UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

Dejan V. Vranić

ITERATIVNI METODI KORENSKOG TIPA ZA SIMULTANO NALAŽENJE NULA POLINOMA

- MAGISTARSKA TEZA -

Niš, 2000.

Mojoj kćeri, Aleksandri

Sadržaj

Uvod

Određivanje nula polinoma jedan je od najstarijih problema sa kojim se matematičari sreću. Prve publikacije iz ove oblasti stare su više od nekoliko vekova. Pored teorijskog i praktičnog značaja u matematici, činjenica da mnoge grane inženjerskih nauka u matematičkim modelima svojih sistema sadrže i modul za određivanje nula polinoma povećava važnost ovog problema. Impozantan broj radova i knjiga koji obrađuju ovu temu potvrđuje da je oduvek veliki broj matematičara radio na razvoju novih metoda za rešavanje ovog nelinearnog problema. Koliko je ovaj problem intrigantan, najbolje je sažeto u sentencama koje je poznati švajcarski matematičar Peter Henrici izrekao na konferenciji posvećenoj numeričkom rešavanju nelinearnih problema održanoj 1968. godine u Filadelfiji: „Problem određivanja nula datog polinoma sa kompleksnim koeficijentima je pravi nelinearan problem. U isto vreme problem je jednostavan. On je toliko jednostavan da, u stvari, postoji nada da ćemo jednog dana biti u stanju da ga u potpunosti rešimo." Zbilja, ni posle više od tri decenije idealno rešenje ovog problema nije pronađeno. Svaki od razvijenih metoda za nalaženje nula polinoma pored specifičnih prednosti ima i određene nedostatke, što predstavlja motiv za dalja istraživanja u ovoj oblasti.

Kao što je već napomenuto, algebarski polinomi susreću se u velikom broju matematičkih problema koji se javljaju u računarskoj tehnici i informatici, bankarstvu i finansijama, fizici, elektromagnetici, nanoinženjerstvu, astronomiji itd. Osim toga što se u nekim problemima ovih nauka ukazuje potreba za određivanjem nula karakterističnih polinoma regularnih matrica ili diferencnih i diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, pojedini tehnički procesi su predstavljeni matematičkim modelom koji se svodi na nalaženje nula algebarskih polinoma.

Francuski matematičar Evariste Galois dokazao je u prvoj polovini XIX veka da je u opštem slučaju nemoguće izraziti nule algebarskog polinoma stepena većeg od četiri eksplicitnom formulom pomoću koeficijenata polinoma. Porvh toga, eksplicitne formule u opštem slučaju za polinome trećeg i četvrtog stepena su složene i nisu pogodne za praktičnu primenu. Ove čenjenice impliciraju korišćenje numeričkog pristupa za rešavanje algebarskih jednačina. Uporedo sa pojavom prvih računarskih sistema pre pola veka, počeo je i nagli razvoj numeričke matematike, što je rezultiralo velikim brojem praktičnih i efikasnih numeričkih metoda.

Osnovni motiv i cilj ove teze je konstrukcija, analiza i testiranje novih iterativnih metoda korenskog tipa za numeričko rešavanje algebarskih jednačina. Razvijeni iterativni postupci su simultanog tipa i odlikuju se visokim redom konvergencije.

Osim analize konvergencije i numeričke stabilnosti metoda realizovanih u kompleksnoj aritmetici, posebna pažnja posvećena je intervalnim metodima realizovanim u kompleksnoj kružnoj aritmetici (videti [2] i [17]). Radi efikasne eksperimentalne provere novih algoritama, zasnovane na numeričkim primerima, implementiran je sistem za interaktivno testiranje iterativnih algoritama.

Teza se sastoji od sledećih celina:

- Uvod;
- Poglavlje 1: Algoritmi za nalaženje nula polinoma;
- Poglavlje 2: Garantovana konvergencija;
- Poglavlje 3: Iterativni metodi korenskog tipa;
- Poglavlje 4: Familija simultanih iterativnih metoda;
- Poglavlje 5: Intervalni metodi Eulerovog tipa;
- Literatura;
- Dodatak.

Prvo poglavlje ima pregledni karakter i sastoji se od pet odeljaka. Sažetak teorije iterativnih procesa za rešavanje jednačina kao i hronološki pregled najznačajnijih rezultata vezanih za ovaj problem dati su u odeljku 1.1, pri čemu su algebarske jednačine u centru pažnje. Zbog problema pri korišćenju principa deflacije koji se odnose na numeričku stabilnost postupka, znatno češće su u upotrebi algoritmi za simultano određivanje nula polinoma. U ovoj tezi razmatrani su isključivo iterativni postupci zasnovani na relacijama nepokretne tačke. Numerički algoritmi dobijeni ovim putem odlikuju se veoma visokim redom konvergencije. Uz korišćenje kompleksne kružne aritmetike moguće je kontrolisati odstupanje dobijenih aproksimacija od tačnih vrednosti. Standardni način za konstrukciju simultanih iterativnih metoda za nalaženje nula polinoma opisan je u odeljku 1.2. Osnovne definicije, operacije i osobine kompleksne kružne aritmetike ukratko su izložene u odeljku 1.3. U odeljku 1.4 prikazani su principi konstrukcije simultanih intervalnih iterativnih metoda. Ovi metodi koriste odgovarajuće relacije nepokretne tačke i osobinu inkluzivne izotonosti, na osnovu čega se ponekad zovu inkluzivni metodi. Kako su za implementiranje inkluzivnih metoda neophodni početni kružni intervali koji sadrže tražene nule, u odeljku 1.5 dat je kratak pregled rezultata vezanih za lokalizaciju nula polinoma i izbor početnih diskova.

Drugo poglavlje posvećeno je jednom od najvažnijih problema pri rešavanju jednačina oblika $\varphi(z) = 0$ iterativnim putem - formulisanju početnih uslova koji dovode do garantovane konvergencije primenjenog numeričkog algoritma. Teorijske osnove koje su korišćenje pri analizi konvergencije razmatranih metoda date su u odeljku 2.1, sa posebnim osvrtom na definiciju i osobine R-reda konvergencije, uvedenog od strane Ortege i Rheinboldta [30]. Smaleova teorija i definicija aproksimativne nule predstavljali su neku vrstu prekretnice u analizi konvergencije iterativnih postupaka u Banachovim prostorima. Za razliku od svojih predhodnika koji su koristili pretpostavke koje treba da budu ispunjene u svakoj tački oblasti konvergencije, Smale je posmatrao uslove konvergencije samo u jednoj tački. Osnovne definicije i teoreme ovog fundamentalno novog prilaza navedene su u odeljku 2.2. Dva principa koji se koriste za analizu konvergencije i utvrđivanje dovoljnih uslova za konvergenciju simultanih metoda, princip korekcija i princip konvergentnih nizova, dati su u odeljcima 2.3 i 2.4, respektivno.

U **trećem** poglavlju razmatrani su neki od iterativnih metoda korenskog tipa, koji su poslužili kao osnova za konstrukciju novih metoda. Odeljak 3.1 obrađuje klasične metode korenskog tipa, gde centralno mesto zauzimaju metodi Eulerovog tipa. Klasični Eulerov metod dat je formulom

$$\hat{z} = z - \frac{2f(z)}{f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - 2f(z)f''(z)}},$$

pri čemu z predstavlja tekuću, a $\hat{z}$ novu aproksimaciju tražene nule. Primenom ovog metoda na pogodnu funkciju izveden je simultani metod četvrtog reda za određivanje prostih nula $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ polinoma P stepena n,

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} + \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i G_{2,i}}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

i pokazano je da i ovaj iterativni postupak spada u grupu metoda Eulerovog tipa. Pri konstrukciji iterativne formule (1) korišćena je Weierstrassova korekcija $W_i = W(z_i)$, gde je

$$W(z) = \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z}}^{n} (z - z_j)},$$

dok je $G_{k,i}$ skraćenica data formulom

$$G_{k,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^k} \quad (k = 1, 2).$$

Pored metoda Eulerovog tipa, još dva postupka korenskog tipa koji se često primenjuju, Laguerreov metod i metod Ostrowskog, prikazani su na kraju ovog odeljka. Hansen-Patrickova jednoparametarska familija simultanih iterativnih metoda,

$$\hat{z} = z - \frac{(\alpha + 1)f(z)}{\alpha f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - (\alpha + 1)f(z)f''(z)}}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

razmatrana je u odeljku 3.2.

Detaljna analiza konvergencije nove jednoparametarske familije simultanih iterativnih procesa, koja je zasnovana na Hansen-Patrickovoj formuli, data je u **četvrtom** poglavlju. Pod pretpostavkom da su aproksimacije $z_1,\ldots,z_n$ dovoljno bliske nulama $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ algebarskog polinoma P može se izvesti aproksimacija

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} \cong 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - z_j},$$

čijom se smenom u formuli (2) dobija familija iterativnih metoda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)N_i}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha+1)N_i \sum_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-1}}} \quad (i = 1,\ldots,n),$$

gde je N_i Newtonova korekcija data sa $N_i = N(z_i) = P(z_i)/P'(z_i)$. Za ovu familiju simultanih metoda izvedeni su početni uslovi koji obezbeđuju konvergenciju.

Peto poglavlje posvećeno je konstrukciji novih intervalnih metoda Eulerovog tipa za simultano nalaženje nula polinoma zasnovanih na klasičnim metodima Eulerovog tipa [14]. Pored prednosti koje metodi ove vrste nose sa sobom, vredno je još istaći da inkluzivni metodi produkuju intervalne aproksimacije koje sadrže tačne nule. Na taj način je ne samo automatski uključena informacija o granicama greške, već su takođe uzete u obzir i greške zaokruživanja bez ikakve promene osnovne strukture intervalnih formula. Intervalni metod koji je izveden i analiziran u odeljku 5.1,

$$\hat{Z}_i = \{\hat{z}_i; \hat{r}_i\} := z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} + \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 4W_iS_i}},$$

$$S_i = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(Z_i - z_j)}, \quad Z_i = \{z_i; r_i\}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

predstavlja proširenje rezltata koji su Petković i Vranić nedavno objavili u radu [44]. U odeljku 5.2 izvršena je analiza konvergencije metoda, koji je takođe predložen u [44], datog formulom

$$\hat{Z}_i := z_i - 2W_i\mathrm{INV}_1\left(1 + G_{1,i} + \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 4W_i \sum_{j\neq i} \frac{W_j \mathrm{INV}_2(Z_i - W_i - z_j)}{z_i - z_j}}\right),$$

gde se svaka od inverzija diskova, INV_1 i INV_2, računa po formuli (1.28) ili (1.29). Numerički primeri čine odeljak 5.3.

Iterativni postupci razmatrani u ovoj tezi testirani su na velikom broju numeričkih primera. Pri njihovoj realizaciji korišćen je originalni objektno orijentisani programski kod napisan na jeziku C++, kojim je omogućeno jednostavnije predstavljanje novih iterativnih formula. Osim toga, obezbeđeno je jednostavno uključivanje programskih paketa za rad sa aritmetikom proizvoljne tačnosti. Implementiran je i prvi server za kompleksnu kružnu aritmetiku, koji služi za interaktivno generisanje numeričkih primera koristeći pri tom iterativne metode predložene u ovoj tezi. Deklaracije ključnih klasa, nekoliko primera za korišćenje novih operacija i funkcija, kao i kratak opis servera dostupnog preko Interneta dati su u **dodatku**.

Spisak direktno korišćene ili citirane **literature**, koji sadrži 55 reference, nalazi se na kraju rada.

*

* *

Koristim priliku da izrazim veliku zahvalnost mentoru, profesoru dr Miodragu S. Petkoviću, koji je rukovodio izradom ove teze i pružao mi svesrdnu pomoć. On je zaslužan što sam zavoleo ovu oblast i počeo njome da se bavim. Takođe se zahvaljujem i profesoru dr Gradimiru V. Milovanoviću na dragocenim savetima.

Leto 2000, Leipzig *Dejan V. Vranić*

Poglavlje 1

Algoritmi za nalaženje nula polinoma

Ovo poglavlje ima pregledni karakter i sastoji se od pet odeljaka. U prvom odeljku dat je kratak pregled numeričkih procesa gde najznačajnije mesto zauzimaju postupci iterativne prirode. Pri rešavanju algebarskih jednačina često se koriste metodi simultanog tipa, gde se sve nule polinoma određuju istovremeno. Način konstrukcije simultanih numeričkih algoritama za nalaženje nula polinoma uz korišćenje relacije fiksne tačke opisan je u drugom odeljku. Iterativni postupci dobijeni ovim putem odlikuju se visokim redom konvergencije. Korišćenjem kompleksne intervalne aritmetike moguće je kontrolisati odstupanje dobijenih aproksimacija od tačnih vrednosti. Osnovne definicije, operacije i osobine kompleksne kružne aritmetike ukratko su prikazane u trećem odeljku, dok su u narednom odeljku izloženi principi konstrukcije simultanih intervalnih iterativnih metoda. Ovi metodi koriste odgovarajuće relacije nepokretne tačke i osobinu inkluzivne izotonosti, na osnovu čega su i poznati pod nazivom inkluzivni metodi. Kako su za implementiranje inkluzivnih metoda neophodni početni kružni intervali koji sadrže tražene nule, u poslednjem odeljku dati su neki od rezultata vezanih za lokalizaciju nula polinoma i izbor početnih diskova. Postupci opisani u ovom poglavlju mogu se koristiti za određivanje korena algebarskih jednačina, kod kojih su sve nule proste. Uz određene modifikacije, poput onih izloženih u [50], svi algoritmi mogu biti prošireni na opštiji slučaj višestrukih nula.

1.1 Opšta teorija iterativnih procesa za rešavanje jednačina

Problem određivanja nula polinoma jedan je od prvih nelinearnih problema sa kojima se matematičari susreću. Istorijat razvoja ove oblasti izuzetno je bogat. Doprinos su dali mnogi čuveni matematičari od kojih izdvajamo Newtona, Fouriera, Descartesa, Eulera, Čebiševa, Laguerrea, Halleya i Gaussa. Kroz više vekova ulagani su napori da se nule polinoma izraze u funkciji koeficijenata, koristeći pritom operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja, odnosno kraće rečeno - putem radikala. Samo u nekim specijalnim slučajevima dobijeni su rezultati (na primer, Cardanove formule se koriste za rešavanje jednačina trećeg stepena, a postoje i formule za rešavanje jednačina četvrtog stepena). Upravo iz tog razloga, jedno od fundamentalnih istraživanja na polju rešavanja polinomnih jednačina proizvoljnog stepena vezano je za ispitivanje mogućnosti dobijanja rešenja algebarskim putem. Najpre je norveški matematičar Abel u radu iz 1828. godine dokazao da se nule opšteg polinoma petog stepena ne mogu analitički izraziti, dok je samo par godina kasnije Galois dao uopštenje Abelovog rezultata dokazavši da je pomoću radikala nemoguće rešiti opštu algebarsku jednačinu stepena većeg od četiri.

Dokaz da se nule polinoma stepena većeg od četiri u opštem slučaju ne mogu izraziti u funkciji koeficijenata, kao i činjenica da su formule u slučaju polinoma trećeg i četvrtog stepena prilično komplikovane, bili su podstrek za razvoj numeričkog pristupa pri rešavanju algebarskih jednačina. Numerički procesi iterativne prirode najčešće su primenjivani u praksi. Neka je

$$\varphi(z) = 0 \tag{1.1}$$

data jednačina i neka je $z = \zeta$ jedno njeno rešenje. Opšti iterativni postupak za rešavanje ove jednačine dat je formulom

$$z^{(m+1)} = \Phi(z^{(m)}), \quad m = 0, 1, \dots , \tag{1.2}$$

gde je $z^{(m)}$ tekuća, a $z^{(m+1)}$ nova aproksimacija, pri čemu je data početna aproksimacija $z^{(0)}$. Pod određenim uslovima, iterativni metod (1.2) konvergira ka nuli ζ funkcije φ, odnosno

$$\lim_{m \to \infty} z^{(m)} = \zeta.$$

Čuveni engleski matematičar i fizičar Isaac Newton (1643-1727) konstruisao je jedan od prvih iterativnih postupaka za rešavanje jednačina. Newtonov metod za jednačinu tipa (1.1) glasi

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\varphi(z^{(m)})}{\varphi'(z^{(m)})}, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Prvu detaljnu analizu Newtonovog metoda izvršio je Raphson 1690. godine i iz tog razloga se ovaj iterativni postupak često naziva Newton-Raphsonovim metodom. Newtonov metod je veoma aktuelan i u današnje vreme i mnogi noviji metodi dobijeni su upravo na osnovu modifikacija Newtonovog metoda. Pored teorijskog značaja, Newtonov iterativni postupak je zbog svoje jednostavnosti i efikasnosti našao široku primenu u mnogim naučnim disiplinama. Red konvergencije ovog metoda je dva i to je najpre dokazao Fourier.

Hronološki gledano, sledeći u nizu značajnih rezultata iz oblasti teorije iterativnih procesa za rešavanje jednačina predložen je 1694. godine od strane Edmunda

Halleya (1656-1742), poznatog engleskog astronoma. Njegov iterativni postupak oblika

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\varphi(z^{(m)})}{\varphi'(z^{(m)}) - \dfrac{\varphi''(z^{(m)})\varphi(z^{(m)})}{2\varphi'(z^{(m)})}}, \quad m = 0, 1, \dots ,$$

ima red konvergencije tri.

Jedan vek posle Newtona veliki švajcarski matematičar Leonhard Euler (1707-1783) konstruisao je kubno konvergentan metod korenskog tipa, kome je posvećeno dosta pažnje u ovoj tezi,

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{2\varphi(z^{(m)})}{\varphi'(z^{(m)}) \pm \sqrt{\varphi'(z^{(m)})^2 - 2\varphi(z^{(m)})\varphi''(z^{(m)})}}, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Ukoliko je $|\varphi(z^{(m)})|$ dovoljno malo, tada aproksimacijom kvadratnog korena (uzima se znak „+" ispred korena) Eulerovu formulu svodimo na Halleyevu. Pored Eulerovog još dva metoda korenskog tipa, koji takođe imaju kubnu konvergenciju, dobro su poznata u literaturi i često se koriste u praksi. Najpre navodimo metod koji je izveo francuski matematičar Edmond Laguerre (1834-1886), a koji je objavljen tek 1898. godine u knjizi *Oeuvres de Laguerre* autora H. Poincaréa,

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\lambda\varphi(z^{(m)})}{\varphi'(z^{(m)}) \pm \sqrt{[(\lambda-1)\varphi'(z^{(m)})]^2 - \lambda(\lambda-1)\varphi(z^{(m)})\varphi''(z^{(m)})}},$$

pri čemu važi $\lambda \notin \{0, 1\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $m = 0, 1, \dots$. Drugi metod korenskog tipa je metod Ostrowskog iz 1966. godine, koji ima oblik

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\varphi(z^{(m)})}{\pm\sqrt{\varphi'(z^{(m)})^2 - \varphi(z^{(m)})\varphi''(z^{(m)})}}, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Od značajnih rezultata na polju iterativnih procesa pomenućemo i Schröderov razvoj. Za nulu ζ funkcije φ i njenu aproksimaciju a Schröderov razvoj ima oblik:

$$\zeta = a - \nu - \frac{1}{2!}\gamma_2\nu^2 + \frac{1}{3!}(3\gamma_2^2 - \gamma_3)\nu^3 + \cdots, \tag{1.3}$$

gde je $\nu = \varphi(a)/\varphi'(a)$ Newtonova korekcija i $\gamma_m = \varphi^{(m)}(a)/\varphi'(a)$, $m = 2, 3, \dots$. Uzimanjem r članova ovog razvoja i zamenom nule ζ novom aproksimacijom $z^{(m+1)}$, dobija se iterativni postupak reda konvergencije r. Razvoj (1.3) često se naziva osnovnim razvojem i primenjuje se ne samo pri konstrukciji iterativnih postupaka visokog reda konvergencije, već i prilikom analitičkog utvrđivanja reda konvergencije iterativnih metoda. Tako za $r = 2$ dobijamo Newtonov metod. Za $r = 3$ dobija se kubno konvergetni metod dat formulom

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\varphi(z^{(m)})}{\varphi'(z^{(m)})}\left(1 + \frac{\varphi(z^{(m)})\varphi''(z^{(m)})}{2\varphi'(z^{(m)})^2}\right), \quad m = 0, 1, \dots ,$$

koji se često naziva Euler–Čebiševljevim metodom.

Gotovo svi navedeni algoritmi mogu se dobiti kao specijalni slučajevi jednoparametarske familije iterativnih postupaka prikazane u radu Hansena i Patricka [19].

Napomenimo da su se šezdesetih godina i ranije metodi za određivanje nula polinoma uglavnom realizovali na principu deflacije. Kod ovog pristupa neophodno je odrediti jednu nulu ζ polinoma $P(z)$ stepena n. Tada su ostale nule polinoma $P(z)$ zapravo nule polinoma $Q(z)$ stepena $n-1$ datog sa

$$Q(z) = \frac{P(z)}{z-\zeta}.$$

Zatim se određuje jedna nula polinoma $Q(z)$ i postupak se dalje rekurzivno ponavlja. Nepovoljnost pri realizaciji ovakvih postupaka na računarima predstavlja činjenica da do izražaja dolazi uticaj grešaka zaokruživanja u toku računanja. Pored toga, umesto tačne vrednosti nule polinoma moguće je dobiti samo njenu aproksimaciju. Ove greške mogu da prouzrokuju drastična odstupanja pri izračunavanju koeficijenata sledećeg polinoma u postupku deflacije, čije nule, u tom slučaju, ne predstavljaju dobru aproksimaciju tačnih nula početnog polinoma. Dakle, postupak deflacije može biti numerički nestabilan. Korišćenjem programskih paketa za rad sa aritmetikom koja koristi izuzetno veliki broj cifara (do 2.6 miliona cifara!) ovi problemi se mogu donekle ublažiti po cenu drastičnog usporavanja brzine izvršenja iterativnog koraka.

Zbog navedenih nedostataka postupka deflacije u novije vreme su sve više u upotrebi iterativni metodi kojima se nule polinoma određuju istovremeno, polazeći od izvesnih početnih aproksimacija. Posebna pažnja posvećena je razvoju iterativnih metoda realizovanih u intervalnoj aritmetici, kao i implementaciji na paralelnim računarskim arhitekturama. Upotreba intervalnog računa ima za cilj kontrolu greške prilikom svih izračunavanja, dok višeprocesorski računari služe za smanjenje vremena računanja. Očekujemo da aktuelna ekspanzija Interneta donese inovacije u implementiranju simultanih numeričkih algoritama, kako zbog mogućnosti distribuirane realizacije paralelnih algoritama kojom bi bio omogućen brži rad sa aritmetkom proizvoljne tačnosti, tako i dostupnosti tih sistema velikom broju matematičara koji rade na ovoj problematici.

1.2 Simultani metodi za nalaženje nula polinoma

Iterativni metodi o kojima će nadalje biti reči omogućavaju jednovremeno određivanje svih nula algebarskog polinoma, pri čemu su date početne aproksimacije koje zadovoljavaju određene uslove. Generalno, ovi metodi mogu se zapisati u sledećem obliku

$$z_i^{(m+1)} = \Phi(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}), \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots\ , \tag{1.4}$$

gde je $I_n := \{1, \dots, n\}$ indeksni skup, a m redni broj iteracije. Ponekad, ukoliko redni broj iteracije nije od značaja, za neku veličinu $x^{(m)}$ koja se javlja u m-tom iterativnom koraku indeks iteracije će biti izostavljen, tj. pisaćemo $x \equiv x^{(m)}$, dok će veličine koje se javljaju u sukcesivnom koraku biti označavane simbolom $\widehat{}$, tj. $\hat{x} \equiv x^{(m+1)}$. Na primer, (1.4) možemo da zapišemo kao

$$\hat{z}_i = \Phi(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n.$$

Iterativni metodi ovakvog tipa zovu se *simultani metodi* ili *total-step metodi.*

Neka je P moničan polinom stepena n, tj.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i) \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

koji ima proste kompleksne nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ i neka su $z_1, \ldots, z_n$ njihove aproksimacije. *Relacije fiksne (nepokretne) tačke* su formule opšteg oblika

$$\zeta_i = F(z_1, \ldots, z_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

U ovoj tezi, biće reči o sledeća dva oblika relacije nepokretne tačke

$$\zeta_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, \zeta_i, z_{i+1}, \ldots, z_n), \quad i \in I_n \tag{1.5}$$

$$\zeta_i = F_2(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, z, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n), \quad i \in I_n \tag{1.6}$$

i one predstavljaju osnovu za konstrukciju simultanih metoda za određivanje nula polinoma. Opšti iterativni postupci u kompleksnoj aritmetici oblika

$$\hat{z}_i = F(z_1, \ldots, z_n), \quad i \in I_n, \tag{1.7}$$

dobijaju se zamenom tačnih nula njihovim aproksimacijama i stavljanjem $z = z_i$ na desnoj strani u (1.5) i (1.6). Ovakav način konstrukcije iterativnih procesa daje algoritme koji se odlikuju vrlo brzom konvergencijom kako u kompleksnoj aritmetici, tako i u kompleksnoj kružnoj aritmetici.

U nastavku ovog odeljka navešćemo nekoliko relacija fiksne tačke sa odgovarajućim iterativnim metodima koji su na osnovu njih konstruisani. Iterativni procesi koji slede spadaju u red najčešće korišćenih metoda za simultano određivanje nula polinoma u kompleksnoj aritmetici. Više detalja o ovim relacijama i metodima može se naći u monografiji [31].

