UNIVERZITET U NIŠU

ELEKTRONSKI FAKULTET

Dejan V. Vranić

ITERATIVNI METODI KORENSKOG TIPA ZA SIMULTANO NALAŽENJE NULA POLINOMA

- MAGISTARSKA TEZA -

Niš, 7. XII 2000.

Problemi i zahtevi pri nalaženju nula polinoma

- mogućnost računske provere početnih uslova koji garantuju konvergenciju primenjenog algoritma;
- konstrukcija algoritama visokog reda konvergencije uz što manju „cenu" iterativnog koraka;
- kontrola grešaka zaokruživanja;
- informacija o granicama greške kompleksne aproksimacije tražene nule.

Značajno pitanje

„Kolika je greška u aproksimaciji rešenja?”

<u>Henrici</u> (*Intern. Congress, Philadelphia 1968*)**:**
„Teško je precizno odrediti realan ili kompleksan broj koji je rešenje neke jednačine. U najboljem slučaju moguće je utvrditi realan ili kružni interval proizvoljno male širine (prečnika) koji sadrži traženu nulu.”

<u>Wilkinson</u> (*The Computer J., 1961*)**:**
„Cilj svakog numeričkog algoritma je poboljšanje aproksimativnog rezultata kao i dobijanje granice greške poboljšane aproksimacije.”

„Odgovor”

U cilju dobijanja informacije o gornjoj granici greške aproksimativnog rešenja koristimo *intervalnu aritmetiku*.

Uticajne knjige:

- **R. E. Moore,**
  Interval analysis **(1966)**
- **R. E. Moore,**
  Methods and Applications of Interval Analysis **(1979)**
- **G. Alefeld, J. Herzberger,**
  Einführung in die Intervallrechnung **(1974)**

Knjige posvećene kompleksnoj intervalnoj aritmetici

- **G. Alefeld, J. Herzberger,**
  Introduction to interval computations **(1983)**

- **M. S. Petković,**
  Iterative methods for simultaneous inclusion of polynomial zeros **(Springer 1989)**

- **M. S. Petković, Lj. D. Petković**
  Complex interval arithmetic and its applications
  (Waley-VCH 1998)

Simultana inkluzija kompleksnih nula

Razmatramo simultane inkluzione metode zasnovane na relacijama fiksne tačke. Metodi ovog tipa mogu biti konstruisani na sledeći način:

Neka su $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ nule datog polinoma i neka su $z_1,\ldots,z_n$ njihove aproksimacije. Razlikujemo dva tipa relacije fiksne tačke:

$$\zeta_i = F_1(z_1,\ldots,z_{i-1},\zeta_i,z_{i+1},\ldots,z_n), \tag{1}$$

$$\zeta_i = F_2(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},z,\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n), \tag{2}$$

pri čemu je $i \in I_n := \{1,\ldots,n\}$.

Zamenom nula na desnoj strani relacija (1) i (2) njihovim kružnim inkluzivnim oblastima, $z=z_i$ i koristeći ***svojstvo podskupa*** dobijamo:

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i = F_1(z_1,\ldots,z_{i-1},Z_i,z_{i+1},\ldots,z_n) \qquad (i \in I_n),$$

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i = F_2(Z_1,\ldots,Z_{i-1},z_i,Z_{i+1},\ldots,Z_n) \qquad (i \in I_n).$$

gde je $\zeta_i \in Z_i$, $z_i = \mathrm{mid} Z_i$ i $r_i = \mathrm{rad} Z_i$.

