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31	14	
		Kosten 2+2+3+3+4=14																			

$$u_j = w_{1A}w_{2A}w_{3A}w_{3B}w_{3A}w_{3B}$$

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3x_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_3x_1 \vee x_4x_3$$

$$u_j = w_{1A}w_{1A}w_{3A}w_{3A}w_{3A}w_{3A}w_{2A}w_{2A}w_{2A}w_{2A}w_{3B}w_{3B}w_{3B}w_{3B}(w_{3A} \vee w_{3A} \vee w_{3A} \vee w_{3A} \vee w_{3A} \vee w_{3A} \vee w_{3A} \vee w_{3A})$$

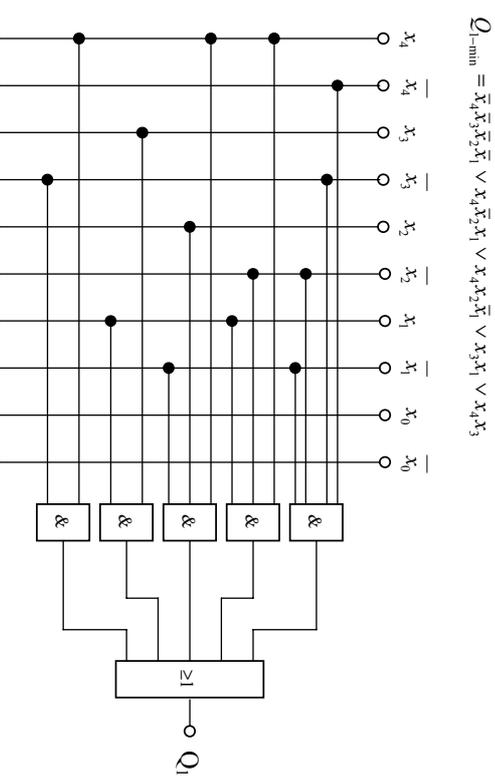
$$(w_{2B} \vee w_{3B})(w_{2B} \vee w_{3B})(w_{3A} \vee w_{3B})(w_{3A} \vee w_{3B})$$

$$= w_{1A}w_{3A}w_{3A}w_{2A}w_{2B}w_{3B}(w_{2A} \vee w_{3A} \vee w_{3B})(w_{2B} \vee w_{3B})(w_{3A} \vee w_{3B})$$

$$= w_{1A}w_{3A}w_{2A}w_{2B}w_{3B}$$

$$= w_{1A}w_{2A}w_{2B}w_{3A}w_{3B}$$

		2. Quinesche Tabelle																			
Prim-implikant		0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31	Kosten	
1A	x x																			4	
2A								x	x											3	
2B										x	x									3	
3A				x	x	x	x													2	
3B																				2	
		0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31	14	
		Kosten 2+2+3+3+4=14																			
		$u_j = w_{1A}w_{2A}w_{2B}w_{3A}w_{3B}$																			
		$Q_{1-\min} = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3x_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_3x_1 \vee x_4x_3$																			

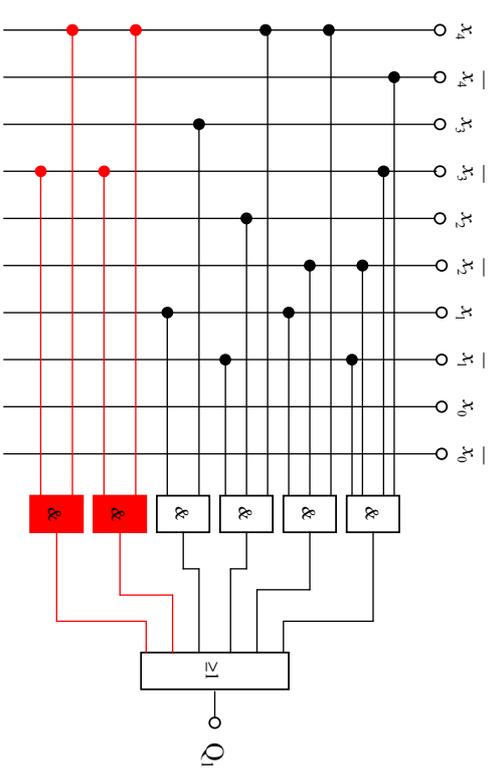


Für die Bestimmung der Logischen Gleichung mit zweitgeringsten kosten existieren viele Möglichkeiten. Nach der von uns benutzten Definition entspricht der Kostenfaktor der Anzahl der Variablen in der Logischen Gleichung bzw. der Anzahl der Leitungen zu den UND-Gattern in der Schaltung.

