Vorlesung “Formale Argumentation”

3. Argumentation Frameworks and Semantics – Teil 2

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

18. April 2024
Leipzig

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch endlich viele Iterationsschritte immer einen Fixpunkt erreichen?

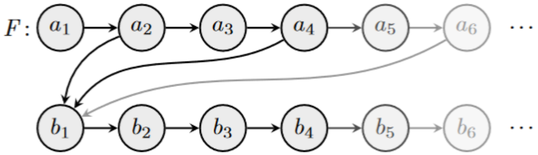
Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch endlich viele Iterations-schritte immer einen Fixpunkt erreichen?



Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist $\mathcal{C}_F^n(\varnothing)$?

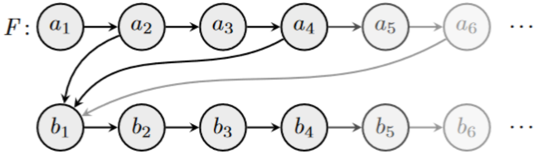
Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch ω-viele Iterations-schritte immer einen Fixpunkt erreichen?



Was ist mit $\mathcal{C}_F^{\omega}(\emptyset) = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{C}_F^{n}(\emptyset) = \bigcup \left\{ \mathcal{C}_F(\emptyset), \mathcal{C}_F^{2}(\emptyset), \mathcal{C}_F^{3}(\emptyset), \dots \right\}$?

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch endlich viele Iterations-schritte einen Fixpunkt erreichen?

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch endlich viele Iterations-schritte einen Fixpunkt erreichen?

Antwort: Ja, falls A endlich!
Beweis: Betrachte

$$\varnothing \subseteq \mathcal{C}_F(\varnothing) \subseteq \mathcal{C}_F^2(\varnothing) \subseteq \mathcal{C}_F^3(\varnothing) \subseteq \ldots$$

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch endlich viele Iterations-schritte einen Fixpunkt erreichen?

Antwort: Ja, falls A endlich!
Beweis: Betrachte

$$\varnothing \subseteq \mathcal{C}_F(\varnothing) \subseteq \mathcal{C}_F^2(\varnothing) \subseteq \mathcal{C}_F^3(\varnothing) \subseteq \ldots \subseteq A$$

Falls A endlich, dann

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Können wir durch endlich viele Iterationsschritte einen Fixpunkt erreichen?

Antwort: Ja, falls A endlich!
Beweis: Betrachte

$$\emptyset \subseteq \mathcal{C}_F(\emptyset) \subseteq \mathcal{C}_F^2(\emptyset) \subseteq \mathcal{C}_F^3(\emptyset) \subseteq \ldots \subseteq A$$

Falls A endlich, dann (spätestens) $\mathcal{C}_F^{|A|}(\emptyset) = \mathcal{C}_F^{|A|+1}(\emptyset)$.

☞ Für endliche AFs F, $co(F) \neq \emptyset$.

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Gilt $co(F) \neq \emptyset$ auch für nicht-endliche AFs?

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Gilt $co(F) \neq \emptyset$ auch für nicht-endliche AFs?

Antwort: Ja!
Beweisstrategie:

- *Zeigen zuerst, daß ein $\subseteq$-maximales Element aus $ad(F)$ immer auch complete ist.*

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Frage: Gilt $co(F) \neq \emptyset$ auch für nicht-endliche AFs?

Antwort: Ja!
Beweisstrategie:

- *Zeigen zuerst, daß ein $\subseteq$-maximales Element aus $ad(F)$ immer auch complete ist.*
- *Zeigen, daß solche $\subseteq$-maximalen admissible sets auch wirklich existieren (Lemma von Zorn).*

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$, dann $E \in co(F)$.

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$, dann $E \in co(F)$.

Proof.

Da $E \in ad(F)$ gilt: $E \in cf(F)$ und $E \subseteq \mathcal{C}_F(E)$.