Weierstrassov metod

Polazeći od faktorizovanog oblika polinoma P,

$$P(z) = (z - \zeta_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(z - \zeta_j)$$

neposredno dobijamo relaciju nepokretne tačke Weierstrassovog tipa

$$\zeta_i = z - \frac{P(z)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(z - \zeta_j)}, \quad i \in I_n. \tag{1.8}$$

Na osnovu (1.6) i (1.7) iz (1.8) formiramo Weierstrassov metod

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(z_i - z_j)}, \quad i \in I_n. \tag{1.9}$$

Napomenimo da se veličina

$$W(z_i) = \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(z_i - z_j)} \tag{1.10}$$

zove Weierstrassova korekcija.

Iterativni metod (1.9) jedan je od najkorišćenijih simultanih postupaka za nalaženje nula polinoma zbog niza dobrih karakteristika. Red konvergencije iterativnog procesa (1.9) je dva. Interesantan je i istorijat korišćenja ovog metoda. Naime, više puta su različiti matematičari „otkrivali" i izvodili ovu iterativnu formulu (npr. Durand 1960. [12], Dočev 1962. [11], Börsch-Supan 1963. [4], Kerner 1966. [23]). Međutim, formula (1.9) se danas najčešće naziva Weierstrassovom po matematičaru koji je prvi koristio u svom konstruktivnom dokazu osnovnog stava algebre još 1891. godine. U literaturi se još mogu sresti nazivi metod Dočeva i Durand-Kernerov metod.

Jedna od najkorisnijih osobina metoda (1.9) je da on konvergira za skoro sve početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$, koje su međusobno razdvojene. Do ovog zaključka došli su mnogi matematičari kroz mnogobrojne numeričke primere. Posebno je interesantno da ovaj postupak konvergira i kada nule polinoma P nisu proste. Globalna konvergencija je dokazana za $n = 2$ i za specijalni slučaj $P(z) = z^3$. Dokaz ovog tvrđenja za opšti slučaj još uvek ne postoji.

Ehrlich-Aberthov metod

Polazeći od relacije

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)} + \frac{1}{(z - \zeta_i)} \tag{1.11}$$

izvodimo relaciju nepokretne tačke Newtonovog tipa

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{z - \zeta_j}}, \quad i \in I_n. \tag{1.12}$$

S obzirom na (1.6) i (1.7) iz (1.12) dobijamo Ehrlich-Aberthov iterativni postupak

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{z_i - z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{1.13}$$

Postupak (1.13) je u literaturi poznat još i kao Meahlyev metod jer je formulu (1.13) prvi predložio Maehly [27] 1954. godine. Börsch-Supan [4] je koristio isti metod za nalaženje aposteriorne ocene grešaka za nule polinoma, dok je Ehrlich [13] 1967. godine dokazao da je red konvergencije metoda (1.13) jednak tri. Aberth [1] je 1973. dao zapažen doprinos praktičnoj realizaciji ovog postupka.

Börsch-Supanov metod

Polazeći od identiteta koji se dobija primenom Lagrangeove interpolacije,

$$P(z) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W(z_j)}{z - z_j} + 1 \right) \prod_{j=1}^{n} (z - z_j), \tag{1.14}$$

pri čemu važi $\zeta_i \notin \{z_1, \ldots, z_n\}$, $i \in I_n$, smenom $z = \zeta_i$ i rešavanjem dobijene jednačine po $\zeta_i - z_i$ dolazimo do relacije fiksne tačke Börsch-Supanovog tipa

$$\zeta_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{W(z_j)}{\zeta_i - z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{1.15}$$

Imajući u vidu (1.5) i (1.7) na osnovu (1.15) neposredno se dobija Börsch-Supanov iterativni postupak

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{W(z_j)}{z_i - z_j}}, \quad i \in I_n, \tag{1.16}$$

čiji je red konvergencije jednak tri (videti [5]).

Metod kvadratnog korena

Diferenciranjem identiteta (1.11) dobija se

$$\frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2}, \tag{1.17}$$

odakle sledi relacija nepokretne tačke sa kvadratnim korenom

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\sqrt{\frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2}}}, \quad i \in I_n. \tag{1.18}$$

Kao i u prethodnim slučajevima, korišćenjem (1.6) i (1.7) iz (1.18) dobija se metod kvadratnog korena

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - z_j)^2}}}, \quad i \in I_n, \tag{1.19}$$

koji ima red konvergencije četiri [31].

Metod Halleyevog tipa

Zamenjujući sume iz (1.11) i (1.17) u identitetu

$$\frac{P''(z)}{P(z)} = \left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)^2 + \left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)'$$

formiramo relaciju fiksne tačke Halleyevog tipa [33]

$$\zeta_i = z - \frac{1}{f(z) - \dfrac{P(z)}{2P'(z)}\left[\left(\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{z-\zeta_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{(z-\zeta_j)^2}\right]}, \quad i \in I_n, \tag{1.20}$$

pri čemu je $f(z) = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{P''(z)}{2P'(z)}$. Najzad, pomoću (1.6) i (1.7) na osnovu (1.20) izvodi se metod Halleyevog tipa, čiji je red konvergencije četiri,

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[\left(\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-z_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{(z_i-z_j)^2}\right]}, \quad i \in I_n. \tag{1.21}$$

U literaturi se iterativni postupak (1.21) još sreće pod imenom Wang-Zhengov metod. Oni su 1984. u svom radu [52] izveli opštu relaciju fiksne tačke iz koje (1.20) sleduje kao specijalan slučaj.

Uslovi pod kojima iterativni procesi (1.9), (1.13), (1.16), (1.19) i (1.21) konvergiraju razmatrani su u radu [32]. Značaj dokazanog rezultata leži u činjenici da uslovi koji garantuju konvergenciju pomenutih metoda zavise samo od početnih aproksimacija, što utiče na poboljšanje njihove praktične primene.

Neka su $\{z_1^{(m)}\}, \ldots, \{z_n^{(m)}\}$, $m = 0, 1, \ldots$, nizovi aproksimacija dobijenih nekim od iterativnih postupaka i neka je

$$d^{(m)} := \min_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}|\}, \qquad W^{(m)} := \max_{1\le i\le n} |W(z_i^{(m)})|.$$

Teorema 1.1 *Ukoliko je ispunjen uslov*

$$W^{(0)} = \max_{1\le i\le n} |W(z_i^{(0)})| < \frac{\min_{i\neq j} |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}|}{3n} = \frac{d^{(0)}}{3n}, \tag{1.22}$$

simultani iterativni metodi (1.9), (1.13), (1.16), (1.19) *i* (1.21) *konvergiraju.*

Napomenimo još da je i kod ovih metoda moguće primeniti Gauss-Seidelov pristup i koristiti već izračunate aproksimacije u istoj iteraciji. Na taj način se dobija serijska verzija (*single step*) simultanih metoda

$$\hat{z}_i = \Phi(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{i-1}, z_i, \ldots, z_n), \quad i \in I_n.$$

Prednost ovog pristupa je, svakako, povećanje reda konvergencije, međutim, nedostatak je nemogućnost efektivne realizacije ovih metoda na paralelnim računarskih arhitekturama.

1.3 Kompleksna kružna aritmetika

U poglavlju 4 koristimo kompleksnu kružnu aritmetiku za dobijanje nekih ocena i granica, dok je poglavlje 5 isključivo posvećeno intervalnim iterativnim metodima. Iz tog razloga, u ovom odeljku navodimo osnovne osobine i operacije kompleksne kružne aritmetike.

Disk Z sa centrom $c = \operatorname{mid} Z$ i poluprečnikom $r = \operatorname{rad} Z$ označavaćemo sa $Z = \{c; r\} = \{z : |z - c| \le r\}$. Skup svih zatvorenih diskova (tj. kružnih intervala) u kompleksnoj ravni označavamo sa $\mathbb{K}(\mathbb{C})$. Diskovi u kompleksnoj ravni uvek će biti označavani velikim slovima.

Apsolutna vrednost diska $Z = \{c; r\}$ predstavlja rastojanje najudaljenije tačke diska od koordinatnog početka, tj.

$$|Z| := |\operatorname{mid} Z| + \operatorname{rad} Z = |c| + r. \tag{1.23}$$

U ovoj tezi često su korišćene sledeće očigledne ekvivalencije:

$$z \in \{c; r\} \iff |z - c| \le r, \tag{1.24}$$
$$z \notin \{c; r\} \iff |z - c| > r, \tag{1.25}$$
$$\{c_1; r_1\} \subseteq \{c_2; r_2\} \iff |c_1 - c_2| \le r_2 - r_1, \tag{1.26}$$
$$\{c_1; r_1\} \cap \{c_2; r_2\} = \emptyset \iff |c_1 - c_2| > r_1 + r_2. \tag{1.27}$$

Ako je $Z_k = \{c_k; r_k\}$ $(k = 1, 2)$, tada su operacije sabiranja i oduzimanja u skupu $\mathbb{K}(\mathbb{C})$ definisane na sledeći način

$$Z_1 \pm Z_2 := \{c_1 \pm c_2; r_1 + r_2\} = \{z_1 \pm z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}.$$

U opštem slučaju važi

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k; \sum_{k=1}^{n} r_k \right\}.$$

Ako $0 \notin Z$ (tj, $|c| > r$), tada je tačna inverzija diska Z data sa

$$Z^{-1} = \left\{ \frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2}; \frac{r}{|c|^2 - r^2} \right\} = \left\{ \frac{1}{z} : z \in Z \right\}. \tag{1.28}$$

Dakle, sabiranje, oduzimanje i inverzija su *tačne* operacije u skupu $\mathbb{K}(\mathbb{C})$.

U nekim analizama, kao i kod nekih intervalnih metoda (videti poglavlje 5), koristi se tzv. inverzija diska Z u centriranoj formi, određena sa

$$Z^I := \left\{ \frac{1}{c}; \frac{r}{|c|(|c|-r)} \right\} \supseteq \left\{ \frac{1}{z} : z \in Z \right\}. \tag{1.29}$$

Iz razloga što je računanje $|c| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2},\ c \in \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{R}$ u (1.29) relativno skupa operacija (pri realizaciji na računaru), uvedena je modifikacija inverzije u centriranoj formi na sledeći način

$$Z^{I'} := \left\{ \frac{1}{c}; \frac{2r}{|c|^2 - r^2} \right\} \supseteq \left\{ \frac{1}{z} : z \in Z \right\}. \tag{1.30}$$

Međutim, sa poboljšanjem hardverskih performansi računara, u novije vreme inverzija (1.30) gotovo da nema nikakvih prednosti nad (1.29), jer je računanje kvadratnog korena u (1.29) prihvatljivije od povećanja poluprečnika rezultujućeg kružnog intervala u (1.30). Primetimo da se lako pokazuje da važi $Z^{-1} \subseteq Z^I \subseteq Z^{I'}$ uz uslov da je $|c| > r$, tj. $0 \notin Z$.

Za proizvod $Z_1 \cdot Z_2$ koristimo definiciju koju su uveli Gargantini i Henrici [17]:

$$Z_1 \cdot Z_2 := \{c_1 c_2; |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2\} \supseteq \{z_1 z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}. \tag{1.31}$$

Tada je

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot Z_2^{-1} \quad \text{ili} \quad \frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot Z_2^I \quad (0 \notin Z_2).$$

Na osnovu (1.31) dobija se opšta formula za proizvod n diskova:

$$\prod_{k=1}^{n} Z_k = \left\{ \prod_{k=1}^{n} c_k; \prod_{k=1}^{n} (|c_k| + r_k) - \prod_{k=1}^{n} |c_k| \right\}.$$

Kvadratni koren diska $Z = \{c; r\}$, gde je $c = |c|e^{i\theta},\ -\pi < \theta \leq \pi$ i $|c| > r$, definisan je kao unija dva diska (videti [15]):

$$\{c; r\}^{1/2} = \left\{ \sqrt{|c|} e^{i\frac{\theta}{2}}; \rho \right\} \bigcup \left\{ -\sqrt{|c|} e^{i\frac{\theta}{2}}; \rho \right\}, \quad \rho = \sqrt{|c|} - \sqrt{|c| - r}. \tag{1.32}$$

Neka je f kompleksna funkcija definisana na disku $Z \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$. U opštem slučaju skup $\{f(z) : z \in Z\}$ nije disk, tj. kružni interval, što znači da nije moguće primenjivati navedene operacije. Da bi se i dalje radilo u kompleksnoj kružnoj aritmetici, uvodi se *kružno intervalno proširenje* F date zatvorene kompleksne funkcije f na disku Z, tako da važe sledeća svojstva

$$\begin{aligned} &F(Z) \supseteq \{f(z) : z \in Z\} \quad &&\text{(inkluzija)}, \\ &F(z) = f(z) &&\text{(restrikcija)}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Za ovako definisano kompleksno kružno proširenje imamo da je za svako $z \in Z$

$$|\text{mid } F(Z)| - \text{rad } F(Z) \le |f(z)| \le |\text{mid } F(Z)| + \text{rad } F(Z) \tag{1.34}$$

i implikacija

$$z \in Z \ \Rightarrow \ f(z) = F(z) \in F(Z) \tag{1.35}$$

važi.

Jedna od najvažnijih osobina intervalne aritmetike je *inkluzivna izotonost* (ili svojstvo inkluzije) koja omogućava široku primenu intervalnog računa. Ova osobina važi za osnovne intervalne operacije i definisana je na sledeći način

$$Z_1 \subseteq W_1 \wedge Z_2 \subseteq W_2 \Rightarrow Z_1 * Z_2 \subseteq W_1 * W_2, \tag{1.36}$$

pri čemu je $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ i $Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$.

Kružno intervalno proširenje F je inkluzivno izotono ako za svaka dva diska $Z_1, Z_2 \in D \subseteq \mathbb{K}(\mathbb{C})$ važi implikacija

$$Z_1 \subseteq Z_2 \ \Rightarrow \ F(Z_1) \subseteq F(Z_2). \tag{1.37}$$

Osim toga, ako je f racionalna funkcija, F njeno inkluzivno izotono kompleksno kružno proširenje i $Z_k, W_k \in \mathbb{K}(\mathbb{C}),\ k = 1, \ldots, q$, imamo

$$Z_k \subseteq W_k \ (k = 1, \ldots, q) \Rightarrow F(Z_1, \ldots, Z_q) \subseteq F(W_1, \ldots, W_q).$$

U specijalnom slučaju ispunjeno je

$$w_k \in W_k \ (w_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \ldots, q) \Rightarrow f(w_1, \ldots, w_q) \in F(W_1, \ldots, W_q).$$

Treba naglasiti da i kompleksna pravougaona aritmetika može biti uspešno primenjena kod intervalnih iterativnih metoda. Štaviše, tada prednosti ovog tipa intervalne aritmetike (na primer, uključivanje grešaka zaokruživanja i redukovanje rezultujućeg intervala korišćenjem operacije preseka) postaju evidentne. Kao i u mnogim radovima koji se bave ovom problematikom, opredelili smo se za kružnu intervalnu aritmetiku jer je računanje sa kružnim intervalima jednostavnije nego sa pravougaonicima.

Više detalja o kompleksnoj kružnoj, kao i o pravougaonoj i realnoj intervalnoj aritmetici može se naći u monografijama [2] Alefelda i Herzbergera i [31] autora M. Petkovića.

1.4 Intervalni iterativni metodi

Začetak teorije intervalnih iterativnih procesa predstavlja rezultat koji je dobio Moore [29] 1966. godine. Neka je $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ data jednačina koja ima bar jednu prostu realnu nulu. Ako je $F'(X)$ realno intervalno proširenje funkcije $f'(x)$ nad intervalom X, koji sadrži realnu prostu nulu ζ funkcije f, tada je Newtonow intervalni operator $N(X)$ definisan sa

$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}, \quad m(X) = \text{mid } X \tag{1.38}$$

i važi implikacija

$$\zeta \in X \Longrightarrow \zeta \in N(X).$$

Na osnovu toga Moore je konstruisao intervalni metod Newtonovog tipa

$$X_{m+1} = N(X_m) \cap X_m \quad m = 0, 1, \ldots\ , \tag{1.39}$$

pri čemu je

$$\zeta \in X_0.$$

Pod određenim uslovima ovaj metod konvergira kvadratno. Osnovni nedostatak intervalnog postupka (1.38)-(1.39) leži u činjenici da se on može upotrebiti samo za proste realne nule.

U nastavku je prikazan način za formiranje simultanih metoda u kompleksnoj kružnoj aritmetici. Kao što je pomenuto u prethodnom odeljku, konstrukcija intervalnih metoda za nalaženje nula polinoma zasnovana je na osobini inkluzivne izotonosti (1.36). Relacije fiksne tačke opisane u odeljku 1.2 koristimo i u ovom slučaju. Podsećamo da smo prilikom konstrukcije „tačkastih" iterativnih metoda zamenjivali tačne nule polinoma njihovim aproksimacijama i stavljali $z = z_i$.

Pretpostavimo sada da smo našli diskove $Z_1, \ldots, Z_n$ koji sadrže nule datog polinoma P stepena n, tj. $\zeta_i \in Z_i$ ($i \in I_n$; $I_n = \{1, \ldots, n\}$). Zamenom tačnih nula na desnoj strani relacija (1.5) i (1.6) intervalima kojim pripadaju i koristeći svojstvo inkluzije, dobijamo

$$\zeta_i \in F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n), \quad i \in I_n, \tag{1.40}$$

$$\zeta_i \in F_2(Z_1, \ldots, Z_{i-1}, z, Z_{i+1}, \ldots, Z_n), \quad i \in I_n. \tag{1.41}$$

Uzimanjem oblasti na desnoj strani relacija (1.40) i (1.41) za nove aproksimativne intervale $\hat{Z}_i$ nula ζ_i ($i \in I_n$) formiramo intervalne iterativne postupke

$$\hat{Z}_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n), \quad i \in I_n, \tag{1.42}$$

$$\hat{Z}_i = F_2(Z_1, \ldots, Z_{i-1}, z, Z_{i+1}, \ldots, Z_n), \quad i \in I_n, \tag{1.43}$$

u kompleksnoj intervalnoj aritmetici, pod predpostavkom da su $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_n$ takođe kompleksni (kružni ili pravougaoni) intervali, pri čemu je $z_i = \operatorname{mid} Z_i$. Metodi formirani na ovaj način konvergiraju lokalno, drugim rečima, konvergiraju pod određenim početnim uslovima koji uzimaju u obzir distribuciju početnih diskova i njihovu veličinu. Iz tog razloga često se kombinuju sa nekim sporo konvergentnim procesima, da bi se obezbedile dovoljno dobre početne aproksimacije.

U nastavku dajemo intervalne verzije metoda iz odeljka 1.2, koje su dobijene na opisani način.

- Weierstrassov intervalni postupak:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z_i - Z_j)}, \quad i \in I_n. \tag{1.44}$$

- Gargatini-Henricijev intervalni postupak (intervalna verzija Ehrlich-Aberthovog metoda):

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{1.45}$$

- Börsch-Supanov intervalni postupak:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{W(z_j)}{z_i - Z_j}}, \quad i \in I_n. \tag{1.46}$$

- Intervalni postupak kvadratnog korena:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - Z_j)^2}}}, \quad i \in I_n. \tag{1.47}$$

- Intervalni postupak Halleyevog tipa:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[\left(\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - Z_j)^2}\right]}, \; i \in I_n, \tag{1.48}$$

gde je $f(z) = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{P''(z)}{2P'(z)}$.

Simultani tačkasti metodi iz odeljka 1.2 zapravo su specijalni slučajevi odgovarajućih intervalnih postupaka, kada su poluprečnici diskova jednaki nuli. Početni uslovi pod kojima iterativni postupci (1.44)-(1.48) konvergiraju utvrđeni su u sledećoj teoremi, koja je dokazana u radu [32]:

Teorema 1.2 *Ako je ispunjen uslov* (1.22) *teoreme* 1.1, *pri čemu je* $z_i = \operatorname{mid} Z_i$ $(i \in I_n;\ I_n = \{1, \ldots, n\})$, *i ako su početni diskovi definisani sa*

$$Z_i^{(0)} := \{z_i^{(0)} - W(z_i^{(0)});\ |W(z_i^{(0)})|\} \qquad i \in I_n,$$

simultani intervalni iterativni postupci (1.44)-(1.48) *su konvergentni.*

Napomena 1.1 Red konvergencije svakog od intervalnih metoda (1.44)-(1.48) isti je kao i kod odgovarajućeg tačkastog metoda iz odeljka 1.2, što je i očekivano imajući u vidu pomenutu činjenicu da su tačkasti metodi praktično specijalni slučajevi intervalnih.

Napomena 1.2 Moguća je, takođe, konstrukcija simultanih iterativnih metoda kombinovanjem tačkastih postupaka tipa (1.7) sa intervalnim metodima (1.42) i (1.43). Na ovaj način dobijaju se postupci koji objedinjuju brže računanje u običnoj kompleksnoj aritmetici sa pogodnostima vezanim za kontrolu greške. Primer konstrukcije kombinovanih metoda može se naći u [50].

1.5 Lokalizacija nula polinoma

Prilikom primene nekog iterativnog metoda za inkluziju nula polinoma potrebno je odrediti početne oblasti (kružne ili pravougaone kompleksne intervale) koje sadrže tražene nule. Postoji puno rezultata koji obrađuju ovaj problem, pored klasičnih poput onih objavljenih u knjigama [18] i [28], značajan broj doprinosa je novijeg datuma.

Izbor početnih oblasti koje sadrže nule polinoma povezan je sa uslovima koji garantuju konvergenciju odgovarajućeg iterativnog procesa. Većina uslova razmatranih u literaturi zavisi od nedostupnih podataka (na primer, od traženih nula polinoma) i značaj im je više teoretski. Sa praktične strane, značajno je da početne inkluzivne oblasti budu funkcije početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ prostih kompleksnih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. U ovom odeljku izložen je jedan način izbora početnih oblasti koji podrazumeva da je prethodni zahtev ispunjen. Istovremeno, takav izbor omogućava i sigurnu konvergenciju najčešće korišćenih iterativnih inkluzivnih postupaka, koji su prikazani u ovoj tezi.

Najpre navodimo jedan rezultat globalnog karaktera. Neka je P moničan polinom stepena n sa prostim kompleksnim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j), \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}. \tag{1.49}$$

Pri rešavanju algebarskih jednačina često je od interesa naći inkluzivni poluprečnik R za dati polinom P, takav da za sve nule polinoma važi

$$|\zeta_i| \le R, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sledeću teoremu, koja ima veliki praktični značaj, dokazao je Henrici u [18].

Teorema 1.3 *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pozitivni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \le 1$ i neka je*

$$R := \max_{1 \le k \le n} \lambda_k^{-1/k} |a_{n-k}|^{1/k}.$$

Tada je R inkluzivni poluprečnik za polinom P.

Ukoliko izaberemo $\lambda_k = 1/2^k,\ k = 1, \ldots, n$, na osnovu teoreme 1.3 dobijamo da disk sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom

$$R = 2 \max_{1 \le k \le n} |a_{n-k}|^{1/k} \tag{1.50}$$

sadrži sve nule polinoma P. Ovaj rezultat može se naći i u Knuthovoj knjizi [25]. U nekim primenama pogodno je uzeti za početnu oblast najmanji kvadrat koji sadrži krug $\{z : |z| < R\}$, pri čemu je R dato sa (1.50).

Prethodni rezultat moguće je poboljšati ukoliko se za centar diska umesto koordinatnog početka odabere tačka $c = (\zeta_1 + \ldots + \zeta_n)/n = -a_{n-1}/n$. Tačka c je tzv. „centar gravitacije" ili „težište" nula polinoma (1.49), koji transformišemo u „pomereni" polinom translacijom promenljive z

$$P(z+c) = z^n + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0 = \prod_{j=1}^{n}(z - (\zeta_j - c)) = \prod_{j=1}^{n}(z - \xi_j),$$

gde su $b_0, \ldots, b_{n-2} \in \mathbb{C}$ i $b_{n-1} = 0$, pri čemu su $\xi_i = \zeta_i - c$ $(i = 1, \ldots, n)$ nule polinoma $P(z+c)$. Težište nula transformisanog polinoma je u koordinatnom početku. Inkluzivni poluprečnik

$$R' = 2 \max_{2 \le k \le n} |b_{n-k}|^{1/k}$$

za polinom $P(z + c)$ je najčešće manji od poluprečnika R, izračunatog pomoću (1.50).

Pretpostavimo da su međusobno različiti kompleksni brojevi $z_1, \ldots, z_n$ dovoljno dobre aproksimacije nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P. Weierstrassova korekcija $W_i = W(z_i)$ definisana pomoću (1.10) često se koristi za *a posteriori* procene grešaka za dati skup aproksimacija nula. Smith je u radu [49] dokazao sledeću teoremu:

Teorema 1.4 *Neka je $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pozitivan vektor i neka su*

$$D_j(\boldsymbol{\alpha}) := \left\{ z : |z - (z_j - W_j)| \le \frac{1}{\alpha_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} \alpha_i |W_i| \right\}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

diskovi u kompleksnoj ravni. Tada unija diskova $D(\boldsymbol{\alpha}) = \cup_{j=1}^{n} D_j(\boldsymbol{\alpha})$ sadrži sve nule polinoma P. Osim toga, svaki povezani podskup od $D(\boldsymbol{\alpha})$ koji se sastoji od m $(1 \le m \le n)$ diskova, izdvojenih od preostalih $n - m$ diskova, sadrži tačno m nula polinoma P.

Do sličnog rezultata došli su Braess i Hadeler [6], ali za diskove

$$G_j(\boldsymbol{\alpha}) := \left\{ z : |z - z_j| \le \frac{1}{\alpha_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} \alpha_i |W_i| \right\}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Ovi diskovi mogu se dobiti i na osnovu opštijeg Smithovog rezultata iz teoreme 1.4.

Specijalno, ako uzmemo $\alpha_i = 1/|W_i|$, diskovi $G_j(\boldsymbol{\alpha})$ postaju

$$G_j(\boldsymbol{\alpha}) := \{z : |z - z_j| \le n|W_j|\}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Ovaj rezultat ima praktičan značaj. Naime, može se pokazati da ako su diskovi $\{z_1; n|W_1|\}, \ldots, \{z_n; n|W_n|\}$ disjunktni, tada svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P. Slična konstatacija važi i za Smithove diskove.

