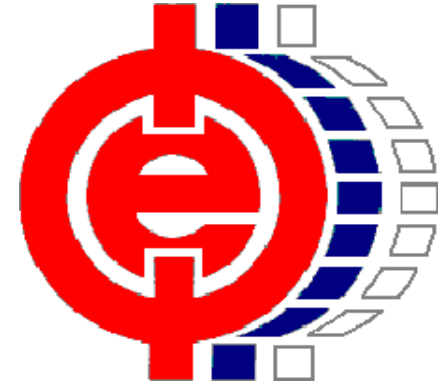




UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



Dejan V. Vranić

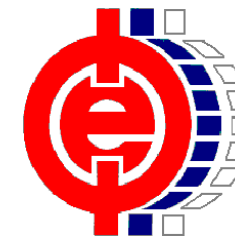
ITERATIVNI METODI KORENSKOG TIPA ZA SIMULTANO NALAŽENJE NULA POLINOMA

- MAGISTARSKA TEZA -

Niš, 7. XII 2000.



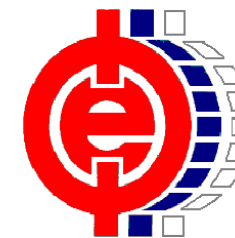
Problemi i zahtevi pri nalaženju nula polinoma



- mogućnost računске provere početnih uslova koji garantuju konvergenciju primenjenog algoritma;
- konstrukcija algoritama visokog reda konvergencije uz što manju „cenu” iterativnog koraka;
- kontrola grešaka zaokruživanja;
- informacija o granicama greške kompleksne aproksimacije tražene nule.



Značajno pitanje



„Kolika je greška u aproksimaciji rešenja?”

Henrici (*Intern. Congress, Philadelphia 1968*):

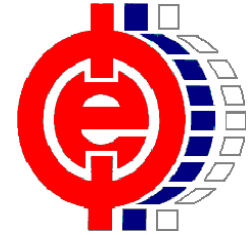
„Teško je precizno odrediti realan ili kompleksan broj koji je rešenje neke jednačine. U najboljem slučaju moguće je utvrditi realan ili kružni interval proizvoljno male širine (prečnika) koji sadrži traženu nulu.”

Wilkinson (*The Computer J., 1961*):

„Cilj svakog numeričkog algoritma je poboljšanje aproksimativnog rezultata kao i dobijanje granice greške poboljšane aproksimacije.”



„Odgovor”



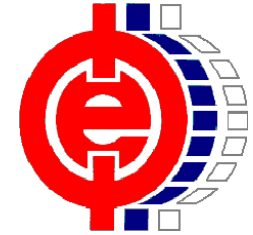
U cilju dobijanja informacije o gornjoj granici greške aproksimativnog rešenja koristimo *intervalnu aritmetiku*.

Uticajne knjige:

- **R. E. Moore,**
Interval analysis (1966)
- **R. E. Moore,**
Methods and Applications of Interval Analysis (1979)
- **G. Alefeld, J. Herzberger,**
Einführung in die Intervallrechnung (1974)



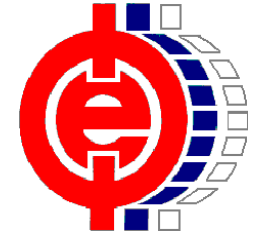
Knjige posvećene kompleksnoj intervalnoj aritmetici



- **G. Alefeld, J. Herzberger,**
Introduction to interval computations (1983)
- **M. S. Petković,**
*Iterative methods for simultaneous inclusion of
polynomial zeros (Springer 1989)*
- **M. S. Petković, Lj. D. Petković**
*Complex interval arithmetic and its applications
(Wiley-VCH 1998)*



Simultana inkluzija kompleksnih nula



Razmatramo simultane inkluzione metode zasnovane na relacijama fiksne tačke. Metodi ovog tipa mogu biti konstruisani na sledeći način:

Neka su ζ_1, \dots, ζ_n nule datog polinoma i neka su z_1, \dots, z_n njihove aproksimacije. Razlikujemo dva tipa relacije fiksne tačke:

$$\zeta_i = F_1(z_1, \dots, z_{i-1}, \zeta_i, z_{i+1}, \dots, z_n), \quad (1)$$

$$\zeta_i = F_2(\zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}, z, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_n), \quad (2)$$

pri čemu je $i \in I_n := \{1, \dots, n\}$.