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$, dann $E \in co(F)$.

Proof.

Da $E \in ad(F)$ gilt: $E \in cf(F)$ und $E \subseteq \mathcal{C}_F(E)$.Wegen Fundamentallemma wissen wir, daß $\mathcal{C}_F(E) \in ad(F)$, da $E \in ad(F)$.

Existenz von Complete Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *complete* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- $E = \mathcal{C}_F(E)$. (E ist vollständig)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$, dann $E \in co(F)$.

Proof.

Da $E \in ad(F)$ gilt: $E \in cf(F)$ und $E \subseteq \mathcal{C}_F(E)$.Wegen Fundamentallemma wissen wir, daß $\mathcal{C}_F(E) \in ad(F)$, da $E \in ad(F)$.Da E per Annahme $\subseteq$-maximal in $ad(F)$ folgt aus $E \subseteq \mathcal{C}_F(E)$ schon $E = \mathcal{C}_F(E)$. $\square$

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Wiederholung:

Lemma (Zorn, 1933)

Gegeben eine partiell geordnete Menge $(\mathcal{P}, \leq)$. Falls jede $\leq$-Kette eine obere Schranke besitzt, dann existieren $\leq$-maximal Elemente in $\mathcal{P}$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subsetneq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Wiederholung:

Lemma (Zorn, 1933)

Gegeben eine partiell geordnete Menge $(\mathcal{P}, \leq)$. Falls jede $\leq$-Kette eine obere Schranke besitzt, dann existieren $\leq$-maximal Elemente in $\mathcal{P}$.

- die Relation $\leq \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Wiederholung:

Lemma (Zorn, 1933)

Gegeben eine partiell geordnete Menge $(\mathcal{P}, \leq)$. Falls jede $\leq$-Kette eine obere Schranke besitzt, dann existieren $\leq$-maximal Elemente in $\mathcal{P}$.

- die Relation $\leq \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch
- eine $\leq$-Kette $\mathcal{K}$ ist eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$, d.h. für je zwei $k, l \in \mathcal{K}$ gilt zusätzlich $\{(k, l), (l, k)\} \cap \leq \neq \emptyset$

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Wiederholung:

Lemma (Zorn, 1933)

Gegeben eine partiell geordnete Menge $(\mathcal{P}, \leq)$. Falls jede $\leq$-Kette eine obere Schranke besitzt, dann existieren $\leq$-maximal Elemente in $\mathcal{P}$.

- die Relation $\leq \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch
- eine $\leq$-Kette $\mathcal{K}$ ist eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$, d.h. für je zwei $k, l \in \mathcal{K}$ gilt zusätzlich $\{(k,l),(l,k)\} \cap \leq \neq \emptyset$
- obere Schranke von $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$ ist ein $p \in \mathcal{P}$ mit $k \leq p$ für alle $k \in \mathcal{K}$

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Wiederholung:

Lemma (Zorn, 1933)

Gegeben eine partiell geordnete Menge $(\mathcal{P}, \leq)$. Falls jede $\leq$-Kette eine obere Schranke besitzt, dann existieren $\leq$-maximal Elemente in $\mathcal{P}$.

- die Relation $\leq \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch
- eine $\leq$-Kette $\mathcal{K}$ ist eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$, d.h. für je zwei $k, l \in \mathcal{K}$ gilt zusätzlich $\{(k, l), (l, k)\} \cap \leq \neq \emptyset$
- obere Schranke von $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$ ist ein $p \in \mathcal{P}$ mit $k \leq p$ für alle $k \in \mathcal{K}$
- $m \in \mathcal{P}$ ist $\leq$-maximal: Falls für alle $p \in \mathcal{P}$ mit $m \leq p$, schon $m = p$

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup \mathcal{K} \notin cf(F)$,

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup \mathcal{K} \notin cf(F)$, dann existieren $a, b \in \bigcup \mathcal{K}$ mit $(a, b) \in R$. Also, zwei Mengen $A, B \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup \mathcal{K} \notin cf(F)$, dann existieren $a, b \in \bigcup \mathcal{K}$ mit $(a, b) \in R$. Also, zwei Mengen $A, B \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{K}$ $\subseteq$-Kette gilt $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Somit $a, b \in A$ oder $a, b \in B$ im W! zu $A, B \in ad(F) \subseteq cf(F)$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup\mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup\mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup\mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.