Ovi rezultati su poboljšani (poluprečnici diskova su manji) u monografiji [36], o čemu će biti više reči u odeljku 2.4. U nastavku navodimo još jedan zanimljiv rezultat.

Teorema 1.5 *Neka je* $\nu_i := z_i - W_i \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ *i*

$$a_i := \frac{|W_i|}{\min\limits_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} |z_j - \nu_i|}, \qquad b_i := \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{|W_j|}{|z_j - \nu_i|}, \qquad i \in I_n.$$

Ukoliko su ispunjene nejednakosti

$$\sqrt{1+a_i} > \sqrt{a_i} + \sqrt{b_i} \qquad i \qquad a_i + 2b_i < 1,$$

tada postoji tačno jedna nula polinoma P *u disku sa centrom* ν_i *i poluprečnikom*

$$\frac{a_i + b_i}{1 - b_i}|W_i|. \tag{1.51}$$

Imajući u vidu da je $\varphi(a_i, b_i) = (a_i + b_i)/(1 - b_i)$ po svakoj promenljivoj $(a_i, b_i > 0)$ monotono rastuća funkcija, sledi da je poluprečnik (1.51) manji ukoliko su vrednosti promenljivih a_i i b_i manje.

Poglavlje 2

Garantovana konvergencija

Izbor početnih aproksimacija koje garantuju konvergenciju datog iterativnog metoda od velike je važnosti pri rešavanju nelinearnih jednačina. Prvi odeljak ovog poglavlja ukratko prikazuje koncept R-reda konvergencije uveden od Ortege i Rheinboldta [30], koji je korišćen pri analizi metoda u petom poglavlju. Smaleova *teorija tačkaste ocene*, prvi put uvedena u [47] za Newtonov metod, odnosi se na domene konvergencije i početne uslove za rešavanje jednačina oblika $f(z) = 0$. U uslovima se koristi samo informacija o funkciji f u početnoj tački $\boldsymbol{z}^{(0)}$. Smaleov rezultat, o kome će biti reči u drugom odeljku, poboljšali su X. Wang i Han [53]. Rad koji su oni započeli Curry [10] i Kim [24] proširili su na još neke iterativne metode višeg reda, dok je generalizaciju izvršio Chen [9]. Dva principa, koji se koriste za analizu i utvrđivanje dovoljnih uslova konvergencije simultanih metoda za rešavanje algebarskih jednačina, predložio je M. Petković sa svojim koautorima u nedavno objavljenim radovima. Princip korekcija opisan je u trećem, dok je princip konvergentnih nizova razmatran u četvrtom odeljku.

2.1 Red konvergencije iterativnih metoda

U ovom odeljku biće reči o konceptu konvergencije koji su uveli Ortega i Rheinboldt [30]. Naime, oni su u svojoj knjizi ukazali na nedostatke klasične definicije reda konvergencije. Pored toga, klasična definicija je u nekim slučajevima neprimenjiva, npr. kod metoda sa Gauss-Seidelovim pristupom.

Najpre ćemo definisati *korenski faktor konvergencije* ili kraće $R - faktor$ posmatranog niza.

Definicija 2.1 Neka je niz $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}$ dati niz u $\mathbb{R}^n$ čija je granična vrednost $\boldsymbol{a}$. Tada se broj definisan sa

$$R_p(\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}) = \begin{cases} \limsup\limits_{k\to\infty} ||\{\boldsymbol{u}^{(k)}\} - \boldsymbol{a}||^{1/k}, & \textit{ako je } p = 1, \\ \\ \limsup\limits_{k\to\infty} ||\{\boldsymbol{u}^{(k)}\} - \boldsymbol{a}||^{1/p^k}, & \textit{ako je } p > 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

naziva korenskim faktorom konvergencije, odnosno kraće R-faktorom niza $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}$. Neka je IM iterativni metod sa graničnom tačkom $\boldsymbol{a}$ i neka je $C(IM, \boldsymbol{a})$ skup svih nizova koji konvergiraju ka $\boldsymbol{a}$ i koji su generisani primenom IM. Tada je veličina

$$R_p(IM, \boldsymbol{a}) = \sup\{R_p(\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}) : \ \{\boldsymbol{u}^{(k)}\} \in C(IP, \boldsymbol{a})\} \quad (1 \le p < +\infty)$$

R-faktor iterativnog metoda IM u tački $\boldsymbol{a}$.

Podsećamo, ako niz $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}$ konvergira ka tački $\boldsymbol{a}$, tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$0 \le ||\{\boldsymbol{u}^{(k)}\} - \boldsymbol{a}|| \le 1 \quad \text{za svako } k \ge k_0.$$

Odavde dolazimo do zaključka da je

$$0 \le R_p(\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}) \le 1 \quad \text{za svako } p \ge 1.$$

Ortega i Rheinboldt su u [30], između ostalog, dokazali i sledeće dve teoreme koje ovde samo navodimo.

Teorema 2.1 *Neka je $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}$ proizvoljan niz u $\mathbb{R}^n$ koji konvergira ka tački $\boldsymbol{a}$. Faktor $R_p(\{\boldsymbol{u}^{(k)}\})$ ne zavisi od izbora norme u $\mathbb{R}^n$ ni za jedno $p \in [1, +\infty)$. R-faktor $R(IM, \boldsymbol{a})$ iterativnog metoda je, takođe, nezavisan od izbora norme.*

Teorema 2.2 *Neka je IM iterativni metod sa graničnom tačkom $\boldsymbol{a}$. Tada važi jedno od sledećih tvrđenja:*

a) $R_p(IM, \boldsymbol{a}) = 0$ *za svako* $p \in [1, +\infty)$*;*

b) $R_p(IM, \boldsymbol{a}) = 1$ *za svako* $p \in [1, +\infty)$*;*

c) postoji $p_0 \in [1, +\infty)$ *takvo da je* $R_p(IM, \boldsymbol{a}) = 0$ *za svako* $p \in [1, p_0)$ *i* $R_p(IM, \boldsymbol{a}) = 1$ *za svako* $p \in [p_0, +\infty)$.

Kao definiciju R-reda konvergencije iterativnog metoda usvajamo:

Definicija 2.2 R-red konvergencije iterativnog metoda u tački $\boldsymbol{a}$ je veličina

$$O_R(IM, \boldsymbol{a}) = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } R_p(IM, \boldsymbol{a}) = 0 \text{ za svako } p \in [1, +\infty), \\ \\ \inf\{p \in [1, +\infty) : \ R_p(IM, \boldsymbol{a}) = 1\}, & \text{ostali slučajevi.} \end{cases}$$

Naglašavamo da na osnovu prethodnih teorema ovako definisan R-red konvergencije iterativnog metoda IM ne zavisi od izbora norme u $\mathbb{R}^n$.

Primetimo i sledeće:

- Ako je $R_p(IM, \boldsymbol{a}) < 1$ za neko $p \in [1, +\infty)$, tada je R-red konvergencije jednak najmanje p, odnosno važi $O_R(IM, \boldsymbol{a}) \ge p$,
- Ako je $R_p(IM, \boldsymbol{a}) > 0$ za neko $p \in [1, +\infty)$, tada je R-red konvergencije jednak najviše p, tj. važi $O_R(IM, \boldsymbol{a}) \le p$,

- Ako je $0 < R_p(IM, \boldsymbol{a}) < 1$ za neko $p \in [1, +\infty)$, tada je $O_R(IM, \boldsymbol{a}) = p$.

Metod IM ima R-linearnu konvergenciju u tački $\boldsymbol{a}$ ukoliko je $0 < R_1(IM, \boldsymbol{a}) < 1$. Kada je $R_1(IM, \boldsymbol{a}) = 0$ konvergencija je R-podlinearna, dok ako je $R_1(IM, \boldsymbol{a}) = 1$, konvergencija je R-nadlinearna.

Brzinu konvergencije dva iterativna metoda IM_1 i IM_2 upoređujemo po sledećem kriterijumu:
1) Najpre upoređujemo R-redove, odnosno veličine $O_R(IM_1, \boldsymbol{a})$ i $O_R(IM_2, \boldsymbol{a})$, pri čemu je, svakako, brži onaj proces koji ima veći R-red.
2) Ukoliko je $O_R(IM_1, \boldsymbol{a}) = O_R(IM_1, \boldsymbol{a}) = p$, tada upoređujemo R-faktore, pri čemu je brži onaj proces koji ima manji R-faktor. Primera radi, metod IM_1 je brži od metoda IM_2 ako je $R_p(IM_1, \boldsymbol{a}) < R_p(IM_2, \boldsymbol{a})$.

U cilju određivanja R-reda konvergencije novog intervalnog iterativnog metoda u petom poglavlju (5.29), navešćemo dva rezultata (bez dokaza) iz teorije iterativnih procesa.

Lema 2.1 *Neka je $\{K_m\}$ pozitivan ograničen niz i neka je $\{e_m\}$ niz pozitivnih brojeva koji teže nuli, takvih da je $e_{m+2} \le K_m e_{m+1}^p e_m^q$, gde su p i q prirodni brojevi. Tada je R-red niza $\{e_m\}$ najmanje $\left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right)/2$.*

Lema 2.2 *Neka su data rekurzivne relacije za grešku oblika*

$$\epsilon_i^{(m+1)} \le c_i \prod_{j=1}^{k} (\epsilon_j^{(m)})^{f_{ij}}, \qquad (i = 1, \ldots, k;\ m \ge 0), \tag{2.2}$$

gde je $f_{ij} \ge 0$, $c_i > 0$, $1 \le i, j \le k$. Formirajmo matricu eksponenata koji se pojavljuju u (2.2) i označimo je sa F, tj. $F = [f_{ij}]_{k \times k}$. Ako nenegativna matrica F ima spektralni radijus $\sigma(F) > 1$ i odgovarajući sopstveni vektor $\boldsymbol{x}_\sigma > 0$, tada svi nizovi $\{\epsilon_i^{(m)}\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ imaju R-red konvergencije jednak najmanje $\sigma(F)$.

Napomenimo da se matrica $F_k = [f_{ij}]$ u literaturi često naziva R-matricom.

2.2 Smaleova teorija i aproksimativne nule

Prilikom primene nekog numeričkog metoda za rešavanje jednačine oblika $f(z) = 0$, važno je izabrati početne vrednosti tako da je konvergencija obezbeđena. Naročito je povoljno ako je konvergenciju posmatranog iterativnog metoda moguće, za izabrane početne vrednosti, proveriti korišćenjem nekog uslova. Neophodno je da uslov ne sadrži nepoznate veličine (npr. tačne nule funkcije), već samo početne aproksimacije i, eventualno, vrednosti funkcije u nekim tačkama. Tradicionalan pristup ovom problemu zasnovan je na asimptotskoj analizi konvergencije, koja upravo sadrži nepoznate parametre (nule funkcije ili neke konstante). Ovi rezultati imaju samo teorijski značaj i služe samo za uvid u kvalitativna svojstva konvergencije nekog postupka. Svakako, cilj je obezbediti i praktično primenljive rezultate gde uslovi koji obezbeđuju, tj. garantuju konvergenciju zavise od dostupnih podataka.

Modifikacije Newtonovog metoda često se koriste za rešavanje jednačina i sistema jednačina. Podsećamo, za jednačinu $f(z)=0$ Newtonov metod glasi

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{f(z^{(m)})}{f'(z^{(m)})}, \quad m = 0, 1, \dots\ , \tag{2.3}$$

i ukoliko je početna vrednost $z^{(0)}$ dobro izabrana niz $\{z^{(m)}\}$ je kvadratno konvergentan.

Generalno, oblast konvergencije nije poznata i nije jednostavno odrediti uslove koji garantuju konvergenciju. Zbog toga su se mnogi matematičari bavili rešavanjem ovog problema. U XIX veku konvergenciju Newtonovog metoda za rešavanje jednačine sa jednom nepoznatom proučavao je J. B. J. Fourier. Godine 1948. L. Kantorovič je dao veliki doprinos analizi konvergencije Newtonovog metoda u Banachovim prostorima i to je bio podstrek za mnoge nove radove u ovoj oblasti. Kantorovičev princip koristi pretpostavke koje treba da budu ispunjene u svakoj tački oblasti konvergencije. Nasuprot tome, Smale je u [47] i [48], gotovo jedan vek nakon Fourierovog rada iz ove oblasti, predložio jedan novi pristup za dokazivanje konvergencije Newtonovog postupka u Banachovom prostoru, gde se uslovi posmatraju samo u jednoj tački – početnoj aproksimaciji.

Aproksimativna nula je početna vrednost za koju posmatrani iterativni metod brzo konvergira ka rešenju date jednačine i ovaj pojam je Smale definisao na sledeći način [48]:

Definicija 2.3 Tačka $z_0 \in \mathbb{C}$ je aproksimativna nula funkcije f za iterativni metod reda konvergencije r oblika

$$z^{(m+1)} = \Phi_r(z^{(m)}), \quad m = 0, 1, \dots\ ,$$

ako postoji pozitivan realan broj $p < 1$ tako da je ispunjen uslov

$$\left|\frac{f(z^{(m)})}{f'(z^{(m)})}\right| \le p^{r^m - 1} \left|\frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})}\right|, \quad m = 0, 1, \dots\ .$$

Uvedimo oznaku

$$\gamma_f(z) = \sup_{r>1} \left|\frac{f^{(r)}(z)}{r!f'(z)}\right|^{1/(r-1)}.$$

Značajnu ulogu u generisanju testa za aproksimativne nule ima funkcija $\alpha(z, f)$ definisana pomoću

$$\alpha(z, f) = \left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| \gamma_f(z).$$

Kao što je već pomenuto, Smaleova teorija pri utvrđivanju konvergencije Newtonovog metoda koristi samo podatak o funkciji f u tački $z^{(0)}$, dok je Kantorovič koristio uslove na celoj oblasti. Sledeća teorema predstavlja osnovni rezultat Smaleove teorije:

Teorema 2.3 *Ako je uslov*

$$\alpha(z^{(0)}, f) < \alpha_0 \cong 0.130707 \tag{2.4}$$

ispunjen, onda je Newtonov metod (2.3) *dobro definisan i važi*

$$|z^{(m+1)} - z^{(m)}| \leq p^{2^m - 1}|z^{(1)} - z^{(0)}|, \quad m = 0, 1, \dots , \tag{2.5}$$

pri čemu je p određeno sa

$$p = \frac{\alpha(z^{(0)}, f)}{\psi(\alpha(z^{(0)}, f))^2}, \qquad \psi(t) = 2t^2 - 4t + 1.$$

Ocena (2.5) direktno sledi iz (2.3) i ukazuje na kvadratnu konvergenciju iterativnog procesa, kada je početna aproksimacija $z^{(0)}$ dobro izabrana.

Kim [24] je u svojim α-testovima za jednačinu sa jednom nepoznatom dobila najpre rezultat $\alpha_0 = 1/54$, a zatim $\alpha_0 = 1/48$. Smaleov rezultat su poboljšali Wang i Han [53]. Oni su došli do rezultata

$$\alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2} \cong 0.171573 > 0.130707,$$

koji su kasnije dalje poboljšali Wang i Zhao [51].

Generalizaciju ovog pristupa za iterativne metode sa kvadratnom konvergencijom izvršio je Chen [9]. U specijalnom slučaju, za Newtonov postupak se dobija rezultat dat u sledećoj teoremi.

Teorema 2.4 *Ako je za $z^{(0)}$ ispunjeno*

$$(\gamma_f(z^{(0)}) + 1)\left|\frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})}\right| < 0.1423,$$

tada je $z^{(0)}$ aproksimativna nula funkcije f za Newtonov postupak.

Za postupke višeg reda (> 2) generalizaciju Smaleovih rezultata dao je Curry [10]. Specijalno, Curry je razmatrao Euler-Čebiševljev i Halleyev metod koji se često primenjuju za rešavanje jednačine oblika $f(z) = 0$. Ovi iterativni postupci su kubno konvergentni. Podsećamo da su ovi metodi dati formulama:

- Euler-Čebiševljev metod:

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{f(z^{(m)})}{f'(z^{(m)})}\left(1 + \frac{f(z^{(m)}f''(z^{(m)})}{2f'(z^{(m)})^2}\right), \quad m = 0, 1, \dots , \tag{2.6}$$

- Halleyev metod:

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{f(z^{(m)})}{f'(z^{(m)})}\frac{1}{1 - \dfrac{f(z^{(m)}f''(z^{(m)})}{2f'(z^{(m)})^2}}, \quad m = 0, 1, \dots . \tag{2.7}$$

Curry je u svom radu [10] dokazao sledeće dve teoreme koje se odnose na konvergenciju i aproksimativne nule ovih postupaka.

Teorema 2.5 *Ako je za početnu aproksimaciju* $z^{(0)}$ *ispunjen uslov*

$$\alpha(z^{(0)}, f) < \alpha_0 < 0.11565,$$

tada je Euler-Čebiševljev metod (2.6) *konvergentan i važi*

$$\left|\frac{f(z^{(m)})}{f'(z^{(m)})}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} \left|\frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})}\right|, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Teorema 2.6 *Ako je za početnu aproksimaciju* $z^{(0)}$ *ispunjen uslov*

$$\alpha(z^{(0)}, f) < \alpha_0 < 0.11283,$$

tada je $z^{(0)}$ *aproksimativna nula Halleyevog metoda* (2.7) *i važi*

$$\left|\frac{f(z^{(m)})}{f'(z^{(m)})}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} \left|\frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})}\right|, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Ukoliko je funkcija $f(z)$ moničan algebarski polinom stepena n ($n \geq 3$), odnosno

$$f(z) \equiv P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C},$$

poželjno je da početni uslovi budu izraženi u funkciji koeficijenata polinoma

$$\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}),$$

njegovog stepena n i početnih aproksimacija

$$\boldsymbol{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}),$$

nula polinoma $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Ovakve uslove možemo predstaviti pomoću nejednakosti

$$\Phi(\boldsymbol{a}, n, \boldsymbol{z}^{(0)}) \leq 0. \tag{2.8}$$

Raspored nula date funkcije u velikoj meri utiče na konvergenciju primenjenog iterativnog metoda za nalaženje nula. Naime, ako su nule relativno bliske, odnosno ako se pojavljuju grozdovi nula, većina numeričkih algoritama pokazuje loše karakteristike (tj. ili je konvergencija usporena ili proces uopšte ne konvergira). S druge strane, za dobro razdvojene nule karakteristike konvergencije su za većinu metoda dobre. Ova činjenica sugeriše da uslov (2.8) treba da sadrži meru razdvojenosti nula ili početnih aproksimacija i bliskost početnih aproksimacija. Iz razloga što su tačne nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nepoznate, kao meru razdvojenosti (separacije) uzimamo minimalno rastojanje između početnih aproksimacija, tj.

$$d^{(0)} = \min_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}|. \tag{2.9}$$

Bliskost početnih aproksimacija takođe utiče na konvergenciju iterativnog metoda i kao meru te bliskosti uzimamo funkciju

$$l(z) = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|,$$

pri čemu je $Q(z) \neq 0$ kada je z u okolini nule ζ. U slučaju prostih nula posmatranog polinoma P, moguće je $Q(z)$ izabrati na više načina, na primer:

- $Q(z) = P'(z)$,
- $Q(z) = \prod\limits_{z \neq z_j}^{n} (z - z_j^{(0)})$,
- $|Q(z)| = |P'(z)|^{-1} \sup\limits_{k>1} \left| \dfrac{P^{(k)}(z)}{k!P'(z)} \right|^{1/(k-1)}$.

Na osnovu klase uslova date sa (2.8), koristeći najmanje rastojanje između početnih aproksimacija $d^{(0)}$ i funkciju $l(z)$, dobijamo praktično primenljivu klasu uslova oblika

$$\varphi(d^{(0)}, l^{(0)}, n) \leq 0, \tag{2.10}$$

gde $l^{(0)}$ zavisi od početnih aproksimacija $\boldsymbol{z}^{(0)}$.

Podsećamo da vrednost Weierstrassove korekcije za i-tu aproksimaciju nule u interativnom koraku m izračunavamo po formuli

$$W_i^{(m)} = \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod\limits_{j \neq i} (z_i^{(m)} - z_j^{(m)})}, \quad i \in I_n := \{1, \dots, n\}, \quad m = 0, 1, \dots \,. \tag{2.11}$$

Pri analizi konvergencije često koristimo maksimalnu vrednost Weierstrassove korekcije u m-tom koraku,

$$w^{(m)} = \max_{1 \leq i \leq n} |W_i^{(m)}|, \quad m = 0, 1, \dots \,. \tag{2.12}$$

U skladu sa rezultatima koji su predstavljeni u [35]–[40], [42], [45], [51], [55], pogodni početni uslovi koji garantuju konvergenciju iterativnih metoda za simultano određivanje nula polinoma mogu biti iskazani koristeći minimalno rastojanje $d^{(0)}$ i maksimalnu vrednost Weierstrassove korekcije $w^{(0)}$ za početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$, tj.

$$w^{(0)} \leq c_n d^{(0)}, \tag{2.13}$$

pri čemu je c_n veličina koja zavisi samo od stepena polinoma, n. Očigledno da su uslovi oblika (2.13) specijalan slučaj šire klase uslova (2.10). U novije vreme, ulažu se napori da se veličina c_n (tzv. n-faktor) poveća i samim tim uslovi koji garantuju konvergenciju oslabe.

Teoreme, koje omogućavaju veoma jednostavnu proveru sigurne konvergencije prilično široke klase iterativnih metoda za simultano određivanje nula polinoma pod datim početnim uslovom oblika (2.13), navedene su u poslednja dva odeljka ovog poglavlja.

2.3 Garantovana konvergencija: princip korekcija

Neka je P algebarski polinom stepena n sa kompleksnim prostim nulama. Većina simultanih iterativnih metoda za aproksimaciju prostih nula polinoma P može biti izražena u obliku

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - C_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \quad (i \in I_n := \{1, \ldots, n\};\ m = 0, 1, \ldots), \tag{2.14}$$

gde su $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$ različite aproksimacije prostih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, respektivno, dobijene u m-tom iterativnom koraku. Pri tom podrazumevamo da su početne aproksimacije nula $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ date.

Formula (2.14) formira n nizova aproksimacija $\{z_i^{(m)}\}$, $i \in I_n$ koji pod određenim uslovima konvergiraju, tj.

$$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i, \quad i \in I_n. \tag{2.15}$$

Cilj ovog i sledećeg odeljka je prikazivanje dva principa za utvđivanje dovoljnih uslova za konvergenciju nizova $\{z_i^{(m)}\}$, $i \in I_n$. U nastavku izraz

$$C_i^{(m)} = C_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots$$

ćemo zvati *iterativna korekcija* ili jednostavno *korekcija*.

Razmatraćemo korekcije $C_i^{(m)}$ $(i \in I_n;\ m = 0, 1, \ldots)$ koje imaju sledeće osobine:

$$\begin{aligned}
&1^\circ \quad C_i^{(m)} = \frac{P(z_i^{(m)})}{F_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)})},\\
&2^\circ \quad F_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \neq 0,\\
&3^\circ \quad F_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \neq 0,\\
&4^\circ \quad F_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \text{ je neprekidna funkcija u } \mathbb{C}^n.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ukoliko se dokaže postojanje međusobno različitih graničnih vrednosti (2.15), onda su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ proste nule polinoma P. Ovo tvrđenje neposredno sledi iz (2.14) i (2.16):

$$\begin{aligned}
P(\zeta_i) &= F_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \cdot C_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\\
&= \lim_{m\to\infty} F_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \cdot \lim_{m\to\infty} C_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)})\\
&= \lim_{m\to\infty} F_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \cdot \lim_{m\to\infty} \left(z_i^{(m)} - z_i^{(m+1)}\right)\\
&= 0, \qquad i \in I_n.
\end{aligned}$$

U dokazu teoreme o konvergenciji koja zauzima centralno mesto u ovom odeljku, koristićemo sledeću lemu, koju navodimo bez dokaza:

Lema 2.3 *Ako su funkcija $\sigma_m(\delta)$ i $g(\delta)$ definisane sa*

$$\sigma_m(\delta) = \sum_{k=0}^{m} \delta^k + \delta^m, \quad \delta \in (0,1), \ m = 1, 2, \ldots$$

i

$$g(\delta) = \begin{cases} 1 + 2\delta, & 0 < \delta \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{1-\delta}, & \dfrac{1}{2} < \delta < 1, \end{cases} \tag{2.17}$$

tada važi $\sigma_m(\delta) \leq g(\delta)$.