Zamenom nula na desnoj strani relacija (1) i (2) njihovim kružnim inkluzivnim oblastima, $z=z_i$ i koristeći *svojstvo podskupa* dobijamo:

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i = F_1(z_1, \dots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \dots, z_n) \quad (i \in I_n),$$

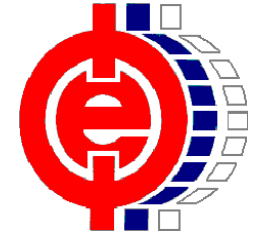
$$\zeta_i \in \hat{Z}_i = F_2(Z_1, \dots, Z_{i-1}, z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_n) \quad (i \in I_n).$$

gde je $\zeta_i \in Z_i$, $z_i = \text{mid}Z_i$ i $r_i = \text{rad}Z_i$.



Weierstrassov metod

[red konvergencije 2]



$$\text{Relacija fiksne ta\u010dke: } \zeta_i = z - \frac{P(z)}{\prod_{j \neq i} (z - \zeta_j)}, \quad i \in I_n.$$

$$\text{„Ta\u010dkasta” varijanta metoda: } \hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}, \quad i \in I_n.$$

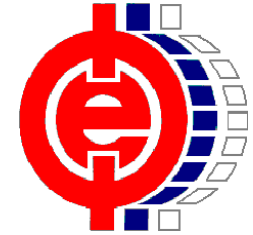
$$\text{Weierstrassova korekcija: } W_i = \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}, \quad i \in I_n.$$

$$\text{Intervalna varijanta metoda}^1 : \hat{Z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - Z_j)}, \quad i \in I_n.$$

¹ G. Alefeld, J. Herzberger, *Einf\u00fchrung in die Intervallrechnung* (1974)



Klasični metodi korenskog tipa



$$h_k(z) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} [\log P(z)] = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(z - \zeta_j)^k}$$

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\left[h_k(z_i) - \sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j)^k} \right]^{1/k}}, \quad i \in I_n. \quad [\text{red } k+2]$$

Laguerrov metod:
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i) \pm \sqrt{[(n-1)P'(z_i)]^2 - n(n-1)P(z_i)P''(z_i)}}$$

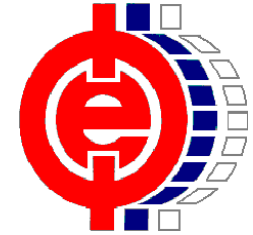
[red 3]

Metod Ostrowskog:
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2}}}, \quad i \in I_n.$$

[red 3]



Metodi Eulerovog tipa



Eulerov metod ($f(z)=0$): $\hat{z} = z - \frac{2f(z)}{f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - 2f(z)f''(z)}}$
[red 3]

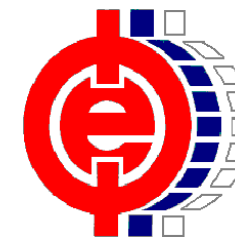
M. S. Petković, D. V. Vranić,
IMACS 2000, Lausanne, Switzerland, August 2000:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} + \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i G_{2,i}}}, \quad i \in I_n.$$

[red 4] $G_{k,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^k} \quad (k = 1, 2).$



Familija simultanih metoda Hansen-Patrickovog tipa



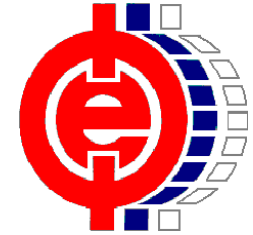
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha + 1)W_i}{\alpha(1 + G_{1,i}) + \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 2(\alpha + 1)W_i G_{2,i}}}, \quad i \in I_n, \alpha \in \{-1; 16\}. \quad (3)$$

Ubrzavanje reda konvergencije sa 3 na 4.