Ang. $\bigcup\mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup\mathcal{K} \notin cf(F)$, dann existieren $a, b \in \bigcup\mathcal{K}$ mit $(a, b) \in R$. Also, zwei Mengen $A, B \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{K}$ $\subseteq$-Kette gilt $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Somit $a, b \in A$ oder $a, b \in B$ im W! zu $A, B \in ad(F) \subseteq cf(F)$.

Ang. $\bigcup\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{C}_F(\bigcup\mathcal{K})$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup \mathcal{K} \notin cf(F)$, dann existieren $a, b \in \bigcup \mathcal{K}$ mit $(a, b) \in R$. Also, zwei Mengen $A, B \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{K}$ $\subseteq$-Kette gilt $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Somit $a, b \in A$ oder $a, b \in B$ im W! zu $A, B \in ad(F) \subseteq cf(F)$.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{C}_F(\bigcup \mathcal{K})$. D.h. es existiert ein $a \in \bigcup \mathcal{K}$ nicht verteidigt von $\bigcup \mathcal{K}$. Somit existiert ein $A \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup \mathcal{K} \notin cf(F)$, dann existieren $a, b \in \bigcup \mathcal{K}$ mit $(a, b) \in R$. Also, zwei Mengen $A, B \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{K}$ $\subseteq$-Kette gilt $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Somit $a, b \in A$ oder $a, b \in B$ im W! zu $A, B \in ad(F) \subseteq cf(F)$.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{C}_F(\bigcup \mathcal{K})$. D.h. es existiert ein $a \in \bigcup \mathcal{K}$ nicht verteidigt von $\bigcup \mathcal{K}$. Somit existiert ein $A \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $a \notin \mathcal{C}_F(A)$ wegen $\subseteq$-Monotonie im W! zu $A \in ad(F)$.

Existenz von Complete Extensions

Proposition

Gegeben ein AF F. Es existieren $\subseteq$-maximal Elemente in $ad(F)$.

Proof.

Betrachte die partiell geordnete Menge $(ad(F), \subseteq)$. Sei $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ eine $\subseteq$-Kette. Wir zeigen, daß $\bigcup \mathcal{K}$ obere Schranke ist, d.h. $\bigcup \mathcal{K} \in ad(F)$ und $E \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ für alle $E \in \mathcal{K}$. Letzteres ist klar bei Definition der Vereinigung.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \notin ad(F)$. Falls $\bigcup \mathcal{K} \notin cf(F)$, dann existieren $a, b \in \bigcup \mathcal{K}$ mit $(a, b) \in R$. Also, zwei Mengen $A, B \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{K}$ $\subseteq$-Kette gilt $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Somit $a, b \in A$ oder $a, b \in B$ im W! zu $A, B \in ad(F) \subseteq cf(F)$.
Ang. $\bigcup \mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{C}_F(\bigcup \mathcal{K})$. D.h. es existiert ein $a \in \bigcup \mathcal{K}$ nicht verteidigt von $\bigcup \mathcal{K}$. Somit existiert ein $A \in \mathcal{K}$ mit $a \in A$ und $a \notin \mathcal{C}_F(A)$ wegen $\subseteq$-Monotonie im W! zu $A \in ad(F)$.
Lemma von Zorn liefert $\subseteq$-maximales Element in $ad(F)$. $\square$

Preferred Extensions

Die $\subseteq$-maximalen admissible motivieren eine neue Semantik.

Preferred Extensions

Die $\subseteq$-maximalen admissible motivieren eine neue Semantik.