Koristeći ideju izloženu u [35], u radu [38] dokazana je sledeća teorema o konvergenciji:

Teorema 2.7 *Neka je dat iterativni postupak* (2.14)*, pri čemu korekcija $C_i^{(m)}$ zadovoljava pretpostavke* (2.16) *i neka su date međusobno različite početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$. Ako za neko $\gamma \in (0,1)$ važi*

$$(i) \quad |C_i^{(m+1)}| < \gamma |C_i^{(m)}|, \qquad m = 0, 1, \ldots\ ,$$

$$(ii) \quad |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| > g(\gamma)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|), \quad i \neq j, \quad i, j \in I_n,$$

tada je iterativni proces (2.14) *konvergentan.*

Dokaz. Uočimo diskove

$$D_i^{(m)} = \left\{ z_i^{(m+1)};\ |C_i^{(m)}| \right\}, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \ldots\ ,$$

gde je $z_i^{(m+1)}$ određeno iterativnom formulom (2.14). Dalje je

$$\begin{aligned} D_i^{(m)} &= \left\{ z_i^{(m)} - C_i^{(m)};\ |C_i^{(m)}| \right\} \\ &= \left\{ z_i^{(m-1)} - C_i^{(m-1)} - C_i^{(m)};\ |C_i^{(m)}| \right\} \\ &\ \ \vdots \\ &= \left\{ z_i^{(0)} - C_i^{(0)} - \ldots - C_i^{(m)};\ |C_i^{(m)}| \right\} \subset \left\{ z_i^{(0)};\ r_i^{(m)} \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu je poluprečnik $r_i^{(m)}$ definisan sa

$$r_i^{(m)} = |C_i^{(0)}| + \ldots + |C_i^{(m-1)}| + 2|C_i^{(m)}|.$$

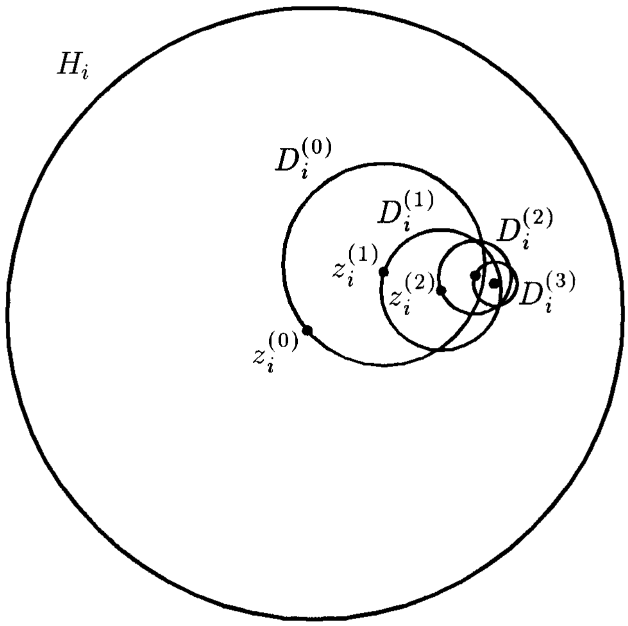
Imajući u vidu (i) zaključujemo da je $|C_i^{(k)}| \leq \gamma^k |C_i^{(0)}|,\ k = 1, 2, \ldots$, tako da je

$$r_i^{(m)} \leq |C_i^{(0)}|(1 + \gamma + \ldots + \gamma^m + \gamma^m) < g(\gamma)|C_i^{(0)}|,$$

gde je $g(\gamma)$ definisano sa (2.17). Dakle, za svako $i \in I_n$ imamo

$$D_i^{(m)} \subset H_i := \left\{ z_i^{(0)};\ g(\gamma)|C_i^{(0)}| \right\},$$

odnosno, disk H_i sadrži sve diskove $D_i^{(m)}$ $(m = 0, 1, \ldots)$, što je ilustrovano na slici 2.1.



Slika 2.1: Inkluzivni disk H_i sadrži sve diskove $D_i^{(m)}$ $(m = 0, 1, \ldots)$

Na osnovu (ii) dolazimo do

$$\begin{aligned}|\text{mid } H_i - \text{mid } H_j| &= |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \\ &> g(\gamma)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|) = \text{rad } H_i + \text{rad } H_j, \quad i \neq j,\ i, j \in I_n.\end{aligned}$$

Koristeći (1.27) zaključujemo da su diskovi H_i, $i \in I_n$ uzajamno disjunktni. Drugim rečima, polazeći od međusobno različitih početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ i primenjujući iterativni postupak (2.14), dobijamo da su u svakom koraku aproksimacije $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots$ međusobno različite.

Na osnovu (2.14) i (i) imamo

$$|z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}| = |C_i^{(m)}| \leq \gamma |C_i^{(m-1)}| \leq \ldots \leq \gamma^m |C_i^{(0)}|$$

i

$$|z_i^{(m+p)} - z_i^{(m)}| \leq \frac{\gamma^m}{1-\gamma}|C_i^{(0)}|, \quad p = 1, 2, \dots .$$

Pošto je $|\gamma| < 1$, nizovi $\{z_i^{(m)}\}$ $(i \in I_n,\ m = 0, 1, \dots)$ su Cauchyevi, što znači da su konvergentni. Granične vrednosti (2.15) su različite, jer su diskovi koji ih sadrže uzajamno disjunktni. Na osnovu osobina (2.16) sledi da svaki od nizova $\{z_i^{(m)}\}$ konvergira ka jednoj i samo jednoj nuli polinoma P, čime je teorema dokazana. ∎

Potrebno je naglasiti da je klasa iterativnih metoda razmatrana u teoremi 2.7 prilično široka i da uključuje najčešće korišćene metode za simultano nalaženje nula polinoma. Ova teorema primenjena je u odeljku 4.1 na novu jednoparametarsku familiju simultanih metoda za nalaženje prostih kompleksnih nula polinoma, koja je nedavno predložena u [21] i ukratko opisana u [45]. Za ovu familiju metoda ustanovljen je praktično primenljiv početni uslov koji omogućava sigurnu konvergenciju.

Princip korekcija koristi početne uslove oblika (2.13) i može se predstaviti algoritmom koji se sastoji od četiri koraka:

Algoritam 2.1

- *Korak 1.*

  Za odgovarajuću vrednost konstante c_n, koja zadovoljava (2.13), *određuju se konstante μ_n, λ_n i ν_n tako da je ispunjeno:*

  $$\mu_n < 1, \qquad g(\mu_n) < \frac{1}{2\lambda_n}, \qquad \nu_n \leq 1 - 2\lambda_n. \tag{2.18}$$

- *Korak 2.*

  Pokazuje se da važi

  $$w^{(m)} \leq c_n d^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots \tag{2.19}$$

  i

  $$|W_i^{(m+1)}| \leq \nu_n |W_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots , \tag{2.20}$$

  pri čemu je minimalno rastojanje u m-tom iterativnom koraku, $d^{(m)}$, definisano sa

  $$d^{(m)} = \min_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} |z_i^{(m)} - z_j^{(m)}|, \quad m = 0, 1, \dots , \tag{2.21}$$

  dok je Weierstrassova korekcija $W_i^{(m)}$ data sa (2.11).

- *Korak 3.*

  Dokazuje se da važi uslov (i) teoreme 2.7

  $$|C_i^{(m+1)}| \leq \mu_n |C_i^{(m)}|, \quad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots \tag{2.22}$$

  i

  $$\frac{c_n}{\lambda_n}|C_i^{(0)}| \leq |W_i^{(0)}|, \quad i \in I_n. \tag{2.23}$$

- <u>*Korak 4.*</u>

  Na osnovu (2.23) *sledi*

$$\frac{1}{\lambda_n}|C_i^{(0)}| \le \frac{|W_i^{(0)}|}{c_n} \le \frac{w^{(0)}}{c_n} \le d^{(0)}, \quad i \in I_n,$$

  odakle se pomoću (2.18) *dobija da je za svako* $i \ne j,\ i,j \in I_n$ *ispunjen uslov* (*ii*) *teoreme* 2.7

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \ge d^{(0)} \ge \frac{w^{(0)}}{c_n} \ge \frac{1}{2\lambda_n}(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|)$$

$$> g(\mu_n)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|)$$

  što zapravo znači da su diskovi

$$H_i = \left\{ z_i^{(0)};\ g(\mu_n)|C_i^{(0)}| \right\}, \qquad i \in I_n,$$

  uzajamno disjunktni. Najzad, stavljajući $\gamma = \mu_n$, *konvergencija posmatranog iterativnog metoda oblika* (2.14) *sledi kao neposredna posledica teoreme* 2.7.

Dakle, za svaki konkretan postupak treba pokazati da na osnovu uslova (2.13) slede relacije (2.19)-(2.23) sa konstantama μ_n, λ_n i ν_n za koje su ispunjeni uslovi (2.18). Optimizacijom izbora konstante c_n dobijaju se oslabljeni uslovi za konvergenciju iterativnih postupaka. Ovaj princip analize konvergencije primenjen je u 4. poglavlju.

2.4 Garantovana konvergencija: princip konvergentnih nizova

Neka je dat polinom P stepena n sa prostim kompleksnim nulama $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ i neka su $z_1^{(m)},\ldots,z_n^{(m)}$ tekuće aproksimacije tih nula u m-tom koraku nekog iterativnog procesa za simultano određivanje nula algebarskog polinoma. Za razliku od prethodnog odeljka, ovde ćemo analizirati početne uslove za garantovanu konvergenciju simultanih metoda primenom principa konvergentih nizova.

Analiziraćemo konvergenciju nizova $\{a_i^{(m)}\}$, definisanih sa

$$a_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad i \in I_n := \{1,\ldots,n\}, \quad m = 0,1,\ldots\ ,$$

pri čemu ćemo i dalje koristiti početni uslov (2.13). Navodimo najpre dve teoreme bez dokaza (detalji se mogu naći u monografiji [43]).

Teorema 2.8 *Neka je* $n \ge 3$ *i*

$$c_n = \frac{1}{An+B}, \quad A \ge 2, \quad B \ge (2-A)n$$

i neka je, za ovako izabranu konstantu c_n, uslov (2.13) *ispunjen. Tada su diskovi*

$$D_i := \left\{ z_i^{(0)} - W_i^{(0)};\ \frac{n}{(A-1)n+B}|W_i^{(0)}| \right\}, \quad i \in I_n,$$

uzajamno disjunktni i svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P.

Teorema 2.9 *Pod pretpostavkama teoreme* 2.8 *diskovi*

$$D_i^* := \left\{ z_i^{(0)};\ \frac{An+B}{(A-1)n+B}|W_i^{(0)}| \right\}, \quad i \in I_n,$$

su uzajamno disjunktni i svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P.

Bez obzira na činjenicu da je poluprečnik svakog od diskova D_i^* veći od poluprečnika odgovarajućeg diska D_i, računanje sa diskom D_i^* je jednostavnije. Iz tog razloga, u mnogim primenama koristi se disk D_i^* za ocenu odstupanja početne aproksimacije $z_i^{(0)}$ od tačne vrednosti nule ζ_i.

Na osnovu prethodnog, postupak analize konvergencije može se predstaviti algoritmom koji se sastoji od pet koraka:

Algoritam 2.2

- *Korak 1.*

  Konstantu c_n izaberemo tako da bude oblika

  $$c_n = \frac{1}{An+B}$$

  i da diskovi

  $$Z_i^{(0)} = \left\{ z_i^{(0)};\ \rho|W_i^{(0)}| \right\}, \quad \rho = \frac{1}{1-nc_n} = \frac{An+B}{(A-1)n+B}, \quad i \in I_n,$$

  budu međusobno disjunktni. Prema teoremi 2.9 *dovoljan uslov za to je da važi $A \geq 2$, $B \geq (2-A)n$. Ako se konstanta c_n izabere tako da uslovi teoreme* 2.9 *budu ispunjeni, tada svaki od diskova $Z_i^{(0)}$, $i \in I_n$ zadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P. Direktno dobijamo*

  $$|a_i^{(0)}| = |z_i^{(0)} - \zeta_i| \leq \rho|W_i^{(0)}|, \quad i \in I_n. \tag{2.24}$$

- *Korak 2.*

  Dokazujemo da važe sledeće nejednakosti

  $$d^{(m)} \leq \alpha_n d^{(m+1)} \quad i \quad |W_i^{(m+1)}| \leq \beta_n |W_i^{(m)}|, \qquad i \in I_n,\ m = 0, 1, \dots ,$$

  pri čemu su minimalno rastojanje u m-tom iterativnom koraku, $d^{(m)}$ i Weierstrassova korekcija $W_i^{(m)}$ definisani sa (2.21) *i* (2.11), *respektivno. Konstantu c_n treba izabrati tako da važi implikacija*

  $$w^{(m)} \leq c_n d^{(m)} \Longrightarrow w^{(m+1)} \leq c_n d^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, \dots , \tag{2.25}$$

što će očigledno biti ispunjeno ukoliko je $\alpha_n\beta_n < 1$. *Relacija* (2.25) *od vitalnog je značaja, jer omogućava primenu principa matematičke indukcije pri dokazivanju teorema o konvergenciji.*

- <u>*Korak 3.*</u>

  U ovom koraku dokazujemo da za $i \in I_n,\ m = 0, 1, \dots$ *važe nejednakosti*

$$|a_i^{(m+1)}| \le \frac{\gamma}{(d^{(m)})^{p+qr-1}} |a_i^{(m)}|^p \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_j^{(m)}|^q \right)^r, \quad p, q, r \in \mathbb{N},\ \gamma \in \mathbb{R}^+. \tag{2.26}$$

- <u>*Korak 4.*</u>

  Uvodimo novu promenljivu $t_i^{(m)}$ *određenu sa*

$$t_i^{(m)} = \frac{|a_i^{(m)}|}{d^{(m)}} \left(\frac{(n-1)^r \gamma}{1 - 2\lambda_n} \right)^{1/(p+qr-1)}, \quad i \in I_n,\ m = 0, 1, \dots ,$$

  pri čemu γ *i* λ_n *zavise od konkretnog iterativnog metoda koji se analizira i važi*

$$|z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}| \le \lambda_n d^{(m)}.$$

  Koristeći nejednakost (2.26), *pokazujemo da je*

$$t_i^{(m+1)} \le \frac{(t_i^{(m)})^q}{(n-1)^r} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (t_j^{(m)})^q \right)^r .$$

- <u>*Korak 5.*</u>

  U poslednjem koraku pokazujemo da je

$$\lim_{m\to\infty} t_i^{(m)} = 0, \qquad i \in I_n.$$

  Ovo znači da svi nizovi $\{|a_i^{(m)}|\}$ $(i \in I_n,\ m = 0, 1, \dots)$ *teže ka nuli, drugim rečima, dolazimo do*

$$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i, \qquad i \in I_n.$$

  S obzirom na (2.26), *red konvergencije nizova* $\{t_i^{(m)}\}$ *i* $\{a_i^{(m)}\}$ *jednak je* $p+qr$.

Napomenimo još da se u analizi konvergencije iterativnih postupaka pretpostavlja da su greške

$$a_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \qquad i \in I_n, \quad m = 0, 1, \dots ,$$

različite od nule za konačno m, što je u praksi obično slučaj. U specijalnoj situaciji, ako je $a_j^{(m')} = 0$ u iterativnom koraku m' za vrednosti indeksa $j \in \{j_1, \dots, j_k\} \subset I_n$, iterativni postupak primenjujemo samo za $i \in I_n \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$. Očigledno, vrednosti $z_{j_1}^{(m)}, \dots, z_{j_k}^{(m)}$ jednake su nulama $\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_k}$. Ukoliko nizovi $\{a_i^{(m)}\}$, $i \in I_n \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$ konvergiraju sa redom l, tada je i red konvergencije nizova $\{a_{j_1}^{(m)}\}, \dots,$ $\{a_{j_k}^{(m)}\}$ jednak najmanje l.

Kao što vidimo, pri korišćenju principa konvergentnih nizova za dokazivanje konvergencije iterativnih procesa, imamo slobodu da odaberemo konstantu c_n koja se javlja u uslovu (2.13). Teoreme 2.8 i 2.9 ukazuju da male vrednosti konstante c_n uzrokuju male poluprečnike inkluzivnih diskova. U tom slučaju, uslov (2.13) je ispunjen ako je $w^{(0)}$ jako malo, čime se pooštravaju zahtevi koji se odnose na bliskost početnih aproksimacija odgovarajućim nulama. Činjenica da možemo smanjiti poluprečnike diskova izborom male vrednosti za c_n ne donosi nikakvu prednost pri praktičnoj realizaciji, jer tada uslov (2.13), zapravo, postaje stroži. Zaključak je da treba izabrati konstantu c_n tako da ima što veću vrednost, odnosno, da uslov za sigurnu konvergenciju bude što slabiji.

Poglavlje 3

Iterativni metodi korenskog tipa

U ovom poglavlju, najpre dajemo pregled nekih klasičnih metoda korenskog tipa koji imaju i istorijski značaj, a zatim razmatramo Hansen-Patrickovu familiju simultanih metoda, koja je takođe korenskog tipa. Napomenimo da se primenom definicije k-tog korena diska formiraju intervalni metodi za simultanu inkluziju nula polinoma, o kojima će biti reči u petom poglavlju.

3.1 Klasični metodi korenskog tipa

Neka je P moničan polinom stepena n ($n \geq 3$)

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j), \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

sa prostim kompleksnim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ i neka su $z_1, \ldots, z_n$ početne aproksimacije nula.

Definišimo funkciju $z \mapsto h_k(z)$ pomoću

$$h_k(z) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{d^k}{dz^k}[\log P(z)], \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.1}$$

Lako se pokazuje da je

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^k},$$

odakle neposredno dobijamo relaciju nepokretne tačke

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\left[h_k(z) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^k} \right]^{1/k}}, \quad i \in I_n, \tag{3.2}$$

gde, kao i ranije, $I_n := \{1, \ldots, n\}$ označava indeksni skup. Dalje, na način koji je korišćen u odeljku 1.2, dobijamo generalizovani iterativni metod za nalaženje nula polinoma

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\left[h_k(z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i-z_j)^k} \right]^{1/k}}, \quad i \in I_n, \tag{3.3}$$

pri čemu je z_i tekuća, a $\hat{z}_i$ nova aproksimacija tražene nule ζ_i.

U monografiji [31] ovaj metod je detaljno razmatran i ovde ćemo navesti samo neke rezultate. Ako je $k > 1$ $(k \in \mathbb{N})$ u relaciji (3.2), postoji problem izbora odgovarajuće vrednosti za k-ti koren (između k vrednosti). Pod pretpostavkom da su izuzev nule ζ_μ sve nule polinoma P poznate i uvođenjem oznaka

$$\theta_\mu = h_k(z) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \mu}}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^k}, \ k \geq 2 \quad \text{i} \quad d = \min_{i\neq j} |z_i - z_j|, \ i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

u monografiji [31] dokazana je sledeća lema

Lema 3.1 *Vrednost k-tog korena koja treba da bude izabrana u* (3.2)*, za $i = \mu$, je ona za koju je uslov*

$$\left| \frac{P'(z_\mu)}{P(z_\mu)} - \theta_\mu^{1/k} \right| \leq \frac{n-1}{d}$$

ispunjen.

Red konvergencije iterativnog metoda (3.3) jednak je $k + 2$.

Specijalno, za $k = 1$ dobijamo klasičan Ehrlich-Aberthov metod (1.13), koji je kubno konvergentan. Za $k = 2$ imamo metod kvadratnog korena (1.19) sa redom konvergencije četiri. Ovaj metod, zapravo, predstavlja modifikaciju metoda Ostrowskog datog formulom (3.15).

Eulerov metod

U nastavku su najpre prikazana dva osnovna iterativna numerička algoritma Eulerovog tipa [14] za simultano nalaženje nula polinoma, a zatim su na osnovu njih izvedena još tri postupka ovog tipa, koji predstavljaju poboljšanja. Ovi metodi poseduju veoma brzu konvergenciju i spadaju u red najefikasnijih simultanih metoda za određivanje nula polinoma.

Neka je f funkcija takva da je f' različito od nule u okolini nule ζ funkcije f i neka je f'' neprekidna funkcija u ovoj okolini. Klasični Eulerov metod glasi

$$\hat{z} = z - \frac{2f(z)}{f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - 2f(z)f''(z)}}, \tag{3.4}$$

gde je $\hat{z}$ nova aproksimacija nule ζ funkcije f. Ovaj metod može biti izveden razvijanjem funkcije f u Taylorov red u okolini nule ζ, odbacivanjem članova trećeg i viših redova i rešavanjem dobijene kvadratne jednačine.

Pod pretpostavkom da je $|f(z)|$ dovoljno malo i koristeći razvoje $\sqrt{1+t} \cong 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}$ i $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ za dovoljno malo $|t|$, iz (3.4) možemo dobiti drugi oblik Eulerove formule

$$\hat{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}\left(1 + \frac{f(z)}{f'(z)} \cdot \frac{f''(z)}{2f'(z)}\right). \tag{3.5}$$

Bodewig [3] pripisuje formulu (3.5) Euleru [14]. Međutim, u ruskoj literaturi ista formula se naziva Čebiševljevom. Čebišev je kao student napisao (1837. ili 1838. godine) rad sa naslovom *Calcul des racines d'une équation* (izračunavanje korena jednačine). Iz ovog razloga danas je metod (3.5) najčešće nazivan *Euler-Čebiševljevim* metodom. Metodi (3.4) i (3.5) imaju kubnu konvergenciju.

Koristeći jedan drugačiji pristup, izvešćemo najpre metod četvrtog reda za simultano određivanje prostih nula polinoma, koji je korenskog tipa i pokazati da ovaj metod takođe spada u grupu metoda Eulerovog tipa, tj. da se može isvesti iz (3.4). Uz odgovarajuće modifikacije, red konvergencije ovog metoda može se ubrzati na pet i šest, sa relativno malim brojem dodatih računskih operacija.

Neka je P moničan algebarski polinom stepena n sa prostim realnim ili kompleksnim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ i neka su $z_1, \ldots, z_n$ različite aproksimacije ovih nula. Kao i u prethodnim slučajevima, *Weierstrass*ovom korekcijom nazivamo izraz

$$W_i = W_i(z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}, \tag{3.6}$$

koji se pojavljuje u Weierstrassovoj iterativnoj formuli

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - W_i\left(z_i^{(m)}\right) \quad (i \in I_n := \{1, \ldots, n\};\ m = 0, 1, \ldots).$$

Definišimo kompleksnu funkciju $z \mapsto \nu_i(z)$ na sledeći način

$$\nu_i(z) = W_i + (z - z_i)\left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z - z_j}\right). \tag{3.7}$$

Imajući u vidu relaciju fiksne tačke

$$\zeta_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}},$$

zaključujemo da je svaka nula ζ_i polinoma P takođe i nula funkcije $\nu_i(z)$.

Za proizvoljno $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n\}$ nalazimo

$$\nu_i'(z) = 1 + \sum_{j \neq i} W_j \frac{z_i - z_j}{(z - z_j)^2}, \qquad \nu_i''(z) = -2 \sum_{j \neq i} W_j \frac{z_i - z_j}{(z - z_j)^3}. \tag{3.8}$$

U ovom izvođenju koristimo sledeću skraćenicu

$$G_{k,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.9}$$

Na osnovu (3.7) i (3.8) izračunavamo da je u tački $z = z_i$

$$\nu_i(z_i) = W_i, \quad \nu_i'(z_i) = 1 + G_{1,i}, \quad \nu_i''(z_i) = -2G_{2,i}. \tag{3.10}$$

Primenom Eulerovog metoda (3.4) na funkciju $\nu_i(z)$ dolazimo do sledećeg algoritma:

Algoritam 3.1

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} + \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i G_{2,i}}} \quad (i \in I_n). \tag{3.11}$$

Označimo sa $\hat{\epsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i$ i $\epsilon_i = z_i - \zeta_i$ greške u sukcesivnim iterativnim koracima. Za dva kompleksna broja α i β čiji su moduli istog reda veličine pisaćemo $\alpha = O_M(\beta)$. Dalje, pretpostavljamo da su greške $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ istog reda veličine, tj. $\epsilon_i = O_M(\epsilon_j)$ za bilo koji par $i, j \in I_n$. Sa $\epsilon \in \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ označavamo grešku najveće magnitude (tj. $|\epsilon| \geq |\epsilon_i|$, $i = 1, \ldots, n$), pri čemu još uvek važi $\epsilon = O_M(\epsilon_i)$ za svako $i \in I_n$. Na osnovu teoreme o konvergenciji jedne opštije klase metoda dokazane u radu [42], možemo ustanoviti sledeće tvrđenje:

Teorema 3.1 *Ako su početne aproksimacije $z_1, \ldots, z_n$ dovoljno bliske nulama polinoma $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, tada je $\hat{\epsilon}_i = O_M(\epsilon_i^4)$, tj. red konvergencije iterativnog metoda* (3.11) *je četiri.*

Primena Eulerove formule (3.5) na funkciju $\nu_i(z)$ daje

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\nu_i(z_i)}{\nu_i'(z_i)} \left(1 + \frac{\nu_i(z_i)}{\nu_i'(z_i)} \cdot \frac{\nu_i''(z_i)}{2\nu_i'(z_i)} \right),$$

odakle, koristeći (3.10), možemo da konstruišemo

Algoritam 3.2

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + G_{1,i}} \left(1 - \frac{W_i G_{2,i}}{(1 + G_{1,i})^2} \right) \quad (i \in I_n) \tag{3.12}$$

Brzina konvergencije iterativnog metoda (3.12) razmatrana je u sledećoj teoremi, čiji se dokaz može naći u [50].