Weierstrassov metod

[red konvergencije 2]

Relacija fiksne tačke: $\zeta_i = z - \dfrac{P(z)}{\prod\limits_{j\neq i}(z-\zeta_j)}, \quad i \in I_n.$

„Tačkasta" varijanta metoda: $\hat{z}_i = z_i - \dfrac{P(z_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i - z_j)}, \quad i \in I_n.$

Weierstrassova korekcija: $W_i = \dfrac{P(z_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i - z_j)}, \quad i \in I_n.$

Intervalna varijanta metoda[1] : $\hat{Z}_i = z_i - \dfrac{P(z_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i - Z_j)}, \quad i \in I_n.$

[1] **G. Alefeld, J. Herzberger,** *Einführung in die Intervallrechnung* **(1974)**

Klasični metodi korenskog tipa

$$h_k(z) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{d^k}{dz^k}[\log P(z)] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^k}$$

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\left[h_k(z_i) - \sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j)^k} \right]^{1/k}}, \quad i \in I_n.$$

[red *k*+2]

Laguerrov metod:
[red 3]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i) \pm \sqrt{[(n-1)P'(z_i)]^2 - n(n-1)P(z_i)P''(z_i)}}$$

Metod Ostrowskog:
[red 3]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\pm \sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2}}}, \quad i \in I_n.$$

Metodi Eulerovog tipa

Eulerov metod ($f(z)=0$): $$\hat{z} = z - \frac{2f(z)}{f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - 2f(z)f''(z)}}$$
[red 3]

M. S. Petković, D. V. Vranić,
IMACS 2000, Lausanne, Switzerland, August 2000:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} + \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 4W_i G_{2,i}}}, \quad i \in I_n.$$

[red 4] $$G_{k,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^k} \quad (k = 1,2).$$

Familija simultanih metoda Hansen-Patrickovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{\alpha(1+G_{1,i}) + \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2(\alpha+1)W_i G_{2,i}}}, \quad i \in I_n, \alpha \in \{-1;16\}. \quad (3)$$

Ubrzavanje reda konvergencije sa 3 na 4.

- α =0, postupak tipa Ostrowskog
- α =1, postupak Eulerovog tipa
- α =1/(n-1), postupak Laguerreovog tipa
- α =-1, postupak Halleyevog tipa

Novi metod Hansen-Patrickovog tipa

M. S. Petković, D. V. Vranić, *Facta Universitatis (to appear):*

Smenjujući
$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} \cong 2\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i - z_j}$$

u formuli (3), dobija se sledeća familija iterativnih metoda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)N_i}{\alpha + \sqrt{1-2(\alpha+1)N_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i - z_j}}}, \quad i\in I_n. \tag{4}$$

pri čemu N_i predstavlja Newtonovu korekciju datu sa $N_i = \dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}$.

- Familija (4) ima prostiju formu od (3), ali samo kubnu konvergenciju

Početni uslovi i sigurna konvergencija familije (4)

$$|\alpha+1|<5.5 \qquad d=\min_{i\neq j}|z_i-z_j| \qquad w=\max_i|W_i|$$

Teorema 1: *Familija iterativnih mtoda*

$$z_i^{(m+1)}=z_i^{(m)}-\frac{(\alpha+1)N_i^{(m)}}{\alpha+\sqrt{1-2(\alpha+1)N_i^{(m+1)}\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i^{(m)}-z_j^{(m)}}}}, \quad i\in I_n, m=0,1,\ldots.$$

sa parametrom $\alpha\in\{-1;5.5\}$ *konvergira ako je ispunjen uslov* $w^{(0)}=\dfrac{d^{(0)}}{13n}$.

- Razlog sporije konvergencije familije (4) u odnosu na (3):

$$2(\alpha+1)W_iG_{2,i}=O(|z_i-\zeta_i|^2)$$

$$2(\alpha+1)N_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i-z_j}=O(|z_i-\zeta_i|)$$

Novi intervalni metodi

Neka je $Z=\{\, z; r \,\}$ disk koji ne sadrži koordinatni početak, tj. $|z|>r$ ($z = \text{mid } Z = x + iy$, $r = \text{rad } Z$).