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.
Wir setzen $pr(F) = \{E \mid E \text{ preferred in } F\}$.

Preferred Extensions

Die $\subseteq$-maximalen admissible motivieren eine neue Semantik.

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.
Wir setzen $pr(F) = \{E \mid E \text{ preferred in } F\}$.

Wissen schon:

- $pr(F) \subseteq co(F)$
- $pr(F) \neq \emptyset$

Preferred Extensions

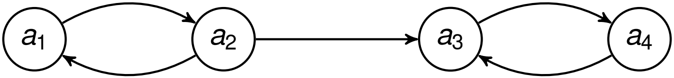
Die $\subsetneq$-maximalen admissible motivieren eine neue Semantik.

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subsetneq$-maximal in $ad(F)$.
Wir setzen $pr(F) = \{E \mid E \text{ preferred in } F\}$.

Wissen schon:

- $pr(F) \subseteq co(F)$
- $pr(F) \neq \varnothing$



- $ad(F) = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_4\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$

Preferred Extensions

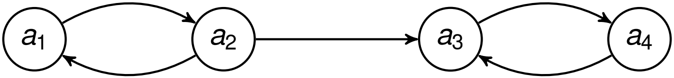
Die $\subseteq$-maximalen admissible motivieren eine neue Semantik.

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.
Wir setzen $pr(F) = \{E \mid E \text{ preferred in } F\}$.

Wissen schon:

- $pr(F) \subseteq co(F)$
- $pr(F) \neq \emptyset$



- $ad(F) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_4\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$

Preferred Extensions

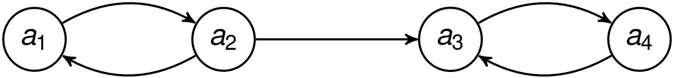
Die $\subseteq$-maximalen admissible motivieren eine neue Semantik.

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern
E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.
Wir setzen $pr(F) = \{E \mid E \text{ preferred in } F\}$.

Wissen schon:

- $pr(F) \subseteq co(F)$
- $pr(F) \neq \emptyset$



- $ad(F) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_4\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$
- $pr(F) = \{\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$

   Beweisidee:

   - *für gegebenes $E \in ad(F)$ definiere $ad(F)_E = \{E' \mid E' \in ad(F), E \subseteq E'\}$*

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$

   Beweisidee:

   - *für gegebenes* $E \in ad(F)$ *definiere* $ad(F)_E = \{E' \mid E' \in ad(F), E \subseteq E'\}$
   - *betrachte nun* $(ad(F)_E, \subseteq)$

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$

   Beweisidee:

   - *für gegebenes $E \in ad(F)$ definiere $ad(F)_E = \{E' \mid E' \in ad(F), E \subseteq E'\}$*
   - *betrachte nun $(ad(F)_E, \subseteq)$*
   - *zeige nun, daß für jede $\subseteq$-Kette $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ die Menge $\bigcup \mathcal{K}$ eine obere Schranke ist*

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$

   Beweisidee:

   - *für gegebenes* $E \in ad(F)$ *definiere* $ad(F)_E = \{E' \mid E' \in ad(F), E \subseteq E'\}$
   - *betrachte nun* $(ad(F)_E, \subseteq)$
   - *zeige nun, daß für jede* $\subseteq$*-Kette* $\mathcal{K} \subseteq ad(F)$ *die Menge* $\bigcup \mathcal{K}$ *eine obere Schranke ist*
   - *Lemma von Zorn liefert* $\subseteq$*-maximales Element* E' *in* $ad(F)_E$
   - *per Definition gilt* $E \subseteq E'$

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$
2. Falls $E \in pr(F)$, dann E auch $\subseteq$-maximal in $co(F)$.

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$
2. Falls $E \in pr(F)$, dann E auch $\subseteq$-maximal in $co(F)$.

Proof.