- $\alpha = 0$, postupak tipa Ostrowskog
- $\alpha = 1$, postupak Eulerovog tipa
- $\alpha = 1/(n-1)$, postupak Laguerreovog tipa
- $\alpha = -1$, postupak Halleyevog tipa



Novi metod Hansen-Patrickovog tipa



M. S. Petković, D. V. Vranić, *Facta Universitatis (to appear):*

Smenjujući

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} \cong 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j}$$

u formuli (3), dobija se sledeća familija iterativnih metoda

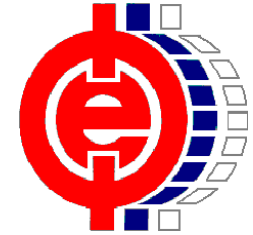
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha + 1)N_i}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha + 1)N_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j}}}, \quad i \in I_n. \quad (4)$$

pri čemu N_i predstavlja Newtonovu korekciju datu sa $N_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)}$.

- Familija (4) ima prostiju formu od (3), ali samo kubnu konvergenciju



Početni uslovi i sigurna konvergencija familije (4)



$$|\alpha + 1| < 5.5 \quad d = \min_{i \neq j} |z_i - z_j| \quad w = \max_i |W_i|$$

Teorema 1: *Familija iterativnih metoda*

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{(\alpha + 1)N_i^{(m)}}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha + 1)N_i^{(m+1)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i^{(m)} - z_j^{(m)}}}}, \quad i \in I_n, m = 0, 1, \dots$$

sa parametrom $\alpha \in \{-1; 5.5\}$ konvergira ako je ispunjen uslov $w^{(0)} = \frac{d^{(0)}}{13n}$.

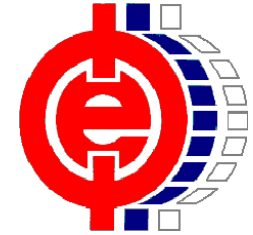
- Razlog sporije konvergencije familije (4) u odnosu na (3):

$$2(\alpha + 1)W_i G_{2,i} = O(|z_i - \zeta_i|^2)$$

$$2(\alpha + 1)N_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} = O(|z_i - \zeta_i|)$$



Novi intervalni metodi



Neka je $Z = \{ z; r \}$ disk koji ne sadrži koordinatni početak, tj. $|z| > r$
($z = \text{mid } Z = x + iy, r = \text{rad } Z$).

Koristimo **два tipa inverzije** kružnog intervala (diska):

- Tačna inverzija (Möbiusova transformacija)

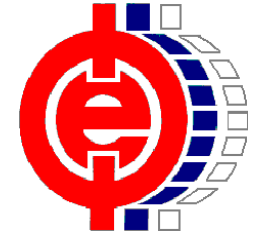
$$Z^{-1} = \{c; r\}^{-1} = \frac{\{\bar{c}; r\}}{|c|^2 - r^2} \quad (|c| > r, \text{ i.e. } 0 \notin Z),$$

- Inverzija u centriranoj formi

$$Z^I = \{c; r\}^I := \left\{ \frac{1}{c}; \frac{r}{|c|(|c| - r)} \right\} \supseteq Z^{-1} \quad (0 \notin Z).$$



Intervalni metod Eulerovog tipa



M. Petković, D. Vranić, *Computers & Mathematics with Applications* (2000):

$$s_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}, \quad S_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(Z_i - z_j)}, \quad (i \in I_n).$$

Izvedena je sledeća relacija fiksne tačke:

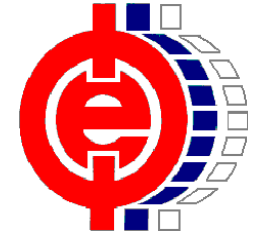
$$\zeta_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i s_i}} \quad (i \in I_n).$$

Pošto je $\zeta_i \in Z_i$ sledi da je $s_i \in S_i$ i koristeći osobinu inkluzivne izotonosti dobijamo inkluzivni metod Eulerovog tipa:

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i := z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i S_i}} \quad (i \in I_n). \quad (5)$$



Teorema o konvergenciji intervalnog metoda Eulerovog tipa



Koristimo oznake: $r = \max_i r_i$ i $\rho = \min_{i \neq j} \{|z_i - z_j| - r_j\}$.

Teorema 2: *Neka su nizovi intervala $\{Z_i^{(m)}\}$ ($i=1, \dots, n$; $m=0, 1, \dots$) definisani iterativnom formulom*

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{2W_i^{(m)}}{1 + G_{1,i}^{(m)} + \sqrt{(1 + G_{1,i}^{(m)})^2 + 4W_i^{(m)}S_i^{(m)}}}. \quad (6)$$

Tada, pod uslovom da je

$$\rho^{(0)} > 4(n-1)r^{(0)}, \quad (7)$$

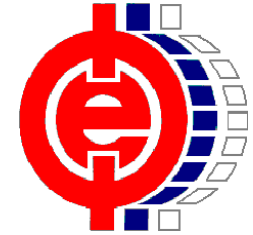
za svako $i=1, \dots, n$ i $m=0, 1, \dots$ imamo

$$1^\circ \quad \zeta_i \in Z_i^{(m)};$$

$$2^\circ \quad r^{(m+1)} < \frac{15(n-1)(r^{(m)})^4}{(\rho^{(0)} - 5/4 r^{(0)})^3}.$$



Metod sa Weierstrassovom korekcijom



M. Petković, D. Vranić, SCAN 2000, Karlsruhe, Septembar 2000:

Sledeći Noureinovu ideju (*J. Comput. Math.* (1977), *Internat. J. Comput. Appl. Math.* (1977)) za simultane metode u „običnoj” kompleksnoj aritmetici, povećanje reda konvergencije može se ostvariti korišćenjem odgovarajućih korekcionih izraza. Najpre pokazujemo da nejednakost (7) garantuje implikaciju $\zeta_i \in Z_i \Rightarrow Z_i \in W_i$ u svakoj iteraciji. Uzimanjem pomerenog diska $Z_i - W_i$ umesto diska Z_i u (6), konstruišemo sledeći **ubrznani algoritam**:

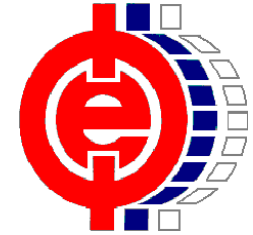
Neka su $(Z_1, \dots, Z_n) =: (Z_1^{(0)}, \dots, Z_n^{(0)})$ početni diskovi takvi da je $\zeta_i \in Z_i$ ($i=1, \dots, n$). Jedan korak modifikovanog alg. Eulerovog tipa glasi $(Z_1, \dots, Z_n) \mapsto (\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_n)$,

$$\hat{Z}_i := z_i - 2W_i \text{INV}_1 \left(1 + G_{1,i} + \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j \text{INV}_2(Z_i - W_i - z_j)}{z_i - z_j}} \right) \quad (8)$$

gde je $\text{INV}_1, \text{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^I\}$.