Koristimo **dva tipa inverzije** kružnog intervala (diska):

- Tačna inverzija (Möbiusova transformacija)

$$Z^{-1} = \{c; r\}^{-1} = \frac{\{\bar{c}; r\}}{|c|^2 - r^2} \qquad (|c| > r, \text{i.e. } 0 \notin Z),$$

- Inverzija u centriranoj formi

$$Z^I = \{c; r\}^I := \left\{ \frac{1}{c}; \frac{r}{|c|(|c| - r)} \right\} \supseteq Z^{-1} \qquad (0 \notin Z).$$

Intervalni metod Eulerovog tipa

M. Petković, D. Vranić, *Computers & Mathematics with Applications* **(2000):**

$$s_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}, \quad S_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(Z_i - z_j)}, \quad (i \in I_n).$$

Izvedena je sledeća relacija fiksne tačke:

$$\zeta_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i s_i}} \qquad (i \in I_n).$$

Pošto je $\zeta_i \in Z_i$ sledi da je $s_i \in S_i$ i koristeći osobinu inkluzivne izotonosti dobijamo inkluzivni metod Eulerovog tipa:

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i := z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i S_i}} \qquad (i \in I_n). \qquad (5)$$

Teorema o konvergenciji intervalnog metoda Eulerovog tipa

Koristimo oznake: $r = \max_i r_i$ i $\rho = \min_{i \neq j} \{ |z_i - z_j| - r_j \}$.

Teorema 2: *Neka su nizovi intervala* $\{Z_i^{(m)}\}$ (i=1,...,n; m=0,1,...) *definisani iterativnom formulom*

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{2W_i^{(m)}}{1 + G_{1,i}^{(m)} + \sqrt{(1 + G_{1,i}^{(m)})^2 + 4W_i^{(m)} S_i^{(m)}}}. \qquad (6)$$

Tada, pod uslovom da je

$$\rho^{(0)} > 4(n-1) r^{(0)}, \qquad (7)$$

za svako i=1,...,n i m=0,1,... *imamo*

$1^\circ \quad \zeta_i \in Z_i^{(m)}$;

$2^\circ \quad r^{(m+1)} < \dfrac{15(n-1)(r^{(m)})^4}{(\rho^{(0)} - 5/4\, r^{(0)})^3}$.

Metod sa Weierstrassovom korekcijom

M. Petković, D. Vranić, *SCAN 2000, Karlsruhe, Septembar 2000:*

Sledeći Noureinovu ideju (*J. Comput. Math.* (1977), *Internat. J. Comput. Appl. Math.* (1977)) za simultane metode u „običnoj" kompleksnoj aritmetici, povećanje reda konvergencije može se ostvariti korišćenjem odgovarajućih korekcionih izraza. Najpre pokazujemo da nejednakost (7) garantuje implikaciju $\zeta_i \in Z_i \Rightarrow Z_i \in W_i$ u svakoj iteraciji. Uzimanjem pomerenog diska $Z_i - W_i$ umesto diska Z_i u (6), konstruišemo sledeći **ubrzani algoritam**:

Neka su $(Z_1,\ldots,Z_n)=:(Z_1^{(0)},\ldots,Z_n^{(0)})$ *početni diskovi takvi da je* $\zeta_i \in Z_i$ $(i=1,\ldots,n)$. *Jedan korak modifikovanog alg. Eulerovog tipa glasi* $(Z_1,\ldots,Z_n)\mapsto(\hat{Z}_1,\ldots,\hat{Z}_n)$,

$$\hat{Z}_i := z_i - 2W_i \mathrm{INV}_1\left(1+G_{1,i}+\sqrt{(1+G_{1,i})^2+4W_i\sum_{j\neq i}\frac{W_j \mathrm{INV}_2(Z_i - W_i - z_j)}{z_i - z_j}}\right) \qquad (8)$$

gde je $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^I\}$.