Prinzipiell besteht auch die Möglichkeit einen der Terme mit geringsten Kosten nochmals mit ODER anzuhängen. Man erhält dann z.B.:

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_3x_2x_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_3x_1 \vee x_4x_3 (\vee x_4x_3)$$

Kosten = 16



Will man weitere Erweiterungen durchführen kann man einen Anschluß an eine Weitere Variable realisieren. Man erhält dann allerdings dann den neuen Kostenfaktor  $k=2k+2$  was allerdings nicht dem zweitgeringsten Kostenfaktor entspricht.  
 Um die Einhaltung des logischen Inhaltes zu gewährleisten kann man im einfachsten Fall eine UND-Verknüpfung mit „1“ durchführen.

Das ist im einfachsten Fall :  $x_i \vee \bar{x}_i$

Um den geringsten Kostenzuwachs zu erhalten führt man eine UND-Verknüpfung mit den Termen mit den geringsten Kosten durch.

Hier eines der vielen Möglichkeiten:

$$Q_{\text{min}} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 x_2 x_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3 (x_0 \vee \bar{x}_0) \\ \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 x_2 x_1 \vee x_3 x_1 \vee (x_4 x_3 x_0 \vee x_4 x_3 \bar{x}_0)$$

Kosten = 18

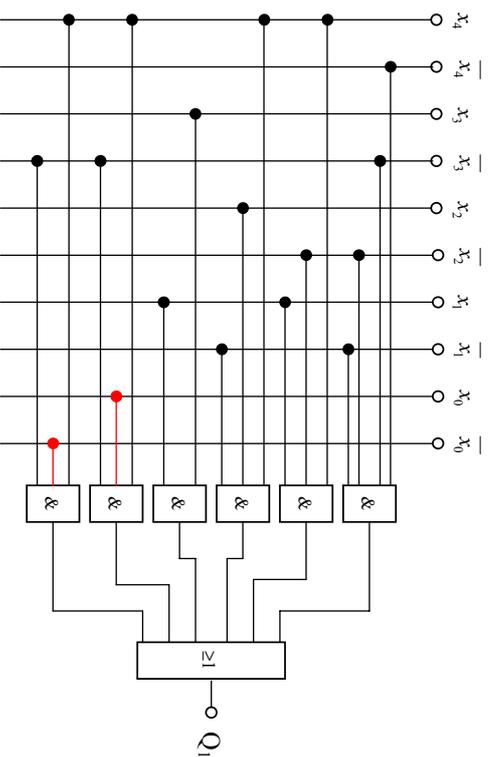


Fig. 5 Variable ist es noch möglich das KV-Diagramm zu verwenden. Man hat dann 2 räumlich angeordnete Diagramme. – Laut Aufgabenschaltbild:

$X_4=0$	$X_0$				$X_1$
	0	1	1	0	
0	0	1	1	0	0
	0	1	1	0	
0	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	
$X_4=1$	$X_0$				$X_1$
	0	1	1	0	
0	0	1	1	0	0
	0	1	1	0	
0	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	
$X_3$	$X_2$				$X_1$
	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	

$$Q = x_4 x_3 x_2 x_1 \vee x_4 x_3 x_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 \vee x_4 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$$

	$X_0$				
$X_4=0$	0	1	1	0	
0	1	1		0	
0				1	
$X_3$	1	1	1	1	$X_1$
1					
	8	9	13	12	
	$X_2$				
	0	0	1	1	

$$Q_{\text{min}} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3$$

	$X_0$				
$X_4=1$	0	1	1	0	
0			1	1	0
0	1	1			1
$X_3$	1	1	1	1	$X_1$
1					
	16	17	21	20	4
	18	19	5	23	22
	26	27	31	30	
	24	25	29	28	2
	$X_2$				
	0	0	1	1	

	$X_0$				
$X_4=0$	0	1	1	0	
0	1	1		0	$X_1$
0					
$X_3$	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1				0
	0	0	1	1	
	$X_2$				

$$Q_{-min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3$$

	$X_0$				
$X_4=1$	0	1	1	0	
0				0	$X_1$
0	1	1			
$X_3$	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1				0
	0	0	1	1	
	$X_2$				

	$X_0$				
$X_4=0$	0	1	1	0	
0	1	1		0	$X_1$
0					
$X_3$	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1				0
	0	0	1	1	
	$X_2$				

$$Q_{-min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_1 \vee x_4 x_3$$

	$X_0$				
$X_4=1$	0	1	1	0	
0				0	$X_1$
0	1	1			
$X_3$	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1				0
	0	0	1	1	
	$X_2$				