

# Seminaraufgaben

2.Semester – Sommersemester 2000

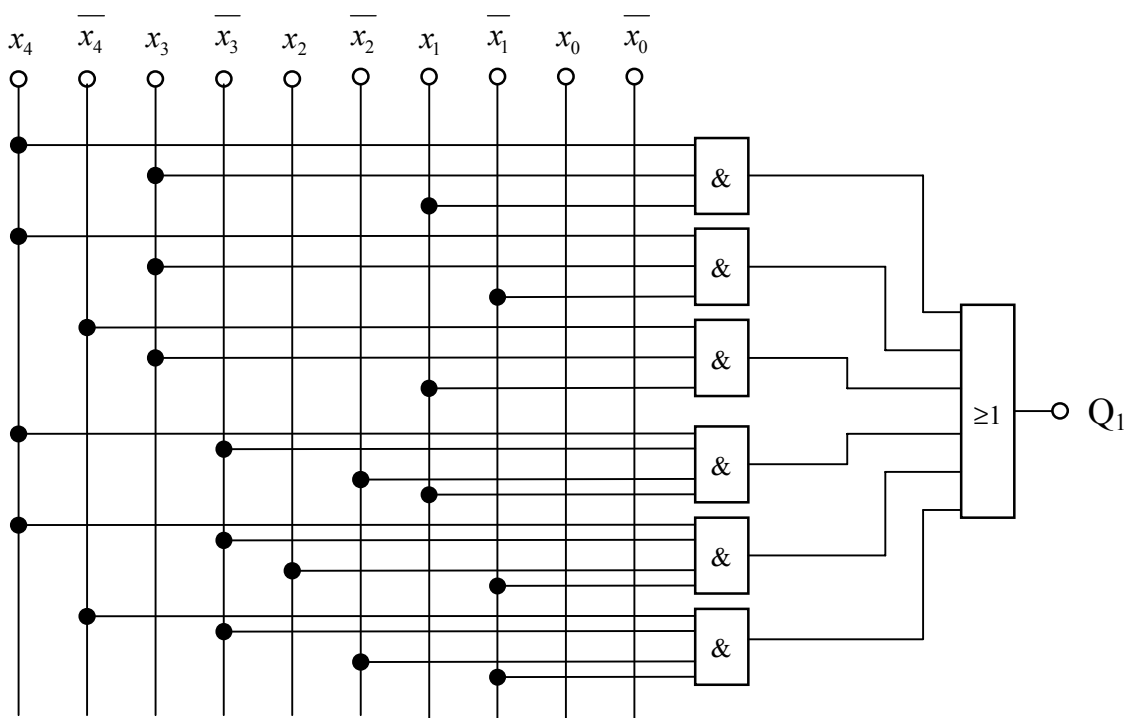
Abt. Technische Informatik  
*Gerätebeauftragter*  
 Dr. rer.nat. Hans-Joachim Lieske  
 Tel.: [49]-0341-97 32213  
 Zimmer: HG 05-22  
 e-mail: [lieske@informatik.uni-leipzig.de](mailto:lieske@informatik.uni-leipzig.de)

## Aufgaben zur Übung Grundlagen der Technische Informatik 2

### 3. Aufgabenkomplex - 1. Aufgabe

#### Minimierung logischer Schaltungen mittels des Verfahrens von Quine-Mc-Cluskey

Gegeben ist folgende Schaltung:



Leider ist diese Schaltung nicht optimal.

## Aufgaben:

Minimieren Sie die Schaltung nach Quine-Mc-Cluskey. **(30 Punkte)**

1. Bestimmen Sie die logische Gleichung  $Q=f(x_4,x_3,x_2,x_1,x_0)$  nach der Schaltung. **(5 Punkte)**
2. Bestimmen Sie die Minterme der Funktion. **(5 Punkte)**
3. Bestimmen Sie die 1. Quinesche Tabelle. **(5 Punkte)**
4. Bestimmen Sie die 2. Quinesche Tabelle . **(5 Punkte)**
5. Lösen Sie das Überdeckungsproblem. minimieren Sie die Schaltung und bestimmen Sie die Lösungen  $Q_{1-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ ,  $Q_{2-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ , ... mit den geringsten und zweit-geringsten Kosten. **(5 Punkte - nur für geringste Kosten)**
6. Zeichnen Sie die Schaltpläne der minimierten Booleschen Funktionen mit den geringsten und zweit-geringsten Kosten  $Q_{1-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ ,  $Q_{2-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ , ... nach der Gleichung ähnlich der Schaltung (nicht streng). **(5 Punkte - nur für geringste Kosten)**