R-red konvergencije

Teorema 3: *Neka su* $Z_1^{(0)},\ldots,Z_n^{(0)}$ *početni diskovi takvi da je* $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ ($i \in I_n$) *i neka* $\{Z_i^{(m)}\}$ *označava niz diskova dobijenih formulom* (8), *gde je* m=0,1,... *indeks iteracije. Ako je uslov*

$$\rho^{(0)} > 4(n-1)r^{(0)}$$

zadovoljen, tada je za svako $i \in I_n$ *i* m=0,1,... *ispunjeno* $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ *i nizovi poluprečnika* $\{\mathrm{rad}\, Z_i^{(m)}\}$ *monotono teže ka nuli sa R-redom konvergencije datim sa*

$$O_R((8)) \geq \begin{cases} 2+\sqrt{7} \cong 4.646, & \text{ako je } \mathrm{INV}_2 = ()^{-1}, \\ 5, & \text{ako je } \mathrm{INV}_2 = ()^{I}. \end{cases}$$

Numerički rezultati

$$\varepsilon_i = z_i - \zeta_i, \qquad \varepsilon = \max_{1\le i\le n} |\varepsilon_i|.$$

Primer 1. Poređenje algoritama (6) i (8).

$$P(z) = z^{12} - (2+5i)z^{11} - (1-10i)z^{10} + (12-25i)z^9 - 30z^8 - z^4$$
$$+ (2+5i)z^3 + (1-10i)z^2 - (12-25i)z + 30$$

Primer 2. Testiranje algoritma (8) za različite izbore INV_1 i INV_2.

$$P(z) = z^9 + 3z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 99z^3 + 297z^2 - 100z - 300$$

Primer 1. - nule i početni diskovi

i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$
1	1	$\{\ 0.94 + 0.08i\ ;\ 0.3\ \}$
2	-1	$\{\ -1.05 + 0.0866025i;\ 0.3\ \}$
3	i	$\{\ -0.04 + 1.09165i\ ;\ 0.3\ \}$
4	$-\ i$	$\{\ -0.03 - 0.904606i\ ;\ 0.3\ \}$
5	$2i$	$\{\ -0.02 + 2.09798i\ ;\ 0.3\ \}$
6	$3i$	$\{\ -0.01 + 3.0995i\ ;\ 0.3\ \}$
7	$1 + 2i$	$\{\ 1 + 2.1i\ ;\ 0.3\ \}$
8	$1 - 2i$	$\{\ 1.01 - 1.9005i\ ;\ 0.3\ \}$
9	$\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$	$\{\ 0.727107 + 0.805086i\ ;\ 0.3\ \}$
10	$\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$	$\{\ 0.737107 - 0.611713i\ ;\ 0.3\ \}$
11	$-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$	$\{-0.667107 + 0.798758i\ ;\ 0.3\ \}$
12	$-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$	$\{-0.657107 - 0.620504i\ ;\ 0.3\ \}$

Uslov (7) NIJE ispunjen.

Primer 1. - rezultati

Metod	(6)		(8) $INV_1 = INV_2 = ()^I$	
i	$\lvert\epsilon_i^{(1)}\rvert$	$r_i^{(1)}$	$\lvert\epsilon_i^{(1)}\rvert$	$r_i^{(1)}$
1	8.72(-4)	2.21(-3)	1.18(-4)	2.99(-3)
2	4.46(-4)	1.85(-3)	**1.81(-4)**	2.55(-3)
3	6.63(-4)	2.44(-3)	1.23(-4)	**3.68(-3)**
4	**1.25(-3)**	**2.79(-3)**	1.17(-4)	3.37(-3)
5	1.69(-4)	1.16(-3)	4.56(-5)	1.61(-3)
6	9.20(-6)	4.63(-4)	5.90(-5)	8.06(-4)
7	1.25(-4)	7.69(-4)	2.25(-5)	9.42(-4)
8	1.16(-4)	4.48(-4)	1.99(-5)	4.91(-4)
9	2.31(-4)	2.08(-3)	1.22(-4)	3.20(-3)
10	9.15(-4)	2.33(-3)	1.08(-4)	2.99(-3)
11	7.83(-4)	2.26(-3)	1.36(-4)	2.87(-3)
12	1.09(-3)	2.47(-3)	1.72(-4)	3.11(-3)