Teorema 3.2 *Ako su početne aproksimacije $z_1,\ldots,z_n$ dovoljno bliske nulama polinoma $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, tada je $\hat{\epsilon}_i = O_M(\epsilon_i^4)$, tj. red konvergencije iterativnog metoda* (3.12) *je četiri.*

Uvedimo sledeću oznaku:

$$\Sigma_{k,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i-\zeta_j)^k} \quad (k=1,2;\ i\in I_n).$$

Polazeći od faktorizovanog oblika polinoma $P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)$ i koristeći logaritamske izvode, dobijamo

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j},$$

odakle je

$$P'(z) = P(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-\zeta_j}, \quad P''(z) = P'(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-\zeta_j} - P(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(z-\zeta_j)^2}.$$

Zatim formiramo količnik

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z_i-\zeta_j} - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z_i-\zeta_j}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(z_i-\zeta_j)^2}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_i} + \Sigma_{1,i} - \frac{1/\epsilon_i^2+\Sigma_{2,i}}{1/\epsilon_i+\Sigma_{1,i}} = \frac{2\Sigma_{1,i}+\epsilon_i\Sigma_{1,i}^2-\epsilon_i\Sigma_{2,i}}{1+\epsilon_i\Sigma_{1,i}}$$

$$= 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-z_j+\epsilon_j} + O_M(\epsilon_i) = 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-z_j} + O_M(\epsilon).$$

Prema tome, količnik $P''(z_i)/(2P'(z_i))$ može biti aproksimiran sa $\sum_{j\neq i}(z_i-z_j)^{-1}$ za dovoljno malo ϵ. Zamenjujući ovu sumu u Eulerovoj formuli (3.5) sa $P''(z_i)/(2P'(z_i))$, dobijamo

Algoritam 3.3

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{P'(z_i)}\left(1+\frac{P(z_i)}{P'(z_i)}\cdot\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-z_j}\right) \quad (i\in I_n). \tag{3.13}$$

Jedan od najvažnijih problema u praktičnoj realizaciji numeričkih algoritama je izbor početnih aproksimacija koje omogućavaju sigurnu konvergenciju posmatranog numeričkog algoritma. Cilj je ustanoviti takve kvantitativne (početne) uslove koji se mogu lako verifikovati. Kao što je već napomenuto u odeljku 2.2, većina rezultata datih u literaturi zavisi od nedostupnih podataka (na primer, od traženih nula polinoma ili neodređenih konstanti), što nije od praktičnog značaja. Kubna konvergencija iterativnog procesa (3.13) je dokazana u [22], ali početni uslovi za konvergenciju u sebi sadrže nepoznate nule polinoma. Sledeća teorema daje početne uslove koji se mogu računski proveriti, a zavise samo od početnih aproksimacija i stepena polinoma. Dokaz ove teoreme zasnovan je na tehnici koja je opisana u knjizi [36].

Teorema 3.3 *Neka su $z_1, \ldots, z_n$ početne aproksimacije i neka je sa W_i označena Weierstrassova korekcija definisana sa* (3.6)*. Ako je početni uslov*

$$\max_{i \le i \le n} |W_i| \le \frac{\displaystyle\min_{\substack{1\le i,j\le n \\ j\ne i}} |z_i - z_j|}{3n}$$

ispunjen, tada je metod Eulerovog tipa (3.13) *kubno konvergentan.*

Laguerrov metod

Klasični Laguerrov metod za određivanje nula polinoma P stepena n dat je iterativnom formulom

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i) \pm \sqrt{[(n-1)P'(z_i)]^2 - n(n-1)P(z_i)P(z_i)''}}, \quad i \in I_n. \tag{3.14}$$

Znak ispred korena treba izabrati tako da se argument kompleksne veličine koja se dobija korenovanjem razlikuje za manje od $\pi/2$ od argumenta kompleksnog broja $(n-1)P'(z_i)$. Laguerrov metod je zbog svojih dobrih karakteristika konvergencije često primenjivan, a naročito je pogodan zbog male osetljivosti na izbor početne aproksimacije. Ovaj iterativni postupak izuzetno dobro se ponaša kad je $|z_i|$ velike magnitude (videti [19]).

Metod Ostrowskog

Funkcija $h_2(z)$ definisana pomoću (3.1) često se iz istorijskih razloga u literaturi naziva *funkcijom Ostrowskog*. Razlog za to leži u činjenici da je potkorena veličina u klasičnom metodu Ostrowskog, primenjenog za određivanje nula polinoma P stepena n, oblika

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2}}}, \quad i \in I_n, \tag{3.15}$$

upravo jednaka $h_2(z_i)$. Ovaj metod može da se izvede razvojem funkcije, čije se nule traže, u Taylorov red u okolini nule ζ_i uz odbacivanje članova počev od drugog stepena i, zatim, diferenciranjem izraza u kome je na jednoj strani član $1/(z - \zeta_i)$. Red konvergencije metoda (3.15) jednak je tri.

Kao što je već istaknuto, dodavanjem korekcionog izraza u obliku sume u potkorenoj veličini, dobija se metod kvadratnog korena (1.19) koji ima bržu konvergenciju. Dalje modifikacije metoda Ostrowskog dobijaju se zamenom aproksimacije z_j u formuli (1.19) nekom poboljšanom aproksimacijom tipa $z_j - \varphi(z_j)$. Kao funkcija $\varphi(z_j)$, najčešće su korišćene Newtonova i Halleyeva korekcija, date redom sa

$$N(z_i) = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} \qquad \text{Newtonova korekcija,}$$

$$H(z_i) = \left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)}\right)^{-1} \qquad \text{Halleyeva korekcija.}$$

Može se pokazati da je red konvergencije modifikovanih metoda koji koriste Newtonovu i Halleyevu korekciju jednak pet i šest, respektivno. Dodatno povećanje brzine konvergencije imaju odgovarajuće varijante metoda Gauss-Seidelovog tipa. Detaljnije analize ovih poboljšanja, kao i numerički primeri, mogu se naći u [31].

3.2 Simultani metodi korenskog tipa

Neka je f funkcija promenljive z i neka je α fiksni parametar. Hansen i Patrick su u svom radu [19] razvili jednoparametarsku familiju iterativnih metoda za nalaženje prostih nula funkcije f u obliku

$$\hat{z} = z - \frac{(\alpha+1)f(z)}{f'(z)\left(\alpha \pm \sqrt{1-(\alpha+1)\dfrac{f(z)}{f'(z)}\dfrac{f''(z)}{f'(z)}}\right)}, \tag{3.16}$$

gde z predstavlja poslednje izračunatu, a $\hat{z}$ novu aproksimaciju odgovarajuće nule. Ova familija uključuje metode sledećih tipova: Ostrowskog ($\alpha = 0$), Eulerovog ($\alpha = 1$), Laguerreovog ($\alpha = 1/(n-1)$), Halleyovog ($\alpha = -1$) i Newtonovog (granični slučaj, $\alpha \to \infty$). Izuzev poslednje navedenog metoda, koji ima kvadratnu konvergenciju, svi ostali postupci kubno konvergiraju ka prostoj nuli.

Familija simultanih metoda Hansen-Patrickovog tipa

Polazeći od Hansen-Patrickove formule (3.16), sledeća jednoparametarska familija iterativnih metoda za simultanu aproksimaciju svih prostih nula polinoma P izvedena je u [40]:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{(1+G_{1,i})\left(\alpha + \sqrt{1+2(\alpha+1)t_i}\right)} \quad (i \in I_n), \tag{3.17}$$

pri čemu su radi sažetog zapisivanja uvedene oznake:

$$G_{1,i} = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}, \quad G_{2,i} = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2}, \quad t_i = \frac{W_i G_{2,i}}{(1+G_{1,i})^2}.$$

Takođe je dokazano u [40] da je red konvergencije familije iterativnih metoda (3.17) jednak četiri za bilo koju fiksnu i konačnu vrednost parametra α. Ova familija metoda omogućava:

1) simultano određivanje svih nula datog polinoma,

2) ubrzavanje reda konvergencije sa 3 na 4.

Velikim brojem numeričkih primera pokazano je da predloženi metodi poseduju veoma dobra svojstva konvergencije. Pomenuti specijalni slučajevi iterativne formule (3.16) prikazani su u nastavku.

- $\alpha = 0$, postupak tipa Ostrowskog

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{(1 + G_{1,i})\sqrt{1 + 2t_i}} \quad (i \in I_n);$$

- $\alpha = 1$, postupak Eulerovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{(1 + G_{1,i})\left(1 + \sqrt{1 + 4t_i}\right)} \quad (i \in I_n);$$

- $\alpha = 1/(n-1)$, postupak Laguerreovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nW_i}{(1 + G_{1,i})\left(1 + \sqrt{(n-1)^2 + 2n(n-1)t_i}\right)} \quad (i \in I_n);$$

- $\alpha = -1$, postupak Halleyevog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{(1 + G_{1,i})(1 + t_i)} \quad (i \in I_n); \tag{3.18}$$

- $\alpha \to \infty$, postupak Newtonovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + G_{1,i}} \quad (i \in I_n).$$

Iterativna formula (3.17) dobijena je iz sledeće formule

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha + 1)W_i}{\alpha(1 + G_{1,i}) \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 2(\alpha + 1)W_i G_{2,i}}} \quad (i \in I_n),$$

pri čemu je za znak ispred kvadratnog korena izabran znak „+”. Razlog za ovakav izbor je u pretpostavci da su aproksimacije dovoljno blizu nulama polinoma P i jednostavnom analizom poput one koja je prikazana u [43] pokazuje se da znak treba izabrati tako da imenilac bude što veći u magnitudi.

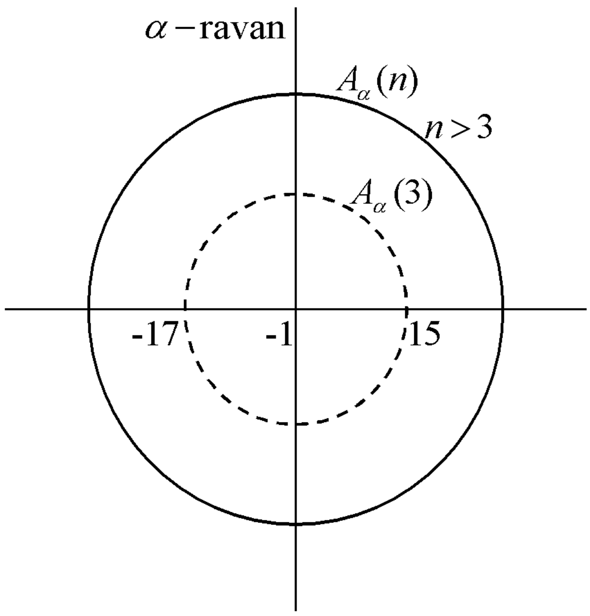
Formula (3.18) dobijena je na osnovu (3.17) korišćenjem činjenice da je

$$\lim_{\alpha \to -1} \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 + 2(\alpha + 1)t_i}} = \frac{1}{1 + t_i}.$$

Neka su veličine q i λ date sa

$$q = \frac{n-1}{4(n-1)^2} \quad \text{i} \quad \lambda = \sqrt{1 - 2|\alpha + 1|q}.$$

U analizi koja je sprovedena u [42], parametar α je u opštem slučaju kompleksan broj. Međutim, u praktičnim primenama, kompleksne vrednosti parametra α ne donose prednost, tako da se zbog efikasnije realizacije i analize uzimaju realne vrednosti za α.



Slika 3.1: Opseg vrednosti $A_\alpha(n)$ parametra α

Takođe, potrebno je da λ bude realna nenegativna veličina. Polazeći od nejednakosti $2|\alpha + 1|q \le 1$, dobija se sledeći opseg vrednosti parametra α, tzv. $\alpha - disk$ (slika 3.1):

$$A_\alpha(n) := \left\{-1; \frac{2(n+1)^2}{n-1}\right\} \supseteq \{-1; 16\}, \qquad n \ge 3.$$

$\alpha - disk$ $A_\alpha(n)$ je najmanji za $n = 3$, $A_\alpha(3) = \{-1; 16\}$.

Analiza konvergencije koja je izvršena u [40] pokazuje da velike vrednosti parametra α daju metode koji imaju samo kubnu konvergenciju. Jedan broj numeričkih primera ukazuje da izbor relativno velikih vrednosti parametra α može da uzrokuje inferiorno ponašanje metoda koji pripadaju klasi (3.17). Iz ovog razloga, navedeno ograničenje koje se odnosi na opseg vrednosti parametra α ne treba smatrati za nedostatak.

Poglavlje 4

Familija simultanih iterativnih metoda

Ovo poglavlje sadrži rezultate do kojih su Petković i Vranić došli u svom radu [45], gde je takođe izvršena modifikacija Hansen-Patrickove familije simultanih iterativnih metoda. Zapišimo formulu (3.16) na sledeći način

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{(\alpha+1)f(z^{(m)})}{\alpha f'(z^{(m)}) + \sqrt{f'(z^{(m)})^2 - (\alpha+1)f(z^{(m)})f''(z^{(m)})}}, \quad m = 0, 1, \dots , \tag{4.1}$$

pri čemu je za znak ispred korena izabran znak „+”, zbog razloga koji su navedeni u odeljku 3.2. Konstrukcija nove familije metoda objašnjena je u prvom odeljku ovog poglavlja, dok je detaljna analiza konvergencije izvršena u drugom odeljku.

Jednostavnosti radi, u razmatranju koje sledi izostavljen je indeks iteracije m i nove vrednosti u narednoj $(m+1)$-oj iteraciji označene su simbolom $\widehat{\ }$. Na primer, umesto $z_i^{(m)}$, $z_i^{(m+1)}$, $W_i^{(m)}$, $W_i^{(m+1)}$, $w^{(m)}$, $w^{(m+1)}$, $d^{(m)}$, $d^{(m+1)}$, $N_i^{(m)}$, $N_i^{(m+1)}$, biće napisano z_i, $\hat{z}_i$, W_i, $\widehat{W}_i$, w, $\hat{w}$, d, $\hat{d}$, N_i, $\hat{N}_i$. Da bi procene bile moguće, koristi se kružna kompleksna aritmetika navedena u odeljku 1.3.

4.1 Novi metod Hansen-Patrickovog tipa

Nova jednoparamatarska familija iterativnih procesa, koja je zasnovana na modifikaciji Hansen-Patrickove formule (4.1), izvedena je u radu [21]. Ako je $f \equiv P$ algebarski polinom i ako su aproksimacije $z_1, \dots, z_n$ dovoljno bliske nulama $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ polinoma P, smenjujući

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} \cong 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - z_j}$$

u formuli (3.16), dobija se sledeća familija iterativnih metoda:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)N_i}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha+1)N_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - z_j}}}, \quad i \in I_n := \{1, \ldots, n\}, \tag{4.2}$$

pri čemu N_i predstavlja Newtonovu korekciju datu sa

$$N_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)}.$$

Familija (4.2) ima prostiju formu od familije (3.17), ali samo kubnu konvergenciju. Dakle, klasa metoda (4.2) nije brža od osnovnog Hansen-Patrickovog metoda (3.16).

Neki specijalni slučajevi iterativne formule (4.2) dati su u nastavku, slično kao u odeljku 3.1.

- $\alpha = 0$, postupak tipa Ostrowskog
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{N_i}{\sqrt{1 - 2N_i \sum_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-1}}} \quad (i \in I_n);$$

- $\alpha = 1$, postupak Eulerovog tipa
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2N_i}{1 + \sqrt{1 - 4N_i \sum_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-1}}} \quad (i \in I_n);$$

- $\alpha = 1/(n-1)$, postupak Laguerreovog tipa
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nN_i}{1 + \sqrt{(n-1)^2 - n(n-1)N_i \sum_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-1}}} \quad (i \in I_n);$$

- $\alpha = -1$, postupak Halleyevog tipa
$$\hat{z}_i = z_i - \frac{N_i}{1 - N_i \sum_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-1}} \quad (i \in I_n). \tag{4.3}$$

Formulu (4.3) najpre su razmatrali Maehly [27] i Börsch-Supan [4], ali praktična primena i analiza konvergencije potiče od Ehrlicha [13] i Abertha [1], zbog čega se ovaj metod najčešće naziva Ehrlich-Aberthovim metodom, koji je na drugačiji način zapisan pomoću (1.13).

Jednostavnosti radi, uvodi se sledeća skraćenica

$$t_i = 2(\alpha+1)N_i \sum_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-1} \tag{4.4}$$

i formula (4.2) dobija jednostavniji oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)N_i}{\alpha + \sqrt{1 - t_i}} \quad (i \in I_n). \tag{4.5}$$

4.2 Početni uslovi i sigurna konvergencija metoda

U ovom odeljku primenjena je teorema 2.7 i početni uslov oblika (2.13) radi formulisanja teoreme o konvergenciji za jednoparametarsku familiju (4.5) simultanih metoda za nalaženje prostih nula polinoma. Pre ustanovljivanja glavnih rezultata navedene su dve leme. U razmatranjima je opseg vrednosti parametra α koji se pojavljuje u iterativnoj formuli (4.5) ograničen na disk $\{-1; 5.5\}$, tj. uvek važi

$$|\alpha + 1| < 5.5. \tag{4.6}$$

Ovo ograničenje je obrazloženo u nastavku. Napomenimo da ovaj opseg vrednosti parametra α omogućava da svi prethodno pomenuti metodi budu definisani. Osim toga, na sličan način kao u [40] može biti pokazano da je za veliko $|\alpha|$ brzina konvergencije familije iterativnih metoda (4.5) sporija i sa porastom $|\alpha|$ konvergencija postaje samo kvadratna. Analiza konvergencije i numerički primeri pokazuju da se optimalno ponašanje familije iterativnih procesa (4.5) dobija za α blisko -1 (metod Halleyevog tipa ili Ehrlich-Aberthov metod (4.3), videti napomenu 4.2). Iz ovog razloga, uslov (4.6) može biti smatran za blago ograničenje.

Podsećamo na definiciju najkraćeg rastojanja između tekućih aproksimacija (d) i maksimalne vrednosti modula Weierstrassove korekcije (w):

$$d = \min_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} |z_i - z_j| \qquad \text{i} \qquad w = \max_{1 \le i \le n} |W_i|.$$

Lema 4.1 *Pretpostavimo da je uslov*

$$w < \frac{d}{13n} \tag{4.7}$$

zadovoljen. Tada svaki disk $\{z_i; \frac{13}{12}|W_i|\}$ $(i \in I_n)$ *sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma* P.

Uslov (4.7) je oblika (2.13) i lema 4.1 predstavlja specijalan slučaj teoreme 2.9, kada je $A = 13$ i $B = 0$.

Koristeći Lagrangeovu interpolaciju polinoma P u tačkama $z_1, \ldots, z_n$, polinom P može biti predstavljen preko Weierstrassovih korekcija W_j $(j = 1, \ldots, n)$ u obliku

$$P(t) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{t - z_j} + 1 \right) \prod_{j=1}^{n} (t - z_j). \tag{4.8}$$

Primenjujući logaritamske izvode na (4.8) i stavljajući $t = z_i$ u dobijenoj formuli, nalazimo

$$\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \sum_{j \ne i} \frac{1}{z_i - z_j} + \frac{1}{W_i} \left(\sum_{j \ne i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1 \right). \tag{4.9}$$

Osim relacije (4.8) i (4.9), u nastavku je korišćena i sledeća implikacija:

$$a = \sum_{i=1}^{k} b_i \Longrightarrow |b_j| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{k} |b_i| \le |a| \le \sum_{i=1}^{k} |b_i|, \quad a, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Lema 4.2 *Neka su $z_1,\dots,z_n$ različite aproksimacije nula $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ polinoma P stepena $n \ge 3$ i neka su $\hat{z}_1,\dots,\hat{z}_n$ nove respektivne aproksimacije dobijene pomoću familije metoda* (4.5). *Ako su nejednakosti* (4.6) *i* (4.7) *ispunjene, tada za $i,j \in I_n$ imamo*

$(i)\qquad \dfrac{13}{15}|W_i| < |N_i| < \dfrac{13}{11}|W_i| < \dfrac{d}{11n};$

$(ii)\qquad |t_i| < \dfrac{2|\alpha+1|}{11};$

$(iii)\qquad \left|\dfrac{\alpha+1}{\alpha+\sqrt{1-t_i}}\right| < \dfrac{11}{9};$

$(iv)\qquad \left|\dfrac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{\alpha+1}\right| < \dfrac{13}{11}.$

Dokaz. Neka je

$$V_i = W_i \sum_{j\ne i} \frac{1}{z_i - z_j} + \sum_{j\ne i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1.$$

Koristeći (4.7) i (4.10) nalazimo

$$\begin{aligned} |V_i| &> 1 - |W_i| \sum_{j\ne i} \frac{1}{|z_i - z_j|} - \sum_{j\ne i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \\ &> 1 - \frac{2(n-1)w}{d}) > 1 - \frac{2(n-1)}{13n} > \frac{11}{13}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Na sličan način dobijamo i gornju granicu za $|V_i|$,

$$|V_i| < 1 + |W_i| \sum_{j\ne i} \frac{1}{|z_i - z_j|} + \sum_{j\ne i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} < \frac{15}{13}. \tag{4.12}$$

Na osnovu identiteta (4.9) imamo

$$|N_i| = \left|\frac{P(z_i)}{P'(z_i)}\right| = \frac{|W_i|}{|V_i|},$$

odakle, primenjujući nejednakosti (4.7), (4.11) i (4.12), sledi

$$\frac{13}{15}|W_i| < |N_i| < \frac{13}{11}|W_i| < \frac{d}{11n}, \tag{4.13}$$

čime je tvrđenje (i) dokazano.

Za dokaz tvrđenja (ii) koristimo (4.4), (i) i definiciju rastojanja d, i nalazimo

$$|t_i| \le 2|\alpha+1||N_i| \sum_{j\ne i} \frac{1}{|z_i - z_j|} < 2|\alpha+1| \frac{d}{11n} \cdot \frac{n-1}{d} < \frac{2|\alpha+1|}{11}.$$

Tvrđenje (*ii*) možemo interpretirati kao

$$t_i \in \left\{0; \frac{2|\alpha+1|}{11}\right\} = \{0; t_0\},$$

gde je $t_0 = \dfrac{2|\alpha+1|}{11} < 1$ (uslov (4.6)).

Kao što je običaj pri analizi lokalne konvergencije, pretpostavljamo da su početne aproksimacije dovoljno bliske nulama polinoma P, tj. neka je $|t_i|$ u (4.5) dovoljno mala veličina. Drugim rečima, pretpostavljamo da je $|t_i| < 1$, što se svodi na potrebno ograničenje (4.6). Naglašavamo da ovo ograničenje nije prouzrokovano primenjenim aparatom za analizu konvergencije, već nekim nepovoljnim osobinama konvergencije familije metoda (4.5).

Primenom (1.35) i (1.32) dobijamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1-t_i} &\in (1-\{0;t_0\})^{1/2} = \{1;t_0\}^{1/2} = \{1; 1-(1-t_0)^{1/2}\} \\ &= \left\{1; \frac{t_0}{1+(1-t_0)^{1/2}}\right\} \subset \{1;t_0\} = \left\{1; \frac{2|\alpha+1|}{11}\right\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Primenjujući inverziju diska u centriranoj formi (1.29) nalazimo

$$\frac{\alpha+1}{\alpha+\sqrt{1-t_i}} \in \frac{\alpha+1}{\alpha+\left\{1; \dfrac{2|\alpha+1|}{11}\right\}} = \frac{1}{\{1; \frac{2}{11}\}} = \left\{1; \frac{2}{9}\right\}. \tag{4.15}$$

Na sličan način, koristeći (4.14) imamo

$$\frac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{\alpha+1} \in \frac{\alpha+\left\{1; \dfrac{2|\alpha+1|}{11}\right\}}{\alpha+1} = \left\{1; \frac{2}{11}\right\}. \tag{4.16}$$

Najzad, imajući u vidu relaciju (1.34), na osnovu (4.15) i (4.16) zaključujemo da je

$$\left|\frac{\alpha+1}{\alpha+\sqrt{1-t_i}}\right| < 1+\frac{2}{9} = \frac{11}{9}, \tag{4.17}$$

$$\left|\frac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{\alpha+1}\right| < 1+\frac{2}{11} = \frac{13}{11}. \tag{4.18}$$

Ovim je dokaz leme 4.2 završen. ■

Lema 4.3 *Ako su uslovi* (4.6) *i* (4.7) *ispunjeni, tada važe nejednakosti*

(*i*) $|\widehat{W}_i| < 0.47|W_i|$,

(*ii*) $\hat{w} < \dfrac{\hat{d}}{13n}$.

Dokaz. Na osnovu iterativne formule (4.5) i nejednakosti (4.13) i (4.17) dobijamo

$$|\hat{z}_i - z_i| = |N_i| \left| \frac{\alpha+1}{\alpha+\sqrt{1-t_i}} \right| < \frac{d}{11n} \cdot \frac{11}{9} = \frac{d}{9n}. \tag{4.19}$$

Odavde, uz primenu relacije (4.10), zaključujemo

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| > d - \frac{d}{9n} = \frac{9n-1}{9n} d \tag{4.20}$$

i

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| > d - 2 \cdot \frac{d}{9n} = \frac{9n-2}{9n} d. \tag{4.21}$$

Iz poslednje nejednakosti sledi

$$\hat{d} > \frac{9n-2}{9n} d \quad \text{i} \quad d < \frac{9n}{9n-2} \hat{d}. \tag{4.22}$$

Smenom $t = \hat{z}_i$ u (4.8) dobijamo

$$P(\hat{z}_i) = (\hat{z}_i - z_i) u_i \prod_{j \neq i} (\hat{z}_i - z_j), \tag{4.23}$$

gde je

$$u_i = \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1.$$

Koristeći iterativnu formulu (4.5) i identitet (4.9) nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} &= -W_i \cdot \frac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{(\alpha+1)N_i} \\ &= -W_i \cdot \frac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{\alpha+1} \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} + \frac{1}{W_i} \left(\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1 \right) \right) \\ &= -\frac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{\alpha+1} V_i, \end{aligned}$$

gde je V_i dato na početku dokaza leme 4.2. Dalje, s obzirom na (4.16), imamo

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{\alpha+\sqrt{1-t_i}}{\alpha+1} V_i + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 \\ &\in -\left\{ 1; \frac{2}{11} \right\} V_i + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1 = \{\eta; R\}, \end{aligned}$$

gde je

$$\eta = -W_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j} - \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - 1 + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} + 1$$

$$= -W_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j} - (\hat{z}_i - z_i) \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(\hat{z}_i - z_j)(z_i - z_j)},$$

i

$$R = \frac{2}{11} \left| W_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j} + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + 1 \right| = \frac{2}{11} |V_i|.$$

Na osnovu (4.7), (4.19), (4.20) i definicije rastojanja d dobijamo procenu

$$|\eta| \le |W_i| \sum_{j\neq i} \frac{1}{|z_i - z_j|} + |\hat{z}_i - z_i| \sum_{j\neq i} \frac{|W_j|}{|\hat{z}_i - z_j||z_i - z_j|}$$

$$< \frac{(n-1)w}{d} + \frac{d}{9n} \cdot \frac{(n-1)w}{\frac{9n-1}{9n} d \cdot d} = \frac{n-1}{13n} + \frac{n-1}{13n(9n-1)} < \frac{1}{13}.$$

Imajući u vidu gornju granicu za $|V_i|$ datu sa (4.12), nalazimo

$$R < \frac{2}{11} |V_i| < \frac{2}{11} \cdot \frac{15}{13} = \frac{30}{143}.$$

Pošto je $u_i \in \{\eta; R\}$, koristeći gore navedene granice i (1.34), dobijamo

$$|u_i| < |\eta| + R < \frac{1}{13} + \frac{30}{143} = \frac{41}{143}. \tag{4.24}$$

Deljenjem (4.23) sa $\prod_{j\neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$ imamo

$$\widehat{W}_i = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod_{j\neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i) u_i \prod_{j\neq i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}. \tag{4.25}$$

Koristeći granice (4.19) i (4.21) nalazimo

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j\neq i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| &\le \prod_{j\neq i} \left(1 + \frac{|\hat{z}_j - z_j|}{|\hat{z}_i - \hat{z}_j|} \right) < \prod_{j\neq i} \left(1 + \frac{\frac{1}{9n} d}{\frac{(9n-2)}{9n} d} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{9n-2} \right)^{n-1} < \exp(1/9) \cong 1.1331. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Na osnovu (4.13) i (4.17) zaključujemo da važi

$$|\hat{z}_i - z_i| = |N_i| \left| \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - t_i}} \right| < \frac{13}{11} |W_i| \cdot \frac{11}{9} = \frac{13}{9} |W_i|. \tag{4.27}$$

Primenom (4.24), (4.26) i (4.27) na (4.25) dobijamo

$$|\widehat{W}_i| = |\hat{z}_i - z_i||u_i| \left| \prod_{j\neq i} \frac{\hat{z}_i - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j} \right| < \frac{13}{9}|W_i| \cdot \frac{41}{143}\exp(1/9) \cong 0.4627|W_i|,$$

tako da je

$$|\widehat{W}_i| < 0.47|W_i|, \tag{4.28}$$

čime je dokazano tvrđenje (i) leme 4.3.