Hilfen:

vollständige Funktionstabelle				
Zahl	Eingangsvariablen $x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$	y	Minterme	Term
0	00000			
1	00001			
2	00010			
3	00011			
4	00100			
5	00101			
6	00110			
7	00111			
8	01000			
9	01001			
10	01010			
11	01011			
12	01100			
13	01101			
14	01110			
15	01111			
16	10000			
17	10001			
18	10010			
19	10011			
20	10100			
21	10101			
22	10110			
23	10111			
24	11000			
25	11001			
26	11010			
27	11011			
28	11100			
29	11101			
30	11110			
31	11111			

## 1. Quinesche Tabelle (1. Teil)

0. Ordnung					
Nr.	$X_4X_3X_2X_1X_0$	Primim- plikant	Nr.	$X_4X_3X_2X_1X_0$	Primim- plikant

Wenn der Term der mit den Termen der niederen- und der höheren Gruppe nicht vereinfacht werden kann, dann Primimplikant



### 1. Quinesche Tabelle (3. Teil)

2. Ordnung					
Nr.	$x_4x_3x_2x_1x_0$	Primim- plikant	Nr.	$x_4x_3x_2x_1x_0$	Primim- plikant





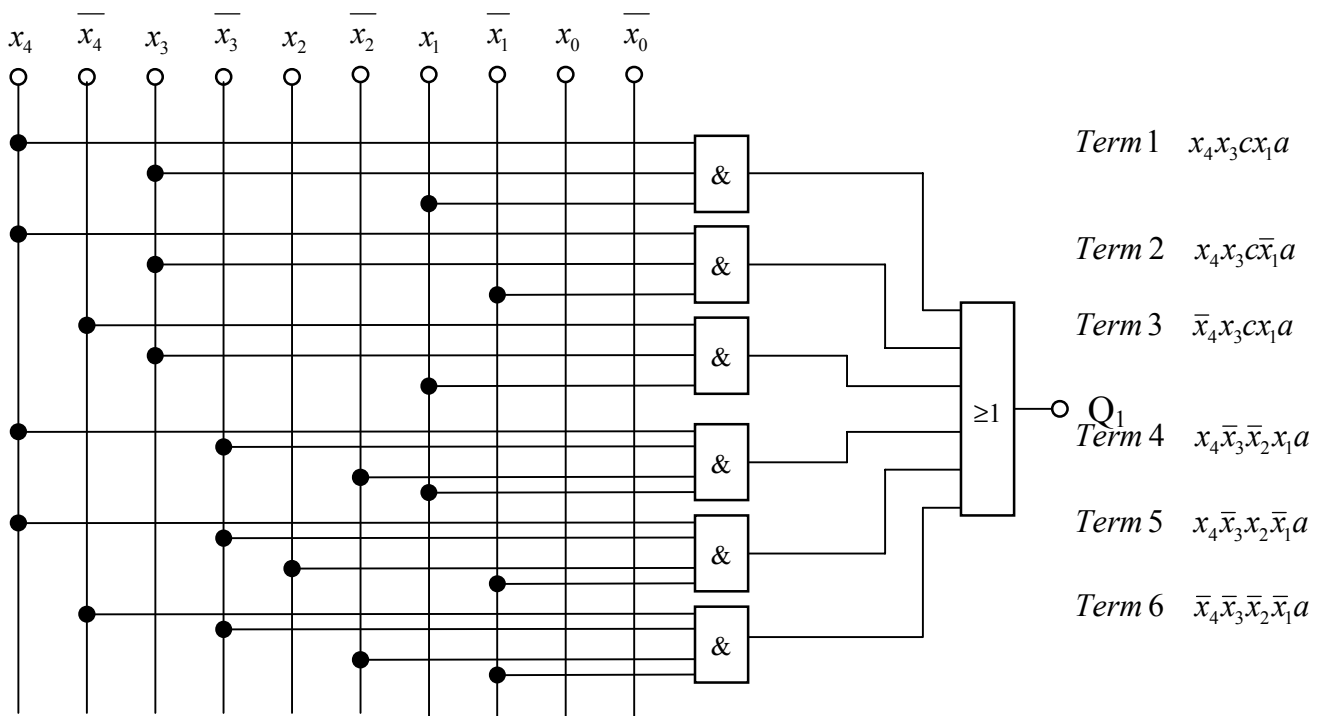


# Lösung

## 3. Aufgabenkomplex - 1. Aufgabe

Minimieren Sie die Schaltung nach Quine-Mc-Cluskey.

1. Bestimmen Sie die logische Gleichung  $Q=f(x_4,x_3,x_2,x_1,x_0)$  nach der Schaltung.



$$\begin{aligned}
 Q_1 &= x_4x_3x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee x_4\bar{x}_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \\
 &= x_4x_3cx_1a \vee x_4x_3\bar{c}\bar{x}_1a \vee \bar{x}_4x_3cx_1a \vee x_4\bar{x}_3\bar{x}_2x_1a \vee x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1a \vee \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1a
 \end{aligned}$$

<b>11c1a = Term 1</b> 11010 = 26 11011 = 27 11110 = 30 11111 = 31	<b>11c0a = Term 2</b> 11000 = 24 11001 = 25 11100 = 28 11101 = 29	<b>01c1a = Term 3</b> 01010 = 10 01011 = 11 01110 = 14 01111 = 15
<b>1001a = Term 4</b> 10010 = 18 10011 = 19	<b>1010a = Term 5</b> 10100 = 20 10101 = 21	<b>0000a = Term 6</b> 00000 = 00 00001 = 01

2. Bestimmen Sie die Minterme der Funktion.

vollständige Funktionstabelle					
Zahl	Eingangsvariablen $x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$	Einsen	Minterme	Maxterme	Term
0	00000	0	$\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>6</b>
1	00001	1	$\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>6</b>
2	00010			$x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$	
3	00011			$x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	
4	00100			$x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$	
5	00101			$x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0 x_4 \vee$	
6	00110			$x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$	
7	00111			$x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	
8	01000			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0$	
9	01001			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$	
10	01010	2	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>3</b>
11	01011	3	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>3</b>
12	01100			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$	
13	01101			$x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$	
14	01110	3	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>3</b>
15	01111	4	$\bar{x}_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>3</b>
16	10000			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0$	
17	10001			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$	
18	10010	2	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>4</b>
19	10011	3	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>4</b>
20	10100	2	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>5</b>
21	10101	3	$x_4 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>5</b>
22	10110			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$	
23	10111			$\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	
24	11000	2	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>2</b>
25	11001	3	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>2</b>
26	11010	3	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>1</b>
27	11011	4	$x_4 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>1</b>
28	11100	3	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>2</b>
29	11101	4	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$		<b>2</b>
30	11110	4	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$		<b>1</b>
31	11111	5	$x_4 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$		<b>1</b>

