Automaten über unendlichen Wörtern

nach "Principles of Model Checking" von Christel Baier und Joost-Pieter Katoen

Linda Gräßler

5. Dezember 2013

ω-reguläre Sprachen

ω-Operator

- Σ^ω
- $aaaaa... \rightarrow a^\omega$
- $ababab... \rightarrow (ab)^\omega$
- $\sigma \in \Sigma^\omega$, $\sigma^\omega = \sigma$
- $\varepsilon^\omega = \varepsilon$

ω-Sprache $\rightsquigarrow$ Sprache unendlicher Wörter

- $\mathcal{L}^\omega \subseteq \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$
- $\mathcal{L}^\omega = \{w_1 w_2 w_3 \dots \mid w_i \in \mathcal{L}, i \geq 1\}$
- $\varepsilon \notin \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{L}^\omega \subseteq \Sigma^\omega$

ω-reguläre Ausdrücke

Definition

Ein ω-regulärer Ausdruck G über dem Alphabet Σ hat die Form:

$$G = E_1.{F_1}^\omega + \ldots + E_n.{F_n}^\omega$$

- $n \geq 1$
- $E_1, \ldots, E_n$ und $F_1, \ldots, F_n$ $\rightsquigarrow$ reguläre Ausdrücke über Σ
- $\varepsilon \notin \mathcal{L}(F_i)$

$\rightsquigarrow \mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}(E_1).\mathcal{L}(F_1)^\omega \cup \ldots \cup \mathcal{L}(E_n).\mathcal{L}(F_n)^\omega$

$G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_\omega(G_1) = \mathcal{L}_\omega(G_2)$

ω-reguläre Sprache

Definition

Eine Sprache $\mathcal{L}$ heißt ω-regulär, falls es einen ω-regulären Ausdruck G über Σ gibt, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\omega(G)$.

ω-reguläre Eigenschaften

Definition

Eine Lineare-Zeit Eigentschaft P über AP heißt ω-regulär, falls P eine ω-reguläre Sprache über $Pot(AP)$ ist.

Nichtdeterministische Büchi Automaten

Definition

Sei A ein Nichtdeterministischer Büchi Automat (NBA), A ist ein Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ mit:

- Q - endliche Menge von Zuständen
- Σ - Alphabet
- $\delta : Q \times \Sigma \to Pot(Q)$ - Transitionsfunktion
- $Q_0 \subseteq Q$ - Menge der Startzustände
- $F \subseteq Q$ - Menge der akzeptierenden Zustände

Nichtdeterministische Büchi Automaten

Definition (Lauf)

$q_0 q_1 q_2 \ldots$ ist ein Lauf für $a_1 a_2 a_3 \ldots$, $q_i \in Q$, $a_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, wenn $q_0 \in Q_0$ und $q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i)$

Definition (akzeptierender Lauf (NBA))

$q_0 q_1 q_2 \ldots$ ist akzeptierend falls:

$$\overset{\infty}{\exists} i \in \mathbb{N} : q_i \in F$$

Definition (erreichbar)

q heißt erreichbar, wenn es ein $a \in \Sigma^*$ und $q_0 \in Q_0$ gibt mit $\delta^*(q_0, a) = q$.

$\mathcal{L}_\omega(A) =$
$\{\sigma \in \Sigma^\omega \mid$ es existiert ein akzeptierender Lauf für σ in $A\}$

NBAs und ω-reguläre Sprachen

Theorem

Die Klasse der Sprachen, die NBAs akzeptieren, entspricht der Klassen der ω-regulären Sprachen.
zu zeigen:

- *Jede ω-reguläre Sprache wird von einem NBA akzeptiert. **
- *Die Sprache $\mathcal{L}_\omega(A)$, die von dem NBA A akzeptiert wird, ist ω-regulär. ***

Operatoren

Lemma (1. Vereinigung auf NBAs)

Für zwei NBA A' und A'' gibt es einen NBA A wie folgt:

$$\mathcal{L}_\omega(A) = \mathcal{L}_\omega(A') \cup \mathcal{L}_\omega(A'') \text{ mit}$$
$$|A| = \mathcal{O}(|A'| + |A''|)$$

Lemma (2. ω-Operator für NEAs)

Für jeden NEA A mit $\varepsilon \notin \mathcal{L}(A)$ gibt es einen NBA A' wie folgt:

$$\mathcal{L}_\omega(A') = \mathcal{L}(A)^\omega \text{ mit}$$
$$|A'| = \mathcal{O}(|A|)$$

Lemma (3. Konkatenation von NEA und NBA)

Für einen NEA A und einen NBA A' über dem Alphabet Σ gibt es einen NBA A'':

$$\mathcal{L}_\omega(A'') = \mathcal{L}(A).\mathcal{L}_\omega(A') \text{ mit}$$
$$|A''| = \mathcal{O}(|A| + |A'|)$$