S obzirom na poslednju nejednakost, (4.7) i (4.22) sledi da je

$$\hat{w} < 0.47w < 0.47 \cdot \frac{d}{13n} < \frac{0.47}{13n} \cdot \frac{9n}{9n-2}\hat{d} < \frac{\hat{d}}{13n}.$$

Ovim je pokazana implikacija

$$w < \frac{d}{13n} \quad \Longrightarrow \quad \hat{w} < \frac{\hat{d}}{13n}, \tag{4.29}$$

što znači da je i tvrđenje (ii) leme 4.3 ispravno.

Ovim je dokaz leme 4.3 završen. ■

Koristeći leme 4.2 i 4.3 i teoremu 2.7, Petković i Vranić su u [45] formulisali sledeću teoremu o konvergenciji familije simultanih iterativnih metoda korenskog tipa datu formulom (4.5).

Teorema 4.1 *Familija iterativnih metoda*

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{(\alpha+1)N_i^{(m)}}{\alpha + \sqrt{1 - t_i^{(m)}}} \quad (i \in I_n,\ m = 0, 1, \ldots) \tag{4.30}$$

sa parametrom $\alpha \in \{-1; 5.5\}$ *konvergira ako je ispunjen uslov*

$$w^{(0)} < \frac{d^{(0)}}{13n}. \tag{4.31}$$

Dokaz. Označimo sa $C_i^{(m)}$ iterativnu korekciju koja se javlja u (4.30), datu sa

$$C_i^{(m)} = \frac{(\alpha+1)N_i^{(m)}}{\alpha + \sqrt{1 - t_i^{(m)}}} \quad (i \in I_n,\ m = 0, 1, \ldots). \tag{4.32}$$

Ova korekcija ima zahtevanu formu $C_i^{(m)} = P(z_i^{(m)})/F(z_i^{(m)})$ (teorema 2.7) ako se uzme

$$F(z_i^{(m)}) = \frac{P'(z_i^{(m)})\left(\alpha + \sqrt{1 - t_i^{(m)}}\right)}{\alpha + 1}.$$

Primetimo da je $F(z_i^{(m)}) \neq 0$. Zaista, primenom (4.16) imamo

$$0 \notin \{1; 2/11\} \ni (\alpha + \sqrt{1 - t_i^{(m)}})/(\alpha + 1),$$

dok po tvrđenju (i) leme 4.2 sledi da je $|P'(z_i^{(m)})| > 11n|P(z_i^{(m)})|/d > 0$ za $z_i^{(m)} \neq \zeta_i$ i $|P'(\zeta_i)| \neq 0$ pošto je ζ_i prosta nula polinoma P. U nastavku pokazujemo da su nizovi $\left\{\left|C_i^{(m)}\right|\right\}$ $(i \in I_n,\ m = 0, 1, \ldots)$ monotono opadajući.

Iz (4.27) neposredno nalazimo da je

$$|C_i^{(m)}| = |z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}| < \frac{13}{11}|W_i^{(m)}|. \tag{4.33}$$

U dokazu leme 4.3 izvedena je implikacija (4.29). Koristeći isti pristup i sličan postupak, indukcijom pokazujemo sledeću implikaciju

$$w^{(0)} < \frac{d^{(0)}}{13n} \quad \Longrightarrow \quad w^{(m)} < \frac{d^{(m)}}{13n} \tag{4.34}$$

za svako $m = 1, 2, \ldots$. Ovo znači da sve prethodno dokazane procene važe za svaku vrednost indeksa $m = 1, 2, \ldots$. Specijalno, tvrđenje (i) leme 4.3 je tačno, tj.

$$|W_i^{(m+1)}| < 0.47|W_i^{(m)}| \quad (i \in I_n;\ m = 0, 1, \ldots). \tag{4.35}$$

Na osnovu prethodnog, korišćenjem nejednakosti (4.28) i (4.33), dobijamo

$$\begin{aligned} |C_i^{(m+1)}| &< \frac{13}{11}|W_i^{(m+1)}| < \frac{13}{11} \cdot 0.47|W_i^{(m)}| \\ &< 0.56|W_i^{(m)}| = 0.56\left|\frac{W_i^{(m)}}{z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}}\right||C_i^{(m)}|. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Kombinovanjem tvrđenja (i) leme 4.2 i (4.18), nalazimo

$$\left|\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i}\right| = \frac{|W_i|}{|N_i|}\left|\frac{\alpha + \sqrt{1 - t_i}}{\alpha + 1}\right| < \frac{15}{13} \cdot \frac{13}{11} = \frac{15}{11}.$$

Koristeći poslednju ocenu, iz (4.36) sledi

$$|C_i^{(m+1)}| < 0.56 \cdot \frac{15}{11}|C_i^{(m)}| < 0.8|C_i^{(m)}|. \tag{4.37}$$

Odavde, primenom matematičke indukcije i (4.34) pokazujemo sledeću nejednakost

$$|C_i^{(m+1)}| < 0.8|C_i^{(m)}| \quad (i \in I_n,\ m = 0, 1, \ldots),$$

koja potvrđuje monotonost nizova $\left\{\left|C_i^{(m)}\right|\right\}$.

Sledeći teoremu 2.7 faktor kontrakcije u (4.37) je $\gamma = 0.8$ i lako izračunavamo konstantu $g(0.8) = 5$ definisanu sa (2.17), koja se javlja u tvrđenju (*ii*) teoreme 2.7. Za vrednost konstante $g(0.8) = 5$ treba pokazati da su inkluzivni diskovi

$$S_1 = \left\{ z_1^{(0)}; 5|C_1^{(0)}| \right\}, \ldots, S_n = \left\{ z_n^{(0)}; 5|C_n^{(0)}| \right\}$$

razdvojeni (tvrđenje (*ii*) teoreme 2.7).

Na osnovu (4.33) imamo da je

$$|C_i^{(0)}| < \frac{13}{11} w^{(0)},$$

odakle je, pomoću (4.31),

$$d^{(0)} > 13nw^{(0)} > 13n \cdot \frac{11}{13}|C_i^{(0)}| = 11n|C_i^{(0)}| \quad \text{za svako} \quad i \in I_n.$$

Koristeći ovu granicu, dobijamo sledeću nejednakost za proizvoljan par indeksa $i, j \in I_n$ $(i \neq j)$

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \geq d^{(0)} > 11n \min\left\{ |C_i^{(0)}|, |C_j^{(0)}| \right\} \geq 5.5n \left(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}| \right)$$

$$> 5 \left(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}| \right) = \text{rad} S_i + \text{rad} S_j.$$

Prema tome, pokazano je da su inkluzivni diskovi $S_1, \ldots, S_n$ razdvojeni, čime je teorema 4.1 dokazana. ■

Napomena 4.1 Kao što je pokazano u [42], familija simultanih iterativnih procesa četvrtog reda (3.17) konvergira pod slabijim uslovom $w^{(0)} < d^{(0)}/(3n+3)$ u odnosu na familiju metoda (4.30). Ovo znači da metodi (3.17) poseduju bolje karakteristike konvergencije od metoda (4.5). Brza konvergencija iterativne formule (3.17) ostvarena je dodavanjem članova ispod kvadratnog korena, za koje važi

$$2(\alpha + 1)W_i G_{2,i} = \mathcal{O}(|z_i - \zeta_i|^2),$$

gde je $G_{2,i}$ dato sa (3.9). Za odgovarajući član t_i u (4.5) samo je ispunjeno

$$t_i = \mathcal{O}(|z_i - \zeta_i|).$$

Napomena 4.2 U radu [39] pokazano je da metod Halleyevog tipa (4.3), koji se javlja kao specijalan slučaj familije (4.5), konvergira pod znatno slabijim uslovom $w^{(0)} < d^{(0)}/(2n + 3)$ u poređenju sa (4.31). Na osnovu ovoga, kao i brojnih numeričkih primera, dolazi se do zaključka da parametar α u (4.5) treba da bude izabran tako da mu je vrednost blizu -1. Dakle, možemo reći da uslov (4.6) nije strogo ograničenje za parametar α.

Poglavlje 5

Intervalni metodi Eulerovog tipa

U ovom poglavlju biće reči o konstrukciji intervalnih iterativnih metoda za simultano nalaženje nula polinoma zasnovanih na klasičnim metodima Eulerovog tipa [14] iz odeljka 3.1. Pored ranije navedenih prednosti metoda Eulerovog tipa koje važe u običnoj kompleksnoj aritmetici, vredno je još istaći da inkluzivni postupci ovog tipa poseduju mogućnost produkovanja intervalnih aproksimacija koje sadrže tačne nule. Na taj način je ne samo automatski uključena informacija o granicama greške, već su takođe uzete u obzir i greške zaokruživanja bez ikakve promene osnovne strukture intervalnih formula.

Intervalni metod koji je izveden i analiziran u prvom odeljku ovog poglavlja zapravo je proširenje rezultata prikazanih u nedavno objavljenom radu [44]. U drugom odeljku izvršena je analiza konvergencije metoda koji je predložen u [44] i ona predstavlja nov rezultat. Numerički primeri čine treći deo ovog poglavlja.

5.1 Konvergencija intervalnog metoda Eulerovog tipa za simultanu inkluziju nula polinoma

Izvođenje metoda

Neka je P moničan polinom sa prostim realnim ili kompleksnim korenima $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Pretpostavimo da su nam poznati disjunktni diskovi $Z_1, \dots, Z_n$ koji sadrže ove nule, tj. $\zeta_i \in Z_i$ za svako $i \in I_n := \{1, \dots, n\}$ i $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Neka je $z_i = \operatorname{mid} Z_i$ $(i \in I_n)$ centar inkluzivnog diska Z_i. Podsećamo na ranije uvedene skraćenice

$$W_i = \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(z_i - z_j)}, \quad G_{k,i} = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^k} \quad (k = 1, 2) \tag{5.1}$$

i uvodimo nove

$$s_i = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}, \quad S_i = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(Z_i - z_j)} \quad (i \in I_n). \tag{5.2}$$

Disk Z_i javlja se više nego jedanput u izrazu za S_i, ali ovo ne utiče na preciznost rezultujućeg diska pošto su sabiranje i inverzija tačne operacije u kružnoj aritmetici.

Polinom P stepena n identičan je svom Lagrangeovom interpolacionom polinomu za tačke $z_1,\ldots,z_n$ i ∞, tj.

$$P(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q(z)}{Q'(z_j)(z - z_j)} P(z_j) + Q(z),$$

pri čemu je

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Pretpostavimo da je $P(z_i) \neq 0$ za svako $i \in I_n$. Za bilo koju nulu ζ_i $(i \in I_n)$ polinoma P imamo (uzimajući $z = \zeta_i$) sledeću relaciju

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)(\zeta_i - z_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j} = -1.$$

Odavde je

$$\frac{1}{\zeta_i - z_i} + \frac{W_i}{(\zeta_i - z_i)^2} = -\sum_{j\neq i}^{n} \frac{W_j}{(\zeta_i - z_i)(\zeta_i - z_j)}$$

$$= -\sum_{j\neq i}^{n} \frac{W_j}{z_i - z_j}\left(\frac{1}{\zeta_i - z_j} - \frac{1}{\zeta_i - z_i}\right).$$

Dalje imamo

$$\sum_{j\neq i}^{n} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)} = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_i)} + \frac{1}{\zeta_i - z_i} + \frac{W_i}{(\zeta_i - z_i)^2}$$

$$= (1 + G_{1,i})\frac{1}{\zeta_i - z_i} + \frac{W_i}{(\zeta_i - z_i)^2}.$$

Odavde, najpre, množenjem dobijene jednačine sa $4W_i$, a zatim dodavanjem sabirka $(1 + G_{1,i})^2$ na obe strane i, najzad, korenovanjem leve i desne strane, nalazimo

$$1 + G_{1,i} + \frac{2W_i}{\zeta_i - z_i} = \pm\sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i \sum_{j\neq i}^{n} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}}.$$

Sledeća relacija fiksne tačke dobija se neposredno iz prethodne jednačine rešavanjem po ζ_i :

$$\zeta_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i s_i}} \quad (i \in I_n). \tag{5.3}$$

Pošto je $\zeta_i \in Z_i$ sledi da je, prema (1.35), $s_i \in S_i$ i koristeći osobinu inkluzivne izotonosti na način opisan u odeljku 1.4, izvodimo inkluzivni metod

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i := z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i S_i}} \quad (i \in I_n). \tag{5.4}$$

Kao što je već obrazloženo u odeljku 1.4, ukoliko je disk Z_i dovoljno malog poluprečnika tako da imenilac u (5.4) ne sadrži koordinatni početak, skup $\hat{Z}_i$ je takođe kružni kompleksni interval koji sadrži nulu ζ_i i za znak ispred kvadratnog korena u (5.4) treba izabrati znak „+", iz istog razloga kao i kod metoda (3.17) opisanog u odeljku 3.2. Na osnovu toga, sledeći inkluzivni metod konstruisan je u [43]:

Algoritam 5.1 *Neka su* $(Z_1, \ldots, Z_n) =: (Z_1^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)})$ *početni diskovi takvi da je* $\zeta_i \in Z_i$ $(i \in I_n)$. *Označavajući sa* $z_i := \operatorname{mid} Z_i$ *i* $r_i := \operatorname{rad} Z_i$ *centar i poluprečnik diska* Z_i, *novi jednokoračni inkluzivni algoritam Eulerovog tipa glasi* $(Z_1, \ldots, Z_n) \mapsto (\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_n)$,

$$\hat{Z}_i := z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} + \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i S_i}} \quad (i \in I_n). \tag{5.5}$$

Kvadratni koren koji se pojavljuje u imeniocu izraza (5.5) računa se pomoću (1.32). Kao što je pokazano u [43], relacija nepokretne tačke (5.3) je na određeni način povezana sa klasičnim Eulerovim metodom trećeg reda

$$\hat{z} = z - \frac{2f(z)}{f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - 2f(z)f''(z)}},$$

zbog čega je inkluzivni metod (5.5) i nazvan metodom Eulerovog tipa.

Analiza konvergencije

U ovoj analizi dajemo početne uslove pod kojima metod Eulerovog tipa (5.5) konvergira i pokazaćemo da je njegov red konvergencije jednak četiri. Uvodimo sledeće oznake

$$r = \max_{1 \le i \le n} r_i, \quad \rho = \min_{\substack{i,j \\ i \ne j}} \{|z_i - z_j| - r_j\}, \quad \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right)^{n-1}, \tag{5.6}$$

$$\epsilon_i := z_i - \zeta_i, \qquad \epsilon := \max_{1 \le i \le n} |\epsilon_i|, \tag{5.7}$$

pri čemu je $z_i = \operatorname{mid} Z_i$ centar i $r_i = \operatorname{rad} Z_i$ $(i \in I_n)$ poluprečnik inkluzivnog diska Z_i. U nastavku pretpostavljamo da je je stepen polinoma čije nule određujemo $n \ge 3$ i najpre dokazujemo neka potrebna tvrđenja.

Lema 5.1 *Pretpostavimo da je nejednakost*

$$\rho > 4(n-1)r \tag{5.8}$$

ispunjena. Tada važe sledeće nejednakosti:

(*i*) $|W_i| < \alpha|\epsilon_i| < \alpha_n r < e^{1/4} r \approx 1.284\, r$;

(*ii*) $|G_{k,i}| < \dfrac{(n-1)\alpha_n r}{\rho^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$;

(*iii*) $|1 + G_{1,i}| > 1 - \dfrac{\alpha_n}{4}$;

(*iv*) $\left|\dfrac{W_i G_{2,i}}{(1 + G_{1,i})^2}\right| < \dfrac{1}{8}$.

Dokaz.
Tvrđenje (*i*). Niz $\{\alpha_n\}_{n=3,4,\ldots}$ je monotono rastući sa gornjom granicom $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = e^{1/4}$. Na osnovu ove činjenice i (5.8) imamo da je za svako $j \in I_n$

$$\begin{aligned}|W_j| &= \frac{|P(z_j)|}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |z_j - z_k|} = |z_j - \zeta_j| \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\frac{z_j - \zeta_k}{z_j - z_k}\right| < |\epsilon_j| \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{|z_j - z_k| + r_k}{|z_j - z_k|} \\ &< |\epsilon_j| \left(1 + \frac{r}{\rho}\right)^{n-1} < |\epsilon_j| \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right)^{n-1} = \alpha_n |\epsilon_j| \\ &\leq \alpha_n r < e^{1/4} r \approx 1.284 r.\end{aligned}$$

Tvrđenje (*ii*). Koristeći (*i*) i (4.10) nalazimo

$$|G_{k,i}| = \left|\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^k}\right| \leq \sum_{j\neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|^k} < \frac{(n-1)\alpha_n r}{\rho^k}.$$

Tvrđenje (*iii*). Na osnovu (5.8) i (*ii*) sledi

$$|1 + G_{1,i}| \geq 1 - |G_{1,i}| > 1 - \frac{(n-1)\alpha_n r}{\rho} > 1 - \frac{\alpha_n}{4}.$$

Tvrđenje (*iv*). Neka je

$$\gamma_n := \frac{\alpha_n^2}{16(n-1)(1 - \alpha_n/4)^2}, \quad n > 1.$$

Korišćenjem ocene $\gamma_n \leq \gamma_3 \approx 0.107 < 1/8$ za svako $n \geq 3$, nejednakosti (5.8) i tvrđenja (*iii*) leme 5.11, dobijamo

$$\left|\frac{W_i G_{2,i}}{(1+G_{1,i})^2}\right| < \frac{\alpha_n^2(n-1)(r^2/\rho^2)}{(1-\alpha_n/4)^2} < \frac{\alpha_n^2}{16(n-1)(1-\alpha_n/4)^2} = \gamma_n < \frac{1}{8}.$$

■

Lema 5.2 *Ako je uslov* (5.8) *ispunjen, tada važi inkluzija*

$$S_i = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(Z_i - z_j)} \subset \left\{ G_{2,i}; \frac{r}{\rho^2} \sum_{j\neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \right\} \subset \left\{ G_{2,i}; \frac{\alpha_n (n-1) r^2}{\rho^3} \right\}. \tag{5.9}$$

Dokaz. Pokažimo najpre sledeću inkluziju

$$\frac{1}{Z_i - z_j} \subset \left\{ \frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2} \right\}. \tag{5.10}$$

Primetimo da, pošto je $|z_i - z_j| \geq \rho > 4(n-1)r > r_i$, sledi da $z_j \notin Z_i$, tako da inverzni disk $(Z_i - z_j)^{-1}$ postoji. Prema (1.26) inkluzija (5.10) važi ako je ispunjena nejednakost

$$\left| \text{mid } (Z_i - z_j)^{-1} - \frac{1}{z_i - z_j} \right| < \frac{r}{\rho^2} - \text{rad } (Z_i - z_j)^{-1}.$$

S obzirom na (1.28) poslednja nejednakost postaje

$$\left| \frac{\overline{z_i - z_j}}{|z_i - z_j|^2 - r_i^2} - \frac{1}{z_i - z_j} \right| < \frac{r}{\rho^2} - \frac{r_i}{|z_i - z_j|^2 - r_i^2},$$

ili, nakon sređivanja,

$$\frac{r_i(|z_i - z_j| + r_i)}{(|z_i - z_j| + r_i)(|z_i - z_j| - r_i)|z_i - z_j|} < \frac{r}{\rho^2},$$

što je tačno imajući u vidu definiciju rastojanja ρ i pretpostavku da su diskovi $Z_1, \ldots, Z_n$ razdvojeni (obezbeđujući nejednakost $|z_i - z_j| > r_i$).

Koristeći (5.10) i operacije kompleksne kružne aritmetičke navedene u odeljku 1.3, nalazimo

$$S_i = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(Z_i - z_j)} \subset \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \left\{ \frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2} \right\}$$

$$\subseteq \left\{ \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2}; \frac{r}{\rho^2} \sum_{j\neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \right\} = \left\{ G_{2,i}; \frac{r}{\rho^2} \sum_{j\neq i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} \right\}.$$

■

Pretpostavimo da su razdvojeni diskovi $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; r_i^{(0)}\}$, koji sadrže nule ζ_i $(i \in I_n)$, nađeni. Relacija (5.4) sugeriše novi intervalni metod za simultano nalaženje prostih kompleksnih nula algebarskog polinoma.

Neka je $Z_i^{(m)}, z_i^{(m)} = \text{mid}\, Z_i^{(m)}, r_i^{(m)} = \text{rad}\, Z_i^{(m)}, \rho^{(m)}, r^{(m)}, W_i^{(m)}, G_{k,i}^{(m)}$, $s_i^{(m)}$, $S_i^{(m)}$ notacija (uvedena ranije) koja se tiče m-tog iterativnog koraka. Ponekad, zbog jednostavnosti, izostavljamo indeks iteracije m za tekući iterativni korak i, kao i ranije, koristimo simbol $\widehat{\ }$ za veličine u $(m+1)$-om iterativnom koraku.

Teorema 5.1 *Neka su nizovi intervala* $\left\{Z_i^{(m)}\right\}$ $(i \in I_n;\ m = 0, 1, \ldots)$ *definisani iterativnom formulom*

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{2W_i^{(m)}}{1 + G_{1,i}^{(m)} + \sqrt{\left(1 + G_{1,i}^{(m)}\right)^2 + 4W_i^{(m)} S_i^{(m)}}}. \tag{5.11}$$

Tada, pod uslovom da je

$$\rho^{(0)} > 4(n-1)r^{(0)}, \tag{5.12}$$

za svako $i \in I_n$ *i* $m = 0, 1, \ldots$ *imamo*

$$1^\circ \qquad \zeta_i \in Z_i^{(m)};$$

$$2^\circ \qquad r^{(m+1)} < \frac{15(n-1)\left(r^{(m)}\right)^4}{\left(\rho^{(0)} - \frac{5}{4}r^{(0)}\right)^3}.$$

Dokaz. Dokazaćemo tvrđenje 1° pomoću matematičke indukcije. Pretpostavimo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za $i \in I_n$ i $m \geq 1$. Tada je $s_i^{(m)} \in S_i^{(m)}$ i, na osnovu (5.11) i inkluzivne izotonosti, sledi

$$\zeta_i \in z_i^{(m)} - \frac{2W_i^{(m)}}{1 + G_{1,i}^{(m)} + \sqrt{\left(1 + G_{1,i}^{(m)}\right)^2 + 4W_i^{(m)} S_i^{(m)}}} = Z_i^{(m+1)}.$$

Pošto je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$, dobijamo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $m = 1, 2, \ldots$.

Pokazaćemo sada da intervalni metod (5.11) ima red konvergencije jednak četiri (tvrđenje 2°). Ponovo koristimo matematičku indukciju i polazimo od $m = 0$. Jednostavnosti radi, svi indeksi su izostavljeni i sve veličine u prvoj iteraciji su označene simbolom $\widehat{\ }$.