3. Bestimmen Sie die 1. Quinesche Tabelle

1. Quinesche Tabelle (1. Teil)									
0. Ordnung		1. Ordnung				2. Ordnung			
Nr.	$x_4x_3x_2x_1x_0$	Nr.	$x_4x_3x_2x_1$ $x_0$	Nr.	$x_4x_3x_2x_1$ $x_0$	Nr	$x_4x_3x_2x_1$ $x_0$	Nr	$x_4x_3x_2x_1$ $x_0$
0	00000	<b>(1A)</b> <b>0,1</b>	0000-	26,27	1101-	<b>10,11,14,15</b>	<b>01-1-</b>	25,29,27,31	11--1
				26,30	11-10	<b>10,11,26,27</b>	<b>-101-</b>	<b>26,27,30,31</b>	<b>11-1-</b>
1	00001	----		28,29	1110-	10,14,11,15	01-1-	26,30,27,31	11-1-
				28,30	111-0	<b>10,14,26,30</b>	<b>-1-10</b>	<b>28,29,30,31</b>	<b>111--</b>
10	01010	10,11	0101-			10,26,11,27	-101-	28,30,29,31	111--
18	10010	10,14	01-10	15,31	-1111	10,26,14,30	-1-10		
20	10100	10,26	-1010	27,31	11-11	<b>(2A)</b> <b>18,19,26,27</b>	<b>1-01-</b>		
24	11000	18,19	1001-	29,31	111-1	18,26,19,27	1-01-		
		18,26	1-010			<b>(2B)</b> <b>20,21,28,29</b>	<b>1-10-</b>		
11	01011	20,21	1010-	30,31	1111-	20,28,21,29	1-10-		
14	01110	20,28	1-100			<b>24,25,26,27</b>	<b>110--</b>		
19	10011	24,25	1100-			<b>24,25,28,29</b>	<b>11-0-</b>		
21	10101	24,26	110-0			24,26,25,27	110--		
25	11001	24,28	11-00			<b>24,26,28,30</b>	<b>11--0</b>		
26	11010					24,28,25,29	11-0-		
28	11100	11,15	01-11			24,28,26,30	11--0		
		11,27	-1011						
15	01111	14,15	0111-			<b>11,15,27,31</b>	<b>-1-11</b>		
27	11011	14,30	-1110			<b>11,27,15,31</b>	<b>-1-11</b>		
29	11101	19,27	1-011			<b>14,15,30,31</b>	<b>-111-</b>		
30	11110	21,29	1-101			14,30,15,31	-111-		
		25,27	110-1						
31	11111	25,29	11-01			<b>25,27,29,31</b>	<b>11--1</b>		

Wenn der Term der mit den Termen der niederen- und der höheren Gruppe nicht vereinfacht werden kann, dann Primimplikant.

1. Quinesche Tabelle (2.Teil)		
		Primimplikant
3. Ordnung		
<b>10,11,14,15, 26,27,30,31</b>	<b>-1-1-</b>	<b>3A</b>
10,11,26,27, 14,15,30,31	-1-1-	
10,14,26,30, 11,15,27,31	-1-1-	
<b>24,25,26,27, 28,29,30,31</b>	<b>11---</b>	<b>3B</b>
24,25,28,29, 26,27,30,31	11---	
24,26,28,30, 25,27,29,31	11---	
4. Ordnung		
---		

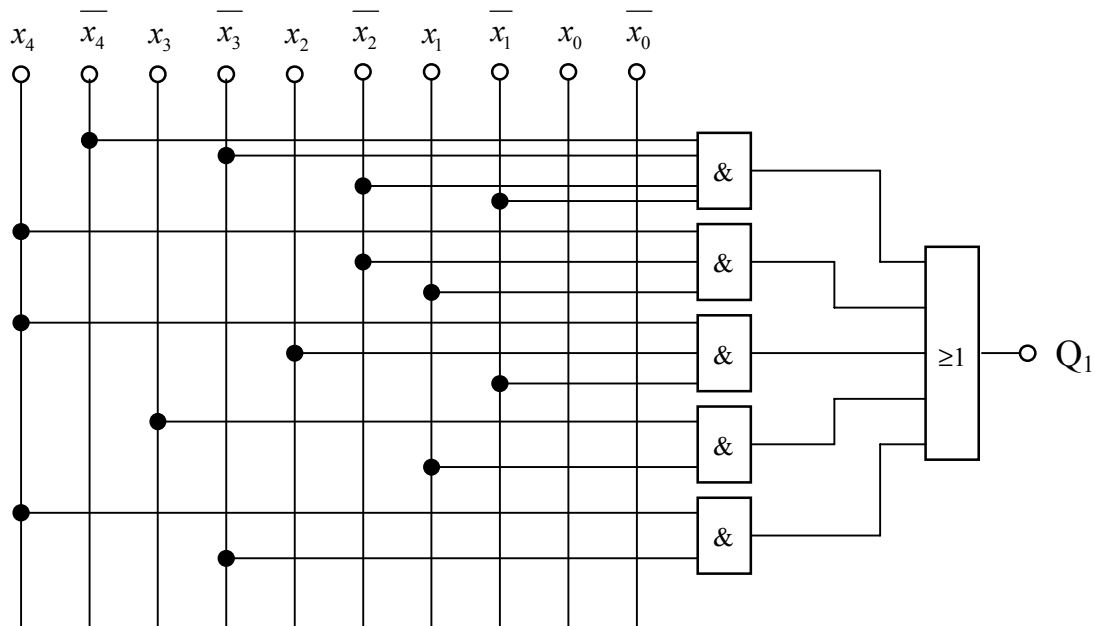
4. Bestimmen Sie die 2. Quinesche Tabelle
5. Lösen Sie das Überdeckungsproblem. minimieren Sie die Schaltung und bestimmen Sie die Lösungen  $Q_{1-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ ,  $Q_{2-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ , ... mit den geringsten und zweit-geringsten Kosten.
6. Zeichnen Sie die Schaltpläne der minimierten Booleschen Funktionen mit den geringsten und zweit-geringsten Kosten  
 $Q_{1-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ ,  $Q_{2-\min}(\text{Kosten}=\dots)=$ , ... nach der Gleichung ähnlich der Schaltung (nicht streng).