Primer 1. - rezultati

Metod	(6)		(8) $_{INV_1=INV_2=()^I}$	
i	$\lvert\epsilon_i^{(2)}\rvert$	$r_i^{(2)}$	$\lvert\epsilon_i^{(2)}\rvert$	$r_i^{(2)}$
1	1.20(-12)	6.10(-12)	1.59(-19)	2.83(-14)
2	1.54(-13)	1.90(-12)	**8.78(-19)**	6.96(-14)
3	7.49(-13)	3.67(-12)	4.72(-19)	4.46(-14)
4	2.21(-12)	**2.26(-11)**	1.26(-19)	3.67(-14)
5	1.95(-15)	4.55(-14)	5.77(-21)	1.10(-15)
6	1.29(-19)	1.84(-17)	4.16(-22)	2.93(-16)
7	8.16(-16)	9.97(-15)	4.13(-22)	1.01(-16)
8	1.50(-15)	6.88(-15)	4.73(-23)	2.78(-17)
9	3.63(-14)	5.05(-13)	5.34(-19)	3.44(-14)
10	1.40(-12)	1.08(-11)	4.52(-20)	2.47(-14)
11	1.10(-12)	4.80(-12)	6.37(-19)	4.54(-14)
12	**3.28(-12)**	1.37(-11)	4.55(-19)	**7.52(-14)**

Metod	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$w^{(1)}$	$w^{(2)}$
(6)	0.762	0.765	1.25(-3)	3.28(-12)
(8) $_{INV_1=INV_2=()^I}$	0.761	0.765	1.81(-4)	8.78(-19)

Primer 2. - nule i početni diskovi

i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$	$\lvert\epsilon_i^{(0)}\rvert$
1	-3	$\{-3.3+0.3i;\ 0.5\ \}$	0.42
2	1	$\{\ 1.2+0.2i;\ 0.5\ \}$	0.28
3	-1	$\{-1.2-0.2i;\ 0.5\ \}$	0.28
4	$2i$	$\{\ 0.2+1.7i;\ 0.5\ \}$	0.36
5	$-2i$	$\{\ 0.3-2.2i;\ 0.5\ \}$	0.36
6	$2+i$	$\{\ 2.2+1.2i;\ 0.5\ \}$	0.28
7	$2-i$	$\{\ 1.8-0.8i;\ 0.5\ \}$	0.28
8	$-2+i$	$\{-1.8+1.3i;\ 0.5\ \}$	0.36
9	$-2-i$	$\{-1.8-0.8i;\ 0.5\ \}$	0.28

Uslov (7) NIJE ispunjen.

Primer 2. - rezultati

	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^{-1}$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^{-1}$
$r^{(1)}$	6.17(-2)	5.24(-2)	4.67(-2)	4.11(-2)
$r^{(2)}$	1.03(-9)	3.28(-8)	3.47(-8)	7.60(-8)

Vrednosti $r_i^{(3)}$ za različite izbore inverzija

i	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^I$	$INV_1=()^I$ $INV_2=()^{-1}$	$INV_1=()^{-1}$ $INV_2=()^{-1}$
1	7.07(-52)	2.02(-44)	3.43(-41)	9.54(-40)
2	3.03(-56)	6.69(-49)	1.63(-42)	9.62(-43)
3	1.68(-50)	5.97(-42)	5.31(-38)	5.19(-37)
4	1.44(-60)	1.69(-53)	1.57(-49)	5.52(-50)
5	1.79(-65)	4.13(-55)	3.72(-51)	8.85(-53)
6	1.86(-55)	1.14(-53)	3.04(-43)	1.87(-43)
7	4.47(-58)	2.28(-51)	1.26(-45)	1.15(-45)
8	1.13(-55)	1.22(-46)	1.39(-42)	1.08(-42)
9	**9.00(-50)**	**2.64(-41)**	**6.49(-37)**	**8.65(-36)**