Ang. es existiert ein $E' \in co(F)$ mit $E \subset E'$.

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$
2. Falls $E \in pr(F)$, dann E auch $\subseteq$-maximal in $co(F)$.

Proof.

Ang. es existiert ein $E' \in co(F)$ mit $E \subset E'$. Da $co(F) \subseteq ad(F)$ gilt auch $E' \in ad(F)$.

Preferred Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *preferred* in F, sofern E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$.

Zwei Eigenschaften sind noch wichtig:

1. Für jedes $E \in ad(F)$ existiert ein $E' \in pr(F)$ mit $E \subseteq E'$
2. Falls $E \in pr(F)$, dann E auch $\subseteq$-maximal in $co(F)$.

Proof.

Ang. es existiert ein $E' \in co(F)$ mit $E \subset E'$. Da $co(F) \subseteq ad(F)$ gilt auch $E' \in ad(F)$. Somit ist E auch nicht $\subseteq$-maximal in F. W! $\square$

Stable Extensions

Eine preferred extension E ist konfliktfrei und greift alle Attackierer von E an.

Stable Extensions

Eine preferred extension E ist konfliktfrei und greift alle Attackierer von E an. Eine noch stärkere Bedingung wäre, alle Argumente (ob Attackierer oder nicht) außerhalb von E anzugreifen.

☞ Motivation für neue Semantik

Stable Extensions

Eine preferred extension E ist konfliktfrei und greift alle Attackierer von E an. Eine noch stärkere Bedingung wäre, alle Argumente (ob Attackierer oder nicht) außerhalb von E anzugreifen.

☞ Motivation für neue Semantik

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)

Stable Extensions

Eine preferred extension E ist konfliktfrei und greift alle Attackierer von E an. Eine noch stärkere Bedingung wäre, alle Argumente (ob Attackierer oder nicht) außerhalb von E anzugreifen.

☞ Motivation für neue Semantik

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$. (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\}$

Stable Extensions

Definition

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
  (E attackiert alle übrigen Argumente)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls $E \in stb(F)$, dann $E \in pr(F)$.

Proof.

1. $E \in cf(F)$ gilt per Definition (Konfliktfreiheit)

Stable Extensions

Definition

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
  (E attackiert alle übrigen Argumente)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls $E \in stb(F)$, dann $E \in pr(F)$.

Proof.

1. $E \in cf(F)$ gilt per Definition (Konfliktfreiheit)
2. Wegen Konfliktfreiheit können potenzielle Attackierer nur in $A \setminus E$ sein.

Stable Extensions

Definition

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
  (E attackiert alle übrigen Argumente)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls $E \in stb(F)$, dann $E \in pr(F)$.

Proof.

1. $E \in cf(F)$ gilt per Definition (Konfliktfreiheit)
2. Wegen Konfliktfreiheit können potenzielle Attackierer nur in $A \setminus E$ sein. Diese werden aber alle attackiert, also $E \subseteq \mathcal{C}_F(E)$. Zusammen $E \in ad(F)$. (Verteidigung)

Stable Extensions

Definition

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
  (E attackiert alle übrigen Argumente)

Proposition

Gegeben ein AF F. Falls $E \in stb(F)$, dann $E \in pr(F)$.

Proof.

1. $E \in cf(F)$ gilt per Definition (Konfliktfreiheit)
2. Wegen Konfliktfreiheit können potenzielle Attackierer nur in $A \setminus E$ sein. Diese werden aber alle attackiert, also $E \subseteq \mathcal{C}_F(E)$. Zusammen $E \in ad(F)$. (Verteidigung)
3. Da jede echte Obermenge E' von E nicht konfliktfrei ist, folgt E $\subseteq$-maximal in $ad(F)$. Also $E \in pr(F)$. (Maximalität)

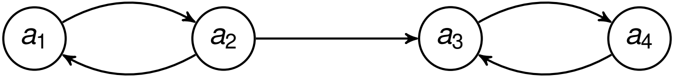
Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (*E* ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
(*E* attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\} \subseteq pr(F)$.