2. Quinesche Tabelle																								
Prim-implikant	0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31					Kosten	
1A	x	x																						4
2A							x	x					x	x										3
2B									x	x					x	x								3
3A			x	x	x	x							x	x			x	x						2
3B											x	x	x	x	x	x	x	x						2
	0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31					14	
Kosten 2+2+3+3+4=14																								
$\ddot{u}_f = w_{1A}w_{2A}w_{2B}w_{3A}w_{3B}$																								
$Q_{1-\min} = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_2\bar{x}_1 \vee x_3x_1 \vee x_4x_3$																								

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_f &= w_{1A}w_{1A}w_{3A}w_{3A}w_{3A}w_{3A}w_{2A}w_{2A}w_{2B}w_{2B}w_{3B}w_{3B}(w_{2A} \vee w_{3A} \vee w_{3B})(w_{2A} \vee w_{3A} \vee w_{3B}) \\
 &\quad (w_{2B} \vee w_{3B})(w_{2B} \vee w_{3B})(w_{3A} \vee w_{3B})(w_{3A} \vee w_{3B}) \\
 &= w_{1A}w_{3A}w_{2A}w_{2B}w_{3B}(w_{2A} \vee w_{3A} \vee w_{3B})(w_{2B} \vee w_{3B})(w_{3A} \vee w_{3B}) \\
 &= w_{1A}w_{3A}w_{2A}w_{2B}w_{3B} \\
 &= w_{1A}w_{2A}w_{2B}w_{3A}w_{3B}
 \end{aligned}$$

2. Quinesche Tabelle																								
Minterme																								
Prim-implikant	0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31					Kosten	
1A	x	x																						4
2A							x	x					x	x										3
2B									x	x					x	x								3
3A			x	x	x	x							x	x			x	x						2
3B											x	x	x	x	x	x	x	x						2
	0	1	10	11	14	15	18	19	20	21	24	25	26	27	28	29	30	31					14	
Kosten 2+2+3+3+4=14																								
$\ddot{u}_f = w_{1A}w_{2A}w_{2B}w_{3A}w_{3B}$																								
$Q_{1-\min} = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_2\bar{x}_1 \vee x_3x_1 \vee x_4x_3$																								