Uvodimo nove skraćenice

$$\theta = \frac{r^3}{\rho^3} \cdot \frac{4(n-1)\alpha_n^2}{(1 - \alpha_n/4)^2}, \quad \eta_i = 1 + \frac{4W_i G_{2,i}}{(1 + G_{1,i})^2},$$

$$\lambda = 11(n-1)\frac{r^3}{\rho^3}, \qquad \omega_i = \frac{\theta}{|\eta_i|^{1/2} + (|\eta_i| - \theta)^{1/2}}.$$

Koristeći (5.12) i tvrđenja leme 5.1, nalazimo granice za ove veličine. Najpre, kako je funkcija $f(\alpha_n) := \alpha_n^2/(1-\alpha_n/4)^2$ monotono rastuća na intervalu $(0, e^{1/4})$, imamo $f(\alpha_n) < e^{1/2}/(1-e^{1/4}/4)^2 \approx 3.576$, odakle sledi

$$\theta = \frac{r^3}{\rho^3} \cdot \frac{4(n-1)\alpha_n^2}{(1-\alpha_n/4)^2} < 15(n-1)\frac{r^3}{\rho^3} < 0.06 \quad \text{za} \;\; n \geq 3. \tag{5.13}$$

Dalje, na osnovu tvrđenja (*iv*) leme 5.1 nalazimo

$$|\eta_i| = \left|1 + \frac{4W_i G_{2,i}}{(1+G_{1,i})^2}\right| > 1 - \frac{4|W_i G_{2,i}|}{|1+G_{1,i}|^2} > 1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Koristeći (5.12) i granice (5.13) i (5.14) za θ i η_i, nalazimo da je za $n \geq 3$ ispunjeno

$$\omega_i = \frac{\theta}{|\eta_i|^{1/2} + (|\eta_i| - \theta)^{1/2}} < \frac{15(n-1)(r^3/\rho^3)}{\sqrt{0.5} + \sqrt{0.5 - 0.06}} < 11(n-1)\frac{r^3}{\rho^3} = \lambda < 0.05. \tag{5.15}$$

Polazeći od iterativne formule (5.11) i uzimajući u obzir lemu 5.2 i tvrđenja (*i*) i (*iii*) leme 5.1, dobijamo

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}_i &\subset z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4W_i}{(1+G_{1,i})^2}\left\{G_{2,i}; \dfrac{\alpha_n(n-1)r^2}{\rho^3}\right\}}\right)} \\
&= z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\left(1 + \sqrt{\left\{\eta_i; \dfrac{4\alpha_n(n-1)|W_i|r^2}{|1+G_{1,i}|^2\rho^3}\right\}}\right)} \\
&\subseteq z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\left(1 + \sqrt{\left\{\eta_i; \dfrac{r^3}{\rho^3} \cdot \dfrac{4(n-1)\alpha_n^2}{(1-\alpha_n/4)^2}\right\}}\right)},
\end{aligned}$$

odnosno,

$$\widehat{Z}_i \subset z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\left(1 + \{\eta_i; \theta\}^{1/2}\right)}. \tag{5.16}$$

Primetimo da na osnovu (5.13) i (5.14) važi: $0 \notin \{\eta_i; \theta\}$. Koristimo (1.32) za izračunavanje kvadratnog korena i nalazimo

$$\begin{aligned}
\{\eta_i; \theta\}^{1/2} &= \left\{\eta_i^{1/2}; |\eta_i|^{1/2} - (|\eta_i| - \theta)^{1/2}\right\} = \left\{\eta_i^{1/2}; \frac{\theta}{|\eta_i|^{1/2} + (|\eta_i| - \theta)^{1/2}}\right\} \\
&= \{\eta_i^{1/2}; \omega_i\}.
\end{aligned}$$

Koristeći ovaj rezultat, iz (5.15) i (5.16) sledi

$$\widehat{Z}_i \subset z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\Big(1+\{\eta_i^{1/2};\omega_i\}\Big)} \subset z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\left\{1+\eta_i^{1/2};\ 11(n-1)\dfrac{r^3}{\rho^3}\right\}},$$

odnosno, kraće zapisano,

$$\widehat{Z}_i \subset z_i - \frac{2W_i}{(1+G_{1,i})\{v_i;\lambda\}}, \tag{5.17}$$

gde smo označili $v_i = 1+\eta_i^{1/2}$.

Dokažimo sada da inverzija diska $\{v_i;\lambda\}$ koji se javlja u (5.17) uvek postoji. Neka je $u_i = 4W_iG_{2,i}/(1+G_{1,i})^2$. Na osnovu tvrđenja (iv) leme 5.1 imamo da je $|u_i| < 0.5$, što znači da kompleksni broj u_i leži u disku $U := \{0;0.5\}$. Imajući u vidu da je

$$v_i^2 = \Big(1+\eta_i^{1/2}\Big)^2 = \big(1+\sqrt{1+u_i}\,\big)^2 = 2+u_i+2\sqrt{1+u_i},$$

pomoću inkluzivne izotonosti i (1.32) dobijamo

$$\begin{aligned} v_i^2 \in V := 2+U+2(1+U)^{1/2} &= \{2;0.5\}+2\{1;0.5\}^{1/2} \\ &= \{2;0.5\}+2\{1;1-\sqrt{1-0.5}\} \\ &\subset \{2;0.5\}+2\{1;0.3\} = \{4;1.1\}. \end{aligned}$$

Najzad, primenom (1.34) nalazimo

$$|v_i|^2 > |\mathrm{mid}\, V| - \mathrm{rad}\, V = 4-1.1 = 2.9. \tag{5.18}$$

Odavde je $|v_i| > \sqrt{2.9} > 1/20 > \lambda$ (na osnovu (5.15)), tako da $0 \notin \{v_i;\lambda\}$ i skup kompleksnih vrednosti na desnoj strani relacije (5.17) je zatvoren disk. Koristeći (1.28) relacija (5.17) postaje

$$\widehat{Z}_i \subset z_i - \frac{2W_i}{1+G_{1,i}}\left\{\frac{\bar{v}_i}{|v_i|^2-\lambda^2};\frac{\lambda}{|v_i|^2-\lambda^2}\right\}.$$

Iz poslednje inkluzije nalazimo gornju granicu veličine poluprečnika $\hat{r}_i$ diska $\widehat{Z}_i$:

$$\hat{r}_i = \mathrm{rad}\, \hat{Z}_i < \frac{2|W_i|}{|1+G_{1,i}|}\cdot\frac{\lambda}{|v_i|^2-\lambda^2}. \tag{5.19}$$

Koristeći procenu (5.15), tvrđenja (i) i (iii) leme 5.1 i (5.18), iz (5.19) dobijamo

$$\hat{r}_i < \frac{2\alpha_n r}{1-\alpha_n/4}\cdot\frac{11(n-1)r^3/\rho^3}{2.9-0.05^2}.$$

Na osnovu poslednje nejednakosti lako se pokazuje da važi

$$\hat{r}_i < 15(n-1)\frac{r^4}{\rho^3} \tag{5.20}$$

i koristeći uslov (5.12) dobijamo važnu relaciju

$$\hat{r}_i < 15(n-1)r\left(\frac{r}{\rho}\right)^3 < \frac{15}{64(n-1)^2}r < \frac{r}{17}. \tag{5.21}$$

Zbog činjenice da diskovi $Z_i^{(m)}$ i $Z_i^{(m+1)}$ moraju da imaju bar jednu zajedničku tačku (nulu ζ_i), jednostavnom geometrijskom konstrukcijom u radu [16] izvedena je sledeća nejednakost:

$$\rho^{(m+1)} \geq \rho^{(m)} - r^{(m)} - 3r^{(m+1)}. \tag{5.22}$$

Koristeći nejednakosti (5.21) i (5.22) za $m = 0$ nalazimo

$$\rho^{(1)} \geq \rho^{(0)} - r^{(0)} - 3r^{(1)} > 4(n-1)r^{(0)} - r^{(0)} - 3\,\frac{r^{(0)}}{17} > 17r^{(1)}\left(4(n-1) - 1 - \frac{3}{17}\right),$$

odakle sledi

$$\rho^{(1)} > 4(n-1)r^{(1)}. \tag{5.23}$$

Ovo je, zapravo, uslov (5.8) za vrednost indeksa $m = 1$, što znači da su sva tvrđenja leme 5.1 i leme 5.2 tačna za $m = 1$.

Koristeći definiciju rastojanja ρ i (5.23), za proizvoljan par indeksa $i, j \in I_n$ $(i \neq j)$ imamo

$$|z_i^{(1)} - z_j^{(1)}| \geq \rho^{(1)} > 4(n-1)r^{(1)} > 2r^{(1)} \geq r_i^{(1)} + r_j^{(1)}. \tag{5.24}$$

Odavde, na osnovu (1.27) zaključujemo da su i diskovi $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_n^{(1)}$, formirani primenom inkluzivnog algoritma (5.11), međusobno disjunktni.

Primenom matematičke indukcije, sa istim rasuđivanjem koje je korišćeno pri izvođenju (5.20), (5.21), (5.23) i (5.24) (što čini deo dokaza kada je $m = 1$), lako se dokazuje da su, za svako $m = 0, 1, \ldots$, diskovi $Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)}$ razdvojeni i da su ispunjene sledeće nejednakosti:

$$r^{(m+1)} < \frac{15(n-1)\left(r^{(m)}\right)^4}{\left(\rho^{(m)}\right)^3}, \tag{5.25}$$

$$r^{(m+1)} < \frac{r^{(m)}}{17}, \tag{5.26}$$

$$\rho^{(m)} > 4(n-1)r^{(m)}. \tag{5.27}$$

Ove nejednakosti slede iz (5.20), (5.21) i (5.23), respektivno. Napomenimo još da poslednja nejednakost (5.27) znači da tvrđenja lema 5.1 i 5.2 važe u svakom iterativnom koraku m.

Sukcesivnom primenom (5.22) i (5.26) dobijamo

$$\begin{aligned}
\rho^{(m)} &> \rho^{(m-1)} - r^{(m-1)} - 3\,\frac{r^{(m-1)}}{17} = \rho^{(m-1)} - r^{(m-1)}(1+3/17)\\
&> \rho^{(m-2)} - r^{(m-2)} - 3\,\frac{r^{(m-2)}}{17} - \frac{r^{(m-2)}}{17}(1+3/17)\\
&= \rho^{(m-2)} - r^{(m-2)}\left(1+\frac{4}{17}+\frac{4}{17^2}-\frac{1}{17^2}\right)\\
&\ \ \vdots\\
&> \rho^{(0)} - r^{(0)}\left(1+\frac{4}{17}+\frac{4}{17^2}+\cdots+\frac{4}{17^{m-1}}-\frac{1}{17^{m-1}}\right)\\
&> \rho^{(0)} - \frac{5}{4}r^{(0)}.
\end{aligned}$$

Na osnovu poslednje nejednakosti i (5.25) nalazimo

$$r^{(m+1)} < \frac{15(n-1)\left(r^{(m)}\right)^4}{\left(\rho^{(0)}-\frac{5}{4}r^{(0)}\right)^3}. \tag{5.28}$$

Striktna nejednakost u (5.28) ukazuje da je red konvergencije inkluzivnog metoda (5.11) najmanje četiri. Međutim, na osnovu tvrđenja (i) i (ii) leme 5.2 zaključujemo da je $|W_i| = \mathcal{O}(r)$ i $|G_{k,i}| = \mathcal{O}(r)$. Pored toga, iz (5.9) sledi rad $S_i = \mathcal{O}(r^2)$. Ove procene daju u konačnom rezultatu samo $r^{(m+1)} = O\left((r^{(m)})^4\right)$, što znači da je red konvergencije procesa (5.11) tačno četiri. ■

5.2 Metod sa Weierstrassovom korekcijom

Konvergencija inkluzivnog metoda Eulerovog tipa (5.5) može biti povećana bez dodatnih računskih operacija koristeći pristup koji je prikazan u radovima [8], [34] i [33]. I u ovom odeljku koristimo prethodnu notaciju i oznake (5.1), (5.6) i (5.7). Najpre se pokazuje da nejednakost (5.12) garantuje implikaciju $\zeta_i \in Z_i \Rightarrow \zeta_i \in Z_i - W_i$ u svakoj iteraciji. Zatim, uzimanjem pomerenog diska $Z_i - W_i$ umesto diska Z_i u (5.5), konstruišemo

Algoritam 5.2 *Neka su* $(Z_1,\ldots,Z_n) =: (Z_1^{(0)},\ldots,Z_n^{(0)})$ *početni diskovi takvi da je* $\zeta_i \in Z_i$ $(i \in I_n)$. *Jedan korak modifikovanog inkluzivnog algoritma Eulerovog tipa glasi* $(Z_1,\ldots,Z_n) \mapsto (\hat{Z}_1,\ldots,\hat{Z}_n)$,

$$\hat{Z}_i := z_i - 2W_i\mathrm{INV}_1\left(1+G_{1,i}+\sqrt{(1+G_{1,i})^2+4W_i\sum_{j\neq i}\frac{W_j\mathrm{INV}_2(Z_i-W_i-z_j)}{z_i-z_j}}\right), \tag{5.29}$$

gde INV_1 *i* INV_2 *označavaju inverzije diskova date sa* (1.28) *i* (1.29), *tj.* $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^I\}$.

Korišćenjem koncepta R-reda konvergencije (odeljak 2.1), koji su uveli Ortega i Rheinboldt [30], pokazaćemo da je R-red konvergencije poluprečnika inkluzivnog metoda (5.29) najmanje $2+\sqrt{7} \cong 4.646$ ako je $\mathrm{INV}_2 = ()^{-1}$, odnosno 5 u ostalim slučajevima.

Kao što je pomenuto u [43], povećanje brzine konvergencije algoritma 5.2 u odnosu na algoritam 5.1 prouzrokovano je vrlo brzom konvergencijom nizova $\{z_i^{(m)}\}$ ($i \in I_n$; $m = 0, 1, \ldots$) centara diskova, koji ima red konvergencije *pet.* Ovo ubrzanje konvergencije ostvareno je korišćenjem bolje aproksimacije $\operatorname{mid}(Z_i - W_i) = z_i - W_i$ nule ζ_i umesto prethodne $\operatorname{mid} Z_i = z_i$.

Napisaćemo (5.29) na sledeći način:

$$\hat{Z}_i := z_i - \frac{2W_i}{1+G_{1,i}} \mathrm{INV}_1 \left(1 + \sqrt{1+4T_i}\right), \tag{5.30}$$

gde je

$$T_i = \frac{W_i}{(1+G_{1,i})^2} \sum_{j \neq i} \frac{W_j \mathrm{INV}_2(Z_i - W_i - z_j)}{z_i - z_j} := \{t_i; \eta_i\}. \tag{5.31}$$

Uvodimo sledeće oznake:

$$v_{ij} := z_i - W_i - z_j, \qquad H_i = 1 + \sqrt{1+4T_i} =: \{u_i, d_i\}. \tag{5.32}$$

I u ovom razmatranju koristimo uslov

$$\rho > 4(n-1)r. \tag{5.33}$$

Primetimo da na osnovu (1.28) i (1.29) za $\mathrm{INV} \in \{()^{-1}, ()^I\}$ i $Z = \{z\,; r\}$ važi:

$$|\operatorname{mid} \mathrm{INV}(Z)| \le \frac{|z|}{|z|^2 - r^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{rad} \mathrm{INV}(Z) \le \frac{r}{|z|(|z|-r)}. \tag{5.34}$$

Najpre dokazujemo dve leme koje su potrebne za dokaz teoreme o R-redu konvergencije.

Lema 5.3 *Ako je uslov* (5.33) *ispunjen, tada implikacija*

$$\zeta_i \in Z_i \Rightarrow \zeta_i \in Z_i - W_i \tag{5.35}$$

važi za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dokaz. Kako je $z \in \{c; r\} \Longleftrightarrow |z - c| \le r$, dovoljno je pokazati implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| = |\epsilon_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - W_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Neka je

$$b_j^{(i)} := \frac{\epsilon_j}{z_i - z_j}, \quad (j = 1, \ldots, n;\ j \ne i)$$

i neka je

$$M_\mu := \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_\mu} b_{j_1}^{(i)} b_{j_2}^{(i)} \cdots b_{j_\mu}^{(i)}, \quad M_0 = 1$$

simetrična funkcija u odnosu na $b_j^{(i)}$. Očigledno je da važi

$$|M_\mu| \le \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_\mu} |b_{j_1}^{(i)}| \cdot |b_{j_2}^{(i)}| \cdots |b_{j_\mu}^{(i)}| \le \binom{n-1}{\mu} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\mu .$$

Korišćenjem uslova (5.33) i dokaza tvrđenja (i) leme 5.1 dobijamo

$$\begin{aligned} |z_i - W_i - \zeta_i| &= \left| \epsilon_i - \epsilon_i \cdot \prod_{j \ne i} \left(1 + \frac{\epsilon_j}{z_i - z_j}\right) \right| = |\epsilon_i| \left| 1 - \sum_{\mu=0}^{n-1} M_\mu \right| \le |\epsilon_i| \sum_{\mu=1}^{n-1} |M_\mu| \\ &\le |\epsilon_i| \sum_{\mu=1}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\mu = |\epsilon_i| \left[\left(1 + \frac{r}{\rho}\right)^{n-1} - 1 \right] \\ &\le |\epsilon_i| \left[\left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right)^{n-1} - 1 \right] < |\epsilon_i| \left(e^{1/4} - 1\right) \\ &< \frac{1}{3} |\epsilon_i| < r_i, \end{aligned}$$

čime je implikacija (5.35) dokazana. ∎

Lema 5.4 *Ako je uslov* (5.33) *ispunjen i ako je* $\zeta_i \in Z_i$ *za svako* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *tada inverzije iz* (5.29) *postoje, tj.* $0 \notin Z_i - W_i - z_j$ *i* $0 \notin H_i$ $(i \in I_n)$.

Dokaz. Na osnovu prethodno uvedenih oznaka (5.32), imamo da je $Z_i - W_i - z_j = \{v_{ij}; r_i\}$. Korišćenjem tvrđenja (i) leme 5.1 i uslova (5.33) dobijamo

$$|v_{ij}| = |z_i - W_i - z_j| > |z_i - z_j| - |W_i| > \rho - \alpha_n r > \rho - 2r > (4n-6)r > r \ge r_i. \tag{5.36}$$

Odakle zaključujemo da važi $0 \notin Z_i - W_i - z_j$.

Drugo tvrđenje leme 5.4 biće dokazano korišćenjem procene apsolutne vrednosti centra u_i i poluprečnika d_i diska H_i, posredno, pomoću procene modula centra t_i i poluprečnika η_i diska T_i datog sa (5.31). Primenom (5.34), (5.36), dokaza leme 5.1 i uslova (5.33) nalazimo

$$\begin{aligned} |t_i| = |\mathrm{mid}\, T_i| &\le \frac{|W_i|}{|1 + G_{1,i}|^2} \sum_{j \ne i} \frac{|W_j||\mathrm{mid\ INV}_2(Z_i - W_i - z_j)|}{|z_i - z_j|} \\ &< \frac{\alpha_n^2 \epsilon^2}{(1 - \alpha_n/4)^2} \frac{n-1}{\rho} \frac{|v_{ij}|}{|v_{ij}|^2 - r^2} < \frac{\alpha_n^2 \epsilon^2}{(1 - \alpha_n/4)^2} \frac{(n-1)(\rho - 2r)}{\rho(\rho - r)(\rho - 3r)} \\ &< \left(\frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n/4}\right)^2 \frac{4n-6}{4(4n-5)(4n-7)} < \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

Na osnovu ovog sledi

$$t_i \in \left\{0; \frac{5}{32}\right\},$$

odakle je, koristeći osnovne operacije kompleksne kružne aritmetike kao i (1.32),

$$1 + 4t_i \in \left\{1; \frac{5}{8}\right\} \implies |1 + 4t_i| > 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

i

$$1 + \sqrt{1 + 4t_i} \in \left\{2; \frac{5/8}{1 + \sqrt{1 - 5/8}}\right\} \subset \left\{2; \frac{5}{8}\right\} \implies |1 + \sqrt{1 + 4t_i}| > 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}.$$

Odavde dobijamo donju granicu za $|u_i|$,

$$|u_i| = |1 + \sqrt{1 + 4t_i}| > \frac{11}{8}.$$

Sličnim rasuđivanjem tražimo i gornju granicu za d_i. Najpre procenjujemo veličinu poluprečnika $\eta_i = \operatorname{rad} T_i$

$$\eta_i = \operatorname{rad} T_i \leq \frac{|W_i|}{|1 + G_{1,i}|^2} \sum_{j \neq i} \frac{|W_j| \operatorname{rad} \mathrm{INV}_2(Z_i - W_i - z_j)}{|z_i - z_j|}$$

$$< \frac{\alpha_n^2 \epsilon^2}{(1 - \alpha_n/4)^2} \frac{n-1}{\rho} \frac{r}{|v_{ij}|(|v_{ij}| - r)} < \frac{\alpha_n^2 \epsilon^2}{(1 - \alpha_n/4)^2} \frac{(n-1)r}{\rho(\rho - 2r)(\rho - 3r)}$$

$$< \left(\frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n/4}\right)^2 \frac{1}{4(4n-6)(4n-7)} < \frac{1}{32}.$$

Primenjujući poslednje rezultate i (1.32) dobijamo

$$d_i = \operatorname{rad}\left(\sqrt{1 + 4T_i}\right) < \operatorname{rad}\left(\sqrt{\{1 + 4t_i;\ 4\eta_i\}}\right) = \sqrt{|1 + 4t_i|} - \sqrt{|1 + 4t_i| - 4\eta_i}.$$

$$= \frac{4\eta_i}{\sqrt{|1 + 4t_i|} + \sqrt{|1 + 4t_i| - 4\eta_i}} < \frac{\frac{4\alpha_n^2 \epsilon^2}{(1 - \alpha_n/4)^2} \frac{(n-1)r}{\rho(\rho - 2r)(\rho - 3r)}}{\sqrt{3/8} + \sqrt{2/8}} < \frac{1}{8}$$

Na osnovu prethodnog, lako proveravamo da važi

$$|u_i| - d_i > \frac{5}{4}$$

što znači da $0 \notin \{u_i; d_i\} = H_i$.

Ovim je dokaz leme 5.4 završen ■

Teorema 5.2 *Neka su* $(Z_1,\ldots,Z_n)=:(Z_1^{(0)},\ldots,Z_n^{(0)})$ *početni diskovi takvi da je* $\zeta_i\in Z_i$ $(i\in I_n)$ *i neka* $\{Z_i^{(m)}\}$ *označava niz diskova dobijenih formulom* (5.29), *gde je* $m=0,1,\ldots$ *indeks iteracije. Ako je uslov*

$$\rho^{(0)}>4(n-1)r^{(0)} \tag{5.37}$$

zadovoljen, pri čemu je

$$r^{(m)}:=\max_{1\le i\le n}\operatorname{rad}Z_i^{(m)}$$

i

$$\rho^{(m)}:=\min_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}}\left\{\left|\operatorname{mid}Z_i^{(m)}-\operatorname{mid}Z_j^{(m)}\right|-\operatorname{rad}Z_j^{(m)}\right\},$$

tada je za svako $i\in I_n$ *i* $m=0,1,\ldots$ *ispunjeno*

$$\zeta_i\in Z_i^{(m)}$$

i nizovi poluprečnika $\{\operatorname{rad}Z_i^{(m)}\}$ $(i\in I_n;\ m=0,1,\ldots)$ *monotono teže ka nuli.*

Dokaz. Tvrđenje ove teoreme dokazujemo matematičkom indukcijom pri čemu u dokazu razmatramo tipičan korak za $m=0$ izostavljajući pri tom indeks iteracije m. Kao i ranije, koristimo oznake Z_i, $\hat Z_i$, r_i, $\hat r_i$, z_i, $\hat z_i$, r, $\hat r$, ρ, $\hat\rho$, umesto $Z_i^{(m)}, Z_i^{(m+1)}, r_i^{(m)}, r_i^{(m+1)}, z_i^{(m)}$, $z_i^{(m+1)}$, $r^{(m)}$, $r^{(m+1)}$, $\rho^{(m)}$, $\rho^{(m+1)}$, respektivno. Tako su $\hat Z_1,\ldots,\hat Z_n$ poboljšani diskovi dobijeni formulom (5.29), koji imaju centre $\hat z_1,\ldots,\hat z_n$ i poluprečnike $\hat r_1,\ldots,\hat r_n$.

Koristeći (5.30) i (5.32) dobijamo sledeći oblik iterativne formule (5.29)

$$\hat Z_i=z_i-\frac{2W_i}{1+G_{1,i}}\mathrm{INV}_1(H_i), \tag{5.38}$$

odakle, uz primenu (5.34), neposredno zaključujemo da je

$$\hat r_i=\operatorname{rad}\hat Z_i\le\frac{2|W_i|}{|1+G_{1,i}|}\frac{d_i}{|u_i|(|u_i|-d_i)}.$$

Na osnovu tvrđenja (i) leme 5.1 i procena za d_i i u_i iz dokaza leme 5.4, dobijamo

$$\begin{aligned}\hat r_i&<\frac{8(n-1)\alpha_n^3|\epsilon_i|\epsilon^2r_i}{(1-\alpha_n/4)^3|u_i|(|u_i|-d_i)\rho(\rho-2r)(\rho-3r)}\\&<\frac{256\cdot(n-1)\alpha_n^3}{55\cdot(1-\alpha_n/4)^3}\cdot\frac{|\epsilon_i|\epsilon^2r_i}{\rho(\rho-2r)(\rho-3r)}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

Daljim sređivanjem i primenom uslova (5.37), imamo

$$\hat r_i<\frac{64}{55}\cdot\frac{\alpha_n^3}{(1-\alpha_n/4)^3}\cdot\frac{1}{(\rho/r-2)(\rho/r-3)}\cdot r_i<\frac{8}{(4n-6)(4n-7)}\cdot r_i<\frac{4}{15}r_i, \tag{5.40}$$

pod pretpostavkom da je $n \geq 3$. Sa druge strane, kombinovanjem rezultata leme 5.3 i primenom svojstva inkluzije iz odeljka 1.3 na relaciju fiksne tačke (5.3), dobijamo

$$\zeta_i \in \hat{Z}_i, \qquad \text{tj.} \qquad |\hat{z}_i - \zeta_i| < \hat{r}_i < \frac{4}{15} r_i.$$

Kako je i $\zeta_i \in Z_i$, tj. $|z_i - \zeta_i| < r$, koristeći nejednakost trougla imamo

$$|\hat{z}_i - z_i| < \frac{19}{15} r_i.$$

Imajući u vidu definiciju veličine ρ, poslednju nejednakost, kao i (4.10), dobijamo sledeću procenu

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| > \rho + r_j - \frac{19}{15} r_i - \frac{19}{15} r_j$$

$$> 4(n-1)r - \frac{23}{15} r > \left(15(n-1) - \frac{23}{4}\right) \hat{r}.$$

Na osnovu ovoga nalazimo da za svaki par $i, j \in I_n$ $(i \neq j)$ važi

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| > 2\hat{r} \geq \hat{r}_i + \hat{r}_j,$$

što implicira da su diskovi $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_n$ uzajamno disjunktni (videti (1.27)). Takođe, imamo da je za proizvoljan par indeksa $i, j \in I_n$ $(i \neq j)$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| - \hat{r}_j > \left(15(n-1) - \frac{23}{4}\right) \hat{r} - \hat{r} > 4(n-1)\hat{r}.$$

Odavde neposredno sledi da je ispunjen uslov

$$\hat{\rho} > 4(n-1)\hat{r}.$$

Na ovaj način je pokazano da početni uslov (5.37) implicira nejednakost koja je istog oblika ali za indeks $m = 1$. Primetimo da procena (5.40) oblika $r^{(1)} < 4r^{(0)}/15$ daje uvid u faktor kontrakcije novih kružnih aproksimacija $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_n^{(1)}$.