Beispiel - Konkatenation

$$Q_0'' = \begin{cases} Q_0 & \text{falls } Q_0 \cap F = \varnothing \\ Q_0 \cup Q_0' & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta''(q, A) = \begin{cases} \delta(q, A) & \text{falls } q \in Q \text{ und } \delta(q, A) \cap F = \varnothing \\ \delta(q, A) \cup Q_0' & \text{falls } q \in Q \text{ und } \delta(q, A) \cap F \neq \varnothing \\ \delta'(q, A) & \text{falls } q \in Q' \end{cases}$$

$$F'' = F'$$

NBAs und ω-reguläre Sprachen

$$G = E_1.{F_1}^\omega + \ldots + E_n.{F_n}^\omega$$

Mit 2. baue NBA $A_1, \ldots, A_n$ für $F_1^\omega, \ldots, F_n^\omega$
Mit 3. baue NBA $B_1, \ldots, B_n$ für $E_1.F_1^\omega, \ldots, E_n.F_n^\omega$
Mit 1. vereinige $B_1, \ldots, B_n$ zu NBA A:

$$\Rightarrow \mathcal{L}_\omega(A) = \mathcal{L}_\omega(B_1) \cup \mathcal{L}_\omega(B_2) \cup \ldots \cup \mathcal{L}_\omega(B_n)$$
$$\Rightarrow *$$

NBAs akzeptieren ω-reguläre Sprachen

Lemma

Die akzeptierte Sprache $\mathcal{L}_\omega(A)$ eines NBA A ist ω-regulär.

Beweis.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NBA $\ldots$

$\Rightarrow **$ $\square$

(Nicht)-leer-sein von NBA

Lemma (Kriterium für das Nicht-leer-sein von NBA)

Für einen NBA $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\mathcal{L}_\omega(A) \neq \varnothing$
- *Es existiert ein erreichbarer akzeptierender Zustand* q*, der zu einem Zyklus in* A *gehört.*

Äquivalenz

Definition

Seien A_1 und A_2 NBAs über demselben Alphabet.

$$A_1 \equiv A_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_\omega(A_1) = \mathcal{L}_\omega(A_2)$$

Anmerkung:
Seien A_1 und A_2 nichtdeterministische Automaten:
$A_1 \equiv_{NEA} A_2 \not\Leftrightarrow A_1 \equiv_{NBA} A_2$

Nicht-blockierende NBA

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NBA. A heißt nicht-blockierend, wenn $\delta(q, a) \neq \varnothing$ für alle Zustände $q \in Q$ und Symbol $a \in \Sigma$.

Deterministische Büchi Automaten

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NBA. A ist deterministisch, falls:

$$|Q_0| \leq 1 \text{ und } |\delta(q, a)| \leq 1$$

A heißt total, falls:

$$|Q_0| = 1 \text{ und } |\delta(q, a)| = 1$$

für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$.

NBAs sind mächtiger als DBAs

Theorem

Es gibt keinen DBA A der Form $\mathcal{L}_\omega(A) = \mathcal{L}_\omega((a+b)^* b^\omega)$

Widerspruchsbeweis.

Angenommen es gäbe so einen DBA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$.

$\vdots$

$\lightning$ $\square$

Generalisierte Büchi Automaten

- ω-Automat
- allgemeinere Akzeptanzbedingungen
- Variante des NBA $\rightsquigarrow$ GNBA
- akzeptiert Mengen von Zuständen $\rightsquigarrow$ Akzeptierende Mengen
- $X_1, \ldots, X_k \in F$

Generalisierter NBA

Definition

Ein generalisierter NBA ist ein Tupel $G = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$, wobei Q, Σ, δ, Q_0 analog zum NBA definiert sind und $F \subseteq Pot(Q)$.

$A_1 A_2 \ldots \in \Sigma^\omega \rightsquigarrow q_0 q_1 q_2 \ldots \in Q^\omega$

Lauf in G ist akzeptierend, falls:

$$\forall X \in F : (\overset{\infty}{\exists} j \in \mathbb{N} : q_j \in X)$$

$\mathcal{L}_\omega(G) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \text{Es gibt einen akzeptierenden Lauf für } \sigma \text{ in } G\}$

GNBA zu NBA

Theorem

Für jeden GNBA $G = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ *gibt es einen NBA* A *mit* $\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(A)$ *und* $|A| = O(|G| \cdot |F|)$

Korollar

Die Klasse der Sprachen, die GNBAs akzeptieren, stimmt mit der Klasse der ω*-regulären Sprachen überein.*

Schnitt

Lemma

Für zwei GNBA G_1 und G_2 über demselben Alphabet gibt es einen GNBA G mit:

$$\mathcal{L}_\omega(G) = \mathcal{L}_\omega(G_1) \cap \mathcal{L}_\omega(G_2) \text{ mit}$$
$$|G| = \mathcal{O}(|G_1| \cdot |G_2|)$$

Korollar

Wenn $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ ω-reguläre Sprachen über Σ sind, dann ist $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ auch ω-regulär.

Zusammenfassung

- ω-reguläre Sprachen
- NBA
- geschlossen bzgl. Schnitt, Vereinigung
- DBA
- GNBA