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3$$

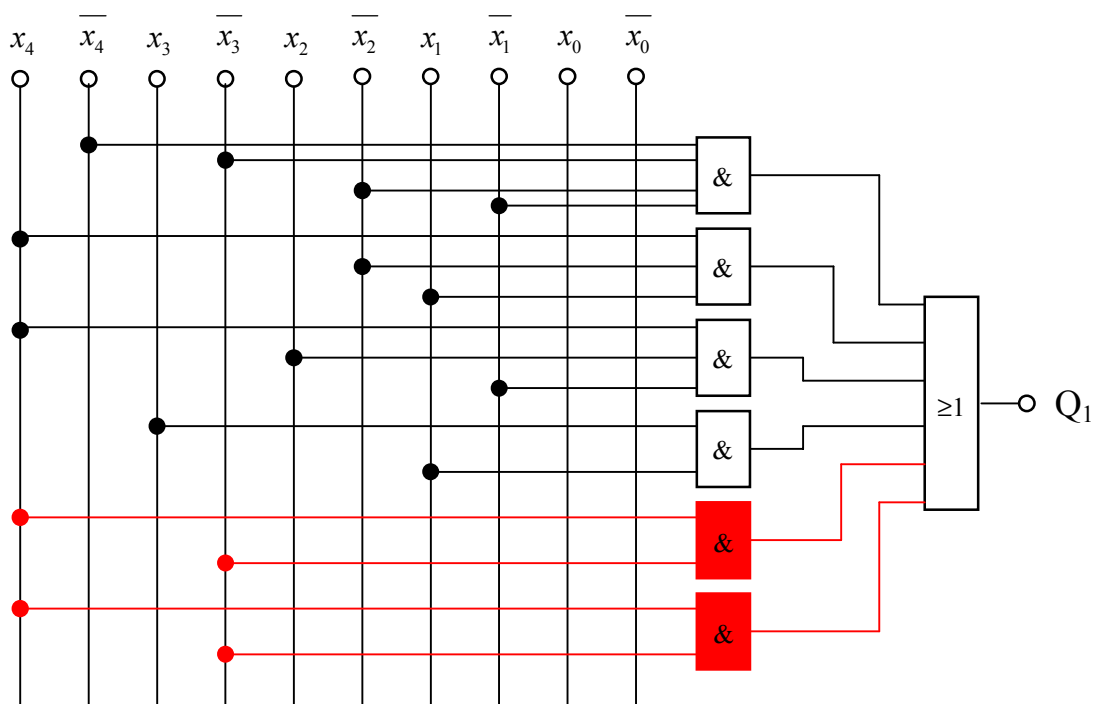


Für die Bestimmung der Logischen Gleichung mit zweitgeringsten Kosten existieren viele Möglichkeiten. Nach der von uns benutzten Definition entspricht der Kostenfaktor der Anzahl der Variablen in der Logischen Gleichung bzw. der Anzahl der Leitungen zu den UND-Gattern in der Schaltung.

Prinzipiell besteht auch die Möglichkeit einen der Terme mit geringsten Kosten nochmals mit ODER anzuhängen. Man erhält dann z.B.:

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3 (\vee x_4 x_3)$$

$$\text{Kosten} = 16$$



Will man weitere Erweiterungen durchführen Kann man einen Anschluß an eine Weitere Variable realisieren. Man erhält dann allerdings dann den neuen Kostenfaktor  $k_1=2k+2$  was allerdings nicht dem zweitgeringsten Kostenfaktor entspricht.

Um die Einhaltung des logischen Inhaltes zu gewährleisten kann man im einfachsten Fall eine UND-Verknüpfung mit „1“ durchführen.

Das ist im einfachsten Fall :  $x_i \vee \bar{x}_i$

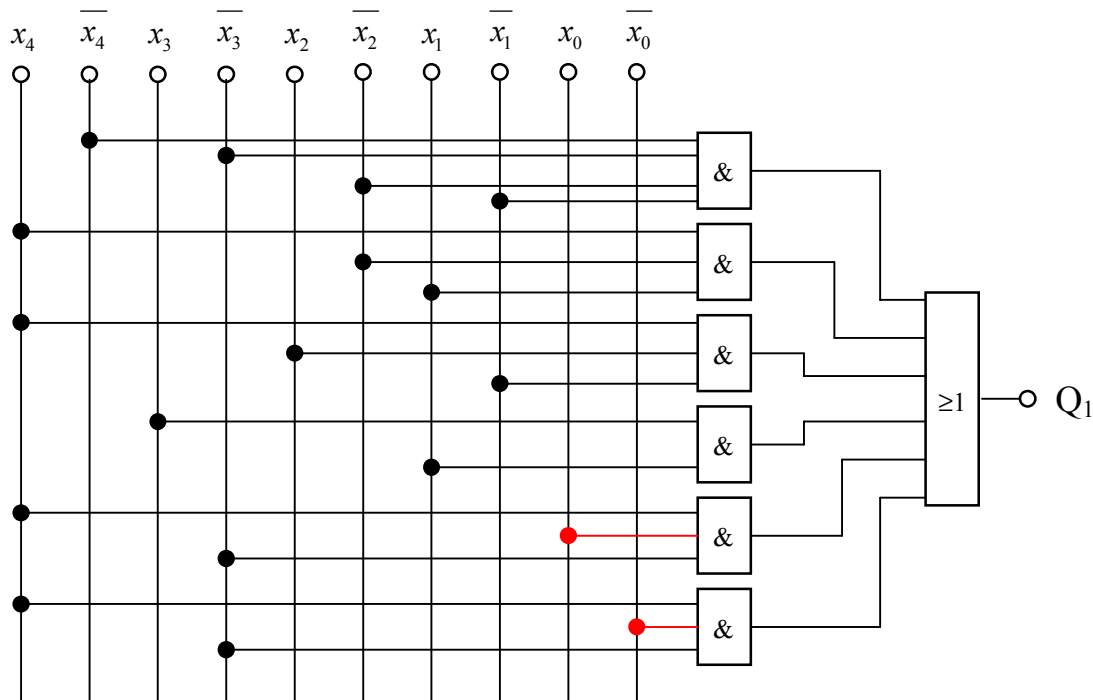
Um den geringsten Kostenzuwachs zu erhalten führt man eine UND-Verknüpfung mit den Termen mit den geringsten Kosten durch.