R-red konvergencije



Teorema 3: *Neka su $Z_1^{(0)}, \dots, Z_n^{(0)}$ početni diskovi takvi da je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ ($i \in I_n$) i neka $\{Z_i^{(m)}\}$ označava niz diskova dobijenih formulom (8), gde je $m=0,1,\dots$ indeks iteracije. Ako je uslov*

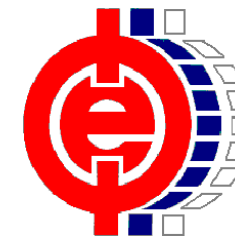
$$\rho^{(0)} > 4(n-1)r^{(0)}$$

zadovoljen, tada je za svako $i \in I_n$ i $m=0,1,\dots$ ispunjeno $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ i nizovi poluprečnika $\{\text{rad } Z_i^{(m)}\}$ monotono teže ka nuli sa R-redom konvergencije datim sa

$$O_R((8)) \geq \begin{cases} 2 + \sqrt{7} \cong 4.646, & \text{ako je } \text{INV}_2 = ()^{-1}, \\ 5, & \text{ako je } \text{INV}_2 = ()^I. \end{cases}$$



Numerički rezultati



$$\varepsilon_i = z_i - \zeta_i, \quad \varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|.$$

Primer 1. Poređenje algoritama (6) i (8).

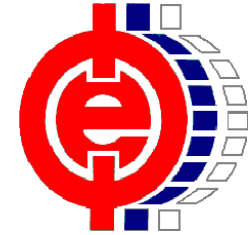
$$P(z) = z^{12} - (2 + 5i)z^{11} - (1 - 10i)z^{10} + (12 - 25i)z^9 - 30z^8 - z^4 \\ + (2 + 5i)z^3 + (1 - 10i)z^2 - (12 - 25i)z + 30$$

Primer 2. Testiranje algoritma (8) za različite izbore INV_1 i INV_2 .

$$P(z) = z^9 + 3z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 99z^3 + 297z^2 - 100z - 300$$



Primer 1. - nule i početni diskovi



i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$
1	1	{ 0.94 + 0.08i ; 0.3 }
2	-1	{ -1.05 + 0.0866025i; 0.3 }
3	i	{ -0.04 + 1.09165i ; 0.3 }
4	$-i$	{ -0.03 - 0.904606i ; 0.3 }
5	$2i$	{ -0.02 + 2.09798i ; 0.3 }
6	$3i$	{ -0.01 + 3.0995i ; 0.3 }
7	$1 + 2i$	{ 1 + 2.1i ; 0.3 }
8	$1 - 2i$	{ 1.01 - 1.9005i ; 0.3 }
9	$\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$	{ 0.727107 + 0.805086i ; 0.3 }
10	$\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$	{ 0.737107 - 0.611713i ; 0.3 }
11	$-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$	{ -0.667107 + 0.798758i ; 0.3 }
12	$-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$	{ -0.657107 - 0.620504i ; 0.3 }

Uslov (7) NIJE ispunjen.



Primer 1. - rezultati



Metod	(6)		(8) $INV_1=INV_2=()^I$	
i	$ \epsilon_i^{(1)} $	$r_i^{(1)}$	$ \epsilon_i^{(1)} $	$r_i^{(1)}$
1	8.72(-4)	2.21(-3)	1.18(-4)	2.99(-3)
2	4.46(-4)	1.85(-3)	1.81(-4)	2.55(-3)
3	6.63(-4)	2.44(-3)	1.23(-4)	3.68(-3)
4	1.25(-3)	2.79(-3)	1.17(-4)	3.37(-3)
5	1.69(-4)	1.16(-3)	4.56(-5)	1.61(-3)
6	9.20(-6)	4.63(-4)	5.90(-5)	8.06(-4)
7	1.25(-4)	7.69(-4)	2.25(-5)	9.42(-4)
8	1.16(-4)	4.48(-4)	1.99(-5)	4.91(-4)
9	2.31(-4)	2.08(-3)	1.22(-4)	3.20(-3)
10	9.15(-4)	2.33(-3)	1.08(-4)	2.99(-3)
11	7.83(-4)	2.26(-3)	1.36(-4)	2.87(-3)
12	1.09(-3)	2.47(-3)	1.72(-4)	3.11(-3)