- $pr(F) = \{\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$

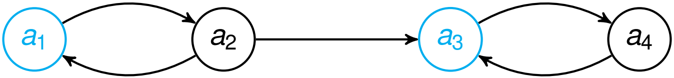
Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$. (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\} \subseteq pr(F)$.



- $pr(F) = \{\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$
- $A \setminus \{a_1, a_3\} = \{a_2, a_4\}$

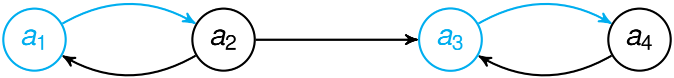
Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
  (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\} \subseteq pr(F)$.



- $pr(F) = \{\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\}$
- $A \setminus \{a_1, a_3\} = \{a_2, a_4\}$

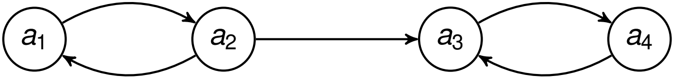
Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$.
  (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\} \subseteq pr(F)$.



- $pr(F) = \{\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\} = stb(F)$

Frage: Gilt immer $stb(F) = pr(F)$?

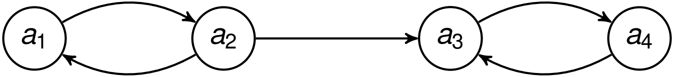
Stable Extensions

Definition

Sei $F = (A, R)$ ein AF. $E \subseteq A$ heißt *stable* in F, sofern

- $E \in cf(F)$ (E ist konfliktfrei)
- Für jedes $x \in A \setminus E$ existiert ein $e \in E$ mit $(e, x) \in R$. (E attackiert alle übrigen Argumente)

Wir setzen $stb(F) = \{E \mid E \text{ stable in } F\} \subseteq pr(F)$.



- $pr(F) = \{\{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}\} = stb(F)$

Frage: Gilt immer $stb(F) = pr(F)$? Nein!

Zusammenfassung Semantiken

- alle vorgestellten Semantiken von Dung 1995 eingeführt

Zusammenfassung Semantiken

- alle vorgestellten Semantiken von Dung 1995 eingeführt
- charakteristische Funktion $\mathcal{C}_F$ zentral für admissibility, completeness und preferredness

Zusammenfassung Semantiken

- alle vorgestellten Semantiken von Dung 1995 eingeführt
- charakteristische Funktion $\mathcal{C}_F$ zentral für admissibility, completeness und preferredness
- Anforderungsstrenge:

$$stb(F) \subseteq pr(F) \subseteq co(F) \subseteq ad(F) \subseteq cf(F)$$

Zusammenfassung Semantiken

- alle vorgestellten Semantiken von Dung 1995 eingeführt
- charakteristische Funktion $\mathcal{C}_F$ zentral für admissibility, completeness und preferredness
- Anforderungsstrenge:

$$stb(F) \subseteq pr(F) \subseteq co(F) \subseteq ad(F) \subseteq cf(F)$$

- Existenz:

$$|pr(F)| \geq 1, \text{ aber } |stb(F)| = 0 \text{ möglich}$$

Zusammenfassung Semantiken

- alle vorgestellten Semantiken von Dung 1995 eingeführt
- charakteristische Funktion $\mathcal{C}_F$ zentral für admissibility, completeness und preferredness
- Anforderungsstrenge:

$$stb(F) \subseteq pr(F) \subseteq co(F) \subseteq ad(F) \subseteq cf(F)$$

- Existenz:

$$|pr(F)| \geq 1, \text{ aber } |stb(F)| = 0 \text{ möglich}$$

☞ Bedingung für Existenz (nächste Woche)

Vorlesung “Formale Argumentation”

3. Argumentation Frameworks and Semantics – Teil 2

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

18. April 2024
Leipzig