Hier eines der vielen Möglichkeiten:

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3 (x_0 \vee \bar{x}_0)$$

$$\bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee (x_4 x_3 x_0 \vee x_4 x_3 \bar{x}_0)$$

$$\text{Kosten} = 18$$



Für 5 Variable ist es noch möglich das KV-Diagramm zu verwenden. Man hat dann 2 räumlich angeordnete Diagramme. – Laut Aufgabenschaltbild:

$X_4=0$		$X_0$					
		0	1	1	0		
$X_3$	0	1	1			0	$X_1$
	0					1	
	1	1	1	1	1	1	
	1					0	
		0	0	1	1		
		$X_2$					

$$Q_1 = x_4 x_3 x_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 x_3 x_1 \vee x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$$

$X_4=1$		$X_0$					
		0	1	1	0		
$X_3$	0			1	1	0	$X_1$
	0	1	1			1	
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	0	
		0	0	1	1		
		$X_2$					



Laut Quine-Mc-Cluskey-Minimierung:

$X_4=0$		$X_0$					
		<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>		
$X_3$	<b>0</b>	<b>1</b> 0	<b>1</b> 1 6 5		4	<b>0</b>	$X_1$
	<b>0</b>				6	<b>1</b>	
	<b>1</b>	<b>1</b> 10	<b>1</b> 11	<b>1</b> 15	<b>1</b> 14 4	<b>1</b>	
	<b>1</b>					<b>0</b>	
		<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		
		$X_2$					

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_2\bar{x}_1 \vee x_3x_1 \vee x_4x_3$$

$X_4=1$		$X_0$					
		<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>		
$X_3$	<b>0</b>			<b>1</b> 21	<b>1</b> 20 4	<b>0</b>	$X_1$
	<b>0</b>	<b>1</b> 18	<b>1</b> 19 5 23		22	<b>1</b>	
	<b>1</b>	<b>1</b> 26	<b>1</b> 27	<b>1</b> 31	<b>1</b> 30	<b>1</b>	
	<b>1</b>	<b>1</b> 24	<b>1</b> 25	<b>1</b> 29	<b>1</b> 28 2	<b>0</b>	
		<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		
		$X_2$					



$X_4=0$		$X_0$					
		0	1	1	0		
$X_3$	0	1	1			0	$X_1$
	0					1	
	1	1	1	1	1	1	
	1					0	
		0	0	1	1		
		$X_2$					

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3$$

$X_4=1$		$X_0$					
		0	1	1	0		
$X_3$	0			1	1	0	$X_1$
	0	1	1			1	
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	0	
		0	0	1	1		
		$X_2$					

$X_4=0$		$X_0$					
		0	1	1	0		
$X_3$	0	1	1			0	$X_1$
	0					1	
	1	1	1	1	1	1	
	1					0	
		0	0	1	1		
		$X_2$					

$$Q_{1-\min} = \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee x_4 \bar{x}_2 x_1 \vee x_4 x_2 \bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_4 x_3$$

$X_4=1$		$X_0$					
		0	1	1	0		
$X_3$	0			1	1	0	$X_1$
	0	1	1			1	
	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	0	
		0	0	1	1		
		$X_2$					