Primer 1. - rezultati

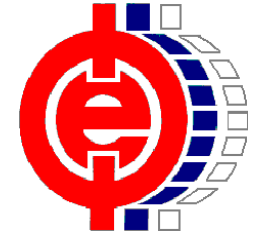


Metod	(6)		(8) $INV_1=INV_2=()^I$	
i	$ \epsilon_i^{(2)} $	$r_i^{(2)}$	$ \epsilon_i^{(2)} $	$r_i^{(2)}$
1	1.20(-12)	6.10(-12)	1.59(-19)	2.83(-14)
2	1.54(-13)	1.90(-12)	8.78(-19)	6.96(-14)
3	7.49(-13)	3.67(-12)	4.72(-19)	4.46(-14)
4	2.21(-12)	2.26(-11)	1.26(-19)	3.67(-14)
5	1.95(-15)	4.55(-14)	5.77(-21)	1.10(-15)
6	1.29(-19)	1.84(-17)	4.16(-22)	2.93(-16)
7	8.16(-16)	9.97(-15)	4.13(-22)	1.01(-16)
8	1.50(-15)	6.88(-15)	4.73(-23)	2.78(-17)
9	3.63(-14)	5.05(-13)	5.34(-19)	3.44(-14)
10	1.40(-12)	1.08(-11)	4.52(-20)	2.47(-14)
11	1.10(-12)	4.80(-12)	6.37(-19)	4.54(-14)
12	3.28(-12)	1.37(-11)	4.55(-19)	7.52(-14)

Metod	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$w^{(1)}$	$w^{(2)}$
(6)	0.762	0.765	1.25(-3)	3.28(-12)
(8) $INV_1=INV_2=()^I$	0.761	0.765	1.81(-4)	8.78(-19)



Primer 2. - nule i početni diskovi

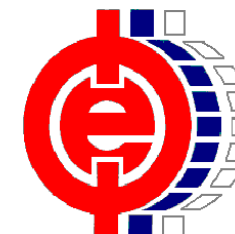


i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$	$ \epsilon_i^{(0)} $
1	-3	$\{-3.3 + 0.3i; 0.5\}$	0.42
2	1	$\{1.2 + 0.2i; 0.5\}$	0.28
3	-1	$\{-1.2 - 0.2i; 0.5\}$	0.28
4	$2i$	$\{0.2 + 1.7i; 0.5\}$	0.36
5	$-2i$	$\{0.3 - 2.2i; 0.5\}$	0.36
6	$2 + i$	$\{2.2 + 1.2i; 0.5\}$	0.28
7	$2 - i$	$\{1.8 - 0.8i; 0.5\}$	0.28
8	$-2 + i$	$\{-1.8 + 1.3i; 0.5\}$	0.36
9	$-2 - i$	$\{-1.8 - 0.8i; 0.5\}$	0.28

Uslov (7) NIJE ispunjen.



Primer 2. - rezultati



	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^{-1}$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^{-1}$
$r^{(1)}$	6.17(-2)	5.24(-2)	4.67(-2)	4.11(-2)
$r^{(2)}$	1.03(-9)	3.28(-8)	3.47(-8)	7.60(-8)

Vrednosti $r_i^{(3)}$ za različite izbore inverzija

i	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^{-1}$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^{-1}$
1	7.07(-52)	2.02(-44)	3.43(-41)	9.54(-40)
2	3.03(-56)	6.69(-49)	1.63(-42)	9.62(-43)
3	1.68(-50)	5.97(-42)	5.31(-38)	5.19(-37)
4	1.44(-60)	1.69(-53)	1.57(-49)	5.52(-50)
5	1.79(-65)	4.13(-55)	3.72(-51)	8.85(-53)
6	1.86(-55)	1.14(-53)	3.04(-43)	1.87(-43)
7	4.47(-58)	2.28(-51)	1.26(-45)	1.15(-45)
8	1.13(-55)	1.22(-46)	1.39(-42)	1.08(-42)
9	9.00(-50)	2.64(-41)	6.49(-37)	8.65(-36)