Ponavljanjem prikazanog postupka za proizvoljan indeks $m \geq 0$ mogu se izvesti slične relacije za indeks $m+1$. Kako su ove relacije već dokazane za $m = 0$, na osnovu matematičke indukcije sledi da, pod uslovom (5.37), one važe za svako $m \geq 1$. Specijalno, imamo da je za svako $m = 1, 2, \ldots$

$$\rho^{(m)} > 4(n-1) r^{(m)} \tag{5.41}$$

i

$$r^{(m+1)} < \frac{4}{15} r^{(m)}. \tag{5.42}$$

Iz ovog razloga važe i tvrđenja lema 5.1, 5.3 i 5.4, za svako $m = 0, 1, \ldots$.

Za svako fiksno $i \in I_n$, na osnovu leme 5.3 imamo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)} - W_i^{(m)}$ i primenom osobine inkluzivne izotonosti (1.35) na relaciju nepokretne tačke (5.3) dobijamo $\zeta_i \in Z_i^{(m+1)}$. Kako je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$, na osnovu matematičke indukcije sledi da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in I_n$ i $m = 0, 1, \ldots$.

Na osnovu tvrđenja leme 5.4 zaključujemo da su inverzije iz (5.29) definisane u svakom iterativnom koraku tako da je simultani iterativni metod (5.29) dobro definisan. Osim toga, kako je $\rho^{(m)} > 2r^{(m)}$, sledi da su diskovi $Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)}$ u parovima razdvojeni. Konačno, nejednakost (5.40) pokazuje da nizovi poluprečnika $\{r_i^{(m)}\}$ $(i \in I_n;\ m = 0, 1, \ldots)$ monotono konvergiraju ka nuli. ■

U cilju određivanja R-reda konvergencije inkluzivnog postupka definisanog formulom (5.29), bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je uslov (5.37) ispunjen, što dovodi do (5.41). Imajući u vidu da su nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ fiksne i pripadaju diskovima $Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)}$, veličine koje se pojavljuju u lemama 5.1, 5.3 i 5.4 su ograničene. Prema tome, možemo koristiti Landauov simbol $\mathcal{O}()$ da bismo naglasili asimptotsko ponašanje i izostavili granice. Osim toga, ovakvim načinom procenjivanja izbegavaju se glomazna računanja i, istovremeno, omogućena je kontrola ponašanje nizova $\{\text{mid } Z_i^{(m)} - \zeta_i\}$ i $\{\text{rad } Z_i^{(m)}\}$ $(i \in I_n;\ m = 0, 1, \ldots)$. Za dva izraza, $izraz_1(i, m)$ i $izraz_2(i, m)$, koji zavise od i, m, strukture polinoma P i početne distribucije aproksimacija nula, važi ekvivalencija

$$izraz_1(i,m) = \mathcal{O}(izraz_2(i,m)) \Longleftrightarrow \max_{1\le i\le n} \sup_{m=0,1,\ldots} \left|\frac{izraz_1(i,m)}{izraz_2(i,m)}\right| < +\infty.$$

Ovaj prilaz će biti korišćen za kvalitativnu analizu ponašanja centara i poluprečnika kružnih aproksimacija $Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)}$ u cilju nalaženja R-reda konvergencije.

Za svako $i \in I_n$ i $m = 0, 1, \ldots$, greška, maksimum modula greške i najveći poluprečnik u iterativnom koraku m su, respektivno,

$$\epsilon_i^{(m)} := z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad \epsilon^{(m)} := \max_{1\le i\le n} |\epsilon_i^{(m)}|, \quad r^{(m)} := \max_{1\le i\le n} r_i^{(m)}.$$

U daljem razmatranju izostavljamo indeks iteracije u koraku m, dok za označavanje veličina u sledećem koraku $(m+1)$ koristimo simbol $\widehat{\ }$. Na primer, koristimo oznaku ϵ umesto $\epsilon^{(m)}$, odnosno $\hat{\epsilon}$ umesto $\epsilon^{(m+1)}$.

Lema 5.5 *Neka je*

$$a = \begin{cases} 1\ , & \textit{ako je } \mathrm{INV}_1 = ()^{-1} \\ 0\ , & \textit{ako je } \mathrm{INV}_1 = ()^{I} \end{cases} \quad i \quad b = \begin{cases} 1\ , & \textit{ako je } \mathrm{INV}_2 = ()^{-1} \\ 0\ , & \textit{ako je } \mathrm{INV}_2 = ()^{I} \end{cases},$$

gde se inverzije diskova INV_1 *i* INV_2 *javljaju u formuli* (5.29). *Tada za inkluzivni metod* (5.29) *važe relacije*

(*i*) $\hat{r} = \mathcal{O}(r\epsilon^3)$;

(*ii*) $\hat{\epsilon} = a\mathcal{O}(\epsilon^5 r^2) + \mathcal{O}(\epsilon^5) + b\mathcal{O}(\epsilon^3 r^2)$.

Dokaz.
Tvrđenje (i). Koristeći (5.39) i uslov (5.33) dobijamo:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_i \le \hat{r} \quad &< \frac{256 \cdot (n-1)\alpha_n^3 \epsilon^3 r}{55 \cdot (1-\alpha_n/4)^3 \rho^3 (1-2r/\rho)(1-3r/\rho)} \\
&< \frac{256 \cdot (n-1)\alpha_n^3}{55 \cdot (1-\alpha_n/4)^3 \left(1 - \dfrac{2}{4(n-1)}\right)\left(1 - \dfrac{3}{4(n-1)}\right)} \cdot \frac{\epsilon^3 r}{\rho^3}. \\
&\le \frac{256 \cdot (n-1)\alpha_n^3}{55 \cdot (1-\alpha_n/4)^3 \left(1 - \dfrac{2}{8}\right)\left(1 - \dfrac{3}{8}\right)} \frac{\epsilon^3 r}{\rho^3} \le \frac{68(n-1)\epsilon^3 r}{\rho^3}.
\end{aligned}$$

Pošto je poznato da je ρ ograničeno (zapravo, teži ka $\min\limits_{i \ne j}\{|\zeta_i - \zeta_j| - r_j\}$), dobijamo

$$\hat{r} = \mathcal{O}(r\epsilon^3),$$

što dokazuje tvrđenje (i).

Tvrđenje (ii). Iz relacije fiksne tačke (5.3) dobijamo sledeći izraz za Weierstrassovu korekciju

$$W_i = \frac{\epsilon_i}{2}(1 + G_{1,i})(1 + \theta_i), \tag{5.43}$$

gde je

$$\theta_i = \sqrt{1 + \frac{4W_i}{(1+G_{1,i})^2} \sum_{j \ne i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}}. \tag{5.44}$$

Definišimo sledeće veličine:

$$q_i(b) := \sqrt{1 + \frac{4W_i}{(1+G_{1,i})^2} \sum_{j \ne i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)} \frac{1}{v_{ij}(1 - br_i^2/|v_{ij}|^2)}} = u_i - 1 \quad (b = 0 \text{ ili } 1),$$

$$l_i := \frac{d_i^2}{|u_i|^2}.$$

Koristeći (5.43) i imajući u vidu (5.32) i (5.38), nalazimo

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i}} \cdot \frac{1}{u_i(1 - ad_i^2/|u_i|^2)} = \epsilon_i - \epsilon_i \frac{1 + \theta_i}{(1 + q_i(b))(1 - al_i)} \\
= \epsilon_i \frac{q_i(b) - al_i - al_i q_i(b) - \theta_i}{(1 + q_i(b))(1 - al_i)}.
\end{aligned}$$

Dalje, sređujemo razliku

$$q_i(b)-\theta_i=\frac{q_i(b)^2-\theta_i^2}{q_i(b)+\theta_i}=\frac{4W_i}{(1+G_{1,i})^2}\,\frac{\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{z_i-z_j}\left[\frac{1}{v_{ij}(1-br_i^2/|v_{ij}|^2)}-\frac{1}{\zeta_i-z_j}\right]}{q_i(b)+\theta_i}$$

$$=\frac{4W_i}{(1+G_{1,i})^2}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{z_i-z_j}\cdot\frac{\zeta_i-z_i-W_i+br_i^2v_{ij}/|v_{ij}|^2}{v_{ij}(1-br_i^2/|v_{ij}|^2)(\zeta_i-z_j)}}{q_i(b)+\theta_i}.$$

Očigledno je da važi

$$1+G_{1,i}=\mathcal{O}(1),\quad z_i-\zeta_j=\mathcal{O}(1),\quad z_i-z_j=\mathcal{O}(1)\quad q_i(b)=\mathcal{O}(1),\quad \theta_i=\mathcal{O}(1).$$

Na osnovu dokaza leme 5.4 zaključujemo

$$u_i=\mathcal{O}(1),\qquad v_{ij}=\mathcal{O}(1),\qquad d_i=\mathcal{O}(\epsilon^2 r),$$

na osnovu čega je

$$l_i=\mathcal{O}(\epsilon^4 r^2),\qquad (1+q_i(b))(1-al_i)=\mathcal{O}(1),\qquad r_i^2v_{ij}/|v_{ij}|^2=\mathcal{O}(r^2).$$

Koristeći (5.43) dolazimo do sledećeg rezultata

$$W_i=\mathcal{O}(\epsilon),$$

dok s obzirom na činjenicu da je red konvergencije Weierstrassovog metoda jednak dva imamo

$$\zeta_i-z_i-W_i=\mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Uzimajući u obzir sve prethodne procene, dobijamo

$$q_i(b)-\theta_i=\mathcal{O}(\epsilon^4)+b\mathcal{O}(\epsilon^2 r^2),$$

tako da je

$$\hat{\epsilon}=\epsilon\big[a\mathcal{O}(\epsilon^4 r^2)+\mathcal{O}(\epsilon^4)+b\mathcal{O}(\epsilon^2 r^2)\big],$$

i, najzad,

$$\hat{\epsilon}=a\mathcal{O}(\epsilon^5 r^2)+\mathcal{O}(\epsilon^5)+b\mathcal{O}(\epsilon^3 r^2),$$

čime je dokaz tvrđenja (ii) završen. ■

U cilju određivanja R-reda konvergencije intervalnog iterativnog metoda (5.29) kada je $b=1$ (tj. kada je $\mathrm{INV}_2=()^{-1}$), koristićemo rezultate iz teorije iterativnih procesa navedene u odeljku 2.1. Brzina konvergencije metoda (5.29) razmatrana je u sledećoj teoremi.

Teorema 5.3 *Neka* $O_R(5.29)$ *označava R-red konvergencije intervalnog iterativnog metoda* (5.29), *gde je* $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^I\}$. *Tada je*

$$O_R(5.29) \geq \begin{cases} 2+\sqrt{7} & \textit{ako je } \mathrm{INV}_2 = ()^{-1}, \\ \\ 5 & \textit{ako je } \mathrm{INV}_2 = ()^I. \end{cases}$$

Pri dokazivanju ove teoreme, koristimo lemu 2.2. Takođe, moguć je i drugačiji pristup primenom leme 2.1 uz prethodno izvođenje relacije

$$\epsilon^{(m+2)} \leq K_m \left(\epsilon^{(m+1)}\right)^4 \left(\epsilon^{(m)}\right)^3.$$

Dokaz. Na osnovu tvrđenja (*ii*) leme 5.5, uzimajući u obzir činjenicu da parametri a i b mogu da budu samo 0 ili 1, lako dobijamo da je

$$\hat{\epsilon} = \begin{cases} \mathcal{O}(\epsilon^3 r^2) & \text{ako je } b = 1, \\ \\ \mathcal{O}(\epsilon^5) & \text{ako je } b = 0. \end{cases} \tag{5.45}$$

Razmatraćemo svaki slučaj posebno.

- $b = 1$ (tj. $\mathrm{INV}_2 = ()^{-1}$):

  Koristeći (5.45) i tvrđenje (*i*) leme 5.5, imamo da je

$$\hat{\epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^3 r^2), \qquad \hat{r} = \mathcal{O}(\epsilon^3 r).$$

Na način opisan u lemi 2.2 formiramo R-matricu F_2, najpre za ovaj slučaj. Dobijamo matricu $F_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, koja ima spektralni radijus $\sigma(F_2) = 2 + \sqrt{7}$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $\boldsymbol{x}_\sigma = (1/2 + \sqrt{5}/2, 1) > 0$. Na osnovu tvrđenja leme 2.2 nalazimo da je

$$O_R(5.29) \geq \sigma(F_2) = 2 + \sqrt{7} \cong 4.646.$$

- $b = 0$ (tj. $\mathrm{INV}_2 = ()^I$):

  Na sličan način, nalazimo

$$\hat{\epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^5), \qquad \hat{r} = \mathcal{O}(\epsilon^3 r).$$

Ponovo formiramo R-matricu, $F_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, pri čemu je $\sigma(F_2) = 5$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $\boldsymbol{x}_\sigma = (4/3, 1) > 0$. Odavde, uz pomoć leme 2.2, zaključujemo da je

$$O_R(5.29) \geq \sigma(F_2) = 5.$$

Ovim je dokaz teoreme 5.3 završen. ■

5.3 Numerički primeri

U ovom odeljku ćemo na konkretnim primerima uporediti karakteristike intervalnih algoritama (5.5) i (5.29). Primeri pokazuju da, bez obzira na izbor inverzija INV_1 i INV_2, metod sa Weierstrassovom korekcijom (5.29) brže konvergira počev od drugog iterativnog koraka. Razlog za to je, kao što je već napomenuto, vrlo brza konvergencija nizova centara aproksimativnih diskova $\{\mathrm{mid}\, Z_i^{(m)}\}$ $(i \in I_n = \{1,\ldots,n\};\ m = 0,1,\ldots)$ ka odgovarajućim nulama ζ_i datog polinoma.

Podsećamo da je u prethodnim odeljcima dokazano da metodi (5.5) i (5.29) konvergiraju ako je za $m = 0$ ispunjen uslov

$$\rho^{(m)} > 4(n-1)r^{(m)}, \tag{5.46}$$

gde je kao i ranije n stepen posmatranog polinoma i

$$r^{(m)} = \max_{1\le i\le n} r_i^{(m)}, \quad \rho^{(m)} = \min_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}| - r_j^{(m)}\}.$$

U prvom primeru analiziramo slučaj kada je uslov koji garantuje konvergenciju ispunjen. Drugi i treći primer pokazuju da je taj uslov još uvek strog (iz razloga što je dovoljan ali ne i potreban). U trećem primeru ispitujemo ponašanje metoda (5.29) za različite izbore inverzija INV_1 i INV_2.

Za upoređivanje rezultata u iterativnom koraku m $(m = 0,1,\ldots)$, koristimo vrednosti $r_i^{(m)} = \mathrm{rad}\, Z_i^{(m)}$, $r^{(m)}$, i module grešaka $|\epsilon_i^{(m)}|$ i $\epsilon^{(m)}$ definisane pomoću

$$\epsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i^{(m)}, \qquad \epsilon^{(m)} = \max_{1\le i\le n} |\epsilon_i^{(m)}|,$$

pri čemu je $z_i^{(m)} = \mathrm{mid}\, Z_i^{(m)}$ i $i \in I_n$.

Radi kraćeg zapisivanja numeričkih rezultata, u tabelama koje slede, za veličinu oblika $a \cdot 10^b$ koristimo oznaku $a(b)$. Napominjemo da u svim primerima u svakom iterativnom koraku m $(m = 0,1,\ldots)$ za svako $i \in I_n$ važi $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$.

Primer 1.

Razmatramo najpre polinom petog stepena,

$$P(z) = z^5 - 26z^4 + 505z^3 - 3850z^2 - 12000z - 80000, \tag{5.47}$$

čije su nule $\zeta_1,\ldots,\zeta_5$, diskovi koji su uzeti kao početne aproksimacije $Z_i^{(0)} = \{\, z_i^{(0)};\ r_i^{(0)}\}$ $(i = 1,\ldots,5)$ i rastojanja nula od centara početnih diskova $|\epsilon_1^{(0)}|,\ldots,|\epsilon_5^{(0)}|$ dati u tabeli 5.1.

U ovom primeru, vrednosti za n, $\rho^{(0)}$ i $r^{(0)}$ su

$$n = 5, \qquad \rho^{(0)} \cong 9.62, \qquad r^{(0)} = 0.6,$$

i uslov (5.46) za $m = 0$ jeste ispunjen.

i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$	$\lvert\epsilon_i^{(0)}\rvert$
1	$8+16i$	$\{\ 7.7+15.8i;\ 0.5\ \}$	0.36
2	$8-16i$	$\{\ 8.3-16.4i;\ 0.6\ \}$	0.50
3	$5i$	$\{\ 0.2+\ 5.3i;\ 0.4\ \}$	0.36
4	$-\ 5i$	$\{-0.4-\ 4.8i;\ 0.5\ \}$	0.45
5	10	$\{\ 10.3+\ 0.5i;\ 0.6\ \}$	**0.58**

Tabela 5.1: Nule polinoma (5.47) i početni diskovi

Tabela 5.2 pokazuje uporedne rezultate simultanih intervalnih procesa (5.5) i (5.29). Kod metoda (5.29) izabrano je $\mathrm{INV}_1 = \mathrm{INV}_2 = ()^I$, tj. računamo inverzije diskova koristeći formulu (1.29). Veličine $\epsilon^{(1)}$, $r^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ i $r^{(2)}$ za oba primenjena metoda prikazane su u boldu.

Metod	(5.5)		(5.29) $_{\mathrm{INV}_1=\mathrm{INV}_2=()^I}$	
i	$\lvert\epsilon_i^{(1)}\rvert$	$r_i^{(1)}$	$\lvert\epsilon_i^{(1)}\rvert$	$r_i^{(1)}$
1	5.45(-6)	2.33(-5)	2.38(-7)	2.32(-5)
2	3.10(-5)	4.63(-5)	2.02(-6)	5.06(-5)
3	3.78(-5)	5.18(-5)	1.32(-6)	5.42(-5)
4	1.97(-5)	9.67(-5)	1.76(-6)	1.02(-4)
5	**1.23(-4)**	**1.47(-4)**	**4.43(-6)**	**1.60(-4)**
i	$\lvert\epsilon_i^{(2)}\rvert$	$r_i^{(2)}$	$\lvert\epsilon_i^{(2)}\rvert$	$r_i^{(2)}$
1	6.11(-24)	3.25(-23)	4.12(-36)	2.36(-27)
2	1.08(-21)	1.81(-21)	4.27(-33)	3.88(-25)
3	5.46(-21)	8.31(-21)	3.83(-33)	4.90(-25)
4	8.82(-22)	5.21(-21)	5.37(-33)	1.68(-24)
5	**3.95(-20)**	**1.11(-19)**	**2.87(-32)**	**8.58(-24)**

Tabela 5.2: Rezultati prvog i drugog iterativnog koraka

Aritmetika dvostruke tačnosti bila bi dovoljna samo za prvi korak, jer već u drugom iterativnom koraku imamo oduzimanje dve veličine istog reda koje se razlikuju približno na 16-oj cifri. Iz tog razloga je za dobijanje rezultata u ovom i primerima koji slede korišćena aritmetika četvorostruke tačnosti (videti dodatak). Primetimo da su nakon prve iteracije centri diskova $z_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$ kod metoda (5.29) bliži odgovarajućim nulama $\zeta_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, što je bilo i očekivano zbog primene Weierstrassove korekcije. S druge strane, aproksimativni diskovi nakon prvog koraka veći su kod metoda (5.29), iz razloga što je umesto tačne inverzije diska (1.28) korišćena inverzija u centriranoj formi (1.29), koja daje veći poluprečnik diska. Međutim, već nakon drugog iterativnog koraka, aproksimativni diskovi pri korišćenju metoda (5.29) su manjeg poluprečnika. Naime, zbog brže konvergencije nizova centara, veličina $w^{(1)}$, definisana sa (2.12), u slučaju korišćenja algoritma

(5.5) iznosi $w^{(1)} = 1.23(-4)$, dok je kod algoritma (5.29) $w^{(1)} = 4.43(-6)$. Posebno je značajno da rezultati već prve iteracije u ovom primeru daju uvid u brzinu konvergencije, što je (na osnovu analize izvršene u prethodna dva odeljka) bilo i očekivano jer je uslov sigurne konvergencije ispunjen.

Primer 2.

U drugom primeru posmatramo polinom stepena $n = 12$,

$$\begin{aligned} P(z) = z^{12} - (2+5i)z^{11} - (1-10i)z^{10} + (12-25i)z^9 - 30z^8 - z^4 \\ + (2+5i)z^3 + (1-10i)z^2 - (12-25i)z + 30, \end{aligned} \tag{5.48}$$

sa nulama $\zeta_1, \dots, \zeta_{12}$ i inicijalnim diskovima $Z_i^{(0)} = \{ z_i^{(0)}; r_i^{(0)} \}$ $(i = 1, \dots, 12)$ datim u tabeli 5.3. Za ovako izabrane početne inkluzivne diskove važi $|\epsilon_i^{(0)}| \cong 0.1$ $(i = 1, \dots, 9)$.

i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$
1	1	$\{ 0.94 + 0.08i ; 0.3 \}$
2	-1	$\{ -1.05 + 0.0866025i ; 0.3 \}$
3	i	$\{ -0.04 + 1.09165i ; 0.3 \}$
4	$-i$	$\{ -0.03 - 0.904606i ; 0.3 \}$
5	$2i$	$\{ -0.02 + 2.09798i ; 0.3 \}$
6	$3i$	$\{ -0.01 + 3.0995i ; 0.3 \}$
7	$1 + 2i$	$\{ 1 + 2.1i ; 0.3 \}$
8	$1 - 2i$	$\{ 1.01 - 1.9005i ; 0.3 \}$
9	$\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$	$\{ 0.727107 + 0.805086i ; 0.3 \}$
10	$\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$	$\{ 0.737107 - 0.611713i ; 0.3 \}$
11	$-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$	$\{ -0.667107 + 0.798758i ; 0.3 \}$
12	$-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$	$\{ -0.657107 - 0.620504i ; 0.3 \}$

Tabela 5.3: Nule polinoma (5.48) i početni diskovi

I u ovom numeričkom primeru upoređujemo algoritme (5.5) i (5.29) sa $\mathrm{INV}_1 = \mathrm{INV}_2 = ()^I$, pri čemu koristimo podatke iz tabele 5.3. Za razliku od prethodnog primera, uslov koji obezbeđuje sigurnu konvergenciju (5.46) za $m = 0$ nije ispunjen, tj.

$$n = 12, \qquad \rho^{(0)} \cong 0.39 < 4(n-1)r^{(0)} = 13.2.$$

Međutim, kao što se može videti u tabeli 5.4, oba metoda konvergiraju.

Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 5.4, konstatujemo da veličine poluprečnika diskova nakon prvog koraka ne daju pravu sliku o brzini konvergencije, što je u ovom slučaju bilo i očekivano. Veličine $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, $w^{(1)}$ i $w^{(2)}$ za svaki od korišćenih algoritama date su u tabeli 5.5.

Kod oba metoda zadovoljena je nejednakost (5.46) počev od $m = 1$, što znači da konvergencija nakon prvog koraka ima osobine koje su konstatovane u odeljcima 5.1 i 5.2. Uticaj Weierstrassove korekcije, uključene u metod (5.29), na bržu konvergenciju centara aproksimativnih diskova ka tačnim nulama polinoma još je izraženiji nakon druge iteracije.

Metod	(5.5)		(5.29) $_{\text{INV}_1=\text{INV}_2=()^I}$	
i	$\lvert\epsilon_i^{(1)}\rvert$	$r_i^{(1)}$	$\lvert\epsilon_i^{(1)}\rvert$	$r_i^{(1)}$
1	8.72(-4)	2.21(-3)	1.18(-4)	2.99(-3)
2	4.46(-4)	1.85(-3)	**1.81(-4)**	2.55(-3)
3	6.63(-4)	2.44(-3)	1.23(-4)	**3.68(-3)**
4	**1.25(-3)**	**2.79(-3)**	1.17(-4)	3.37(-3)
5	1.69(-4)	1.16(-3)	4.56(-5)	1.61(-3)
6	9.20(-6)	4.63(-4)	5.90(-5)	8.06(-4)
7	1.25(-4)	7.69(-4)	2.25(-5)	9.42(-4)
8	1.16(-4)	4.48(-4)	1.99(-5)	4.91(-4)
9	2.31(-4)	2.08(-3)	1.22(-4)	3.20(-3)
10	9.15(-4)	2.33(-3)	1.08(-4)	2.99(-3)
11	7.83(-4)	2.26(-3)	1.36(-4)	2.87(-3)
12	1.09(-3)	2.47(-3)	1.72(-4)	3.11(-3)
i	$\lvert\epsilon_i^{(2)}\rvert$	$r_i^{(2)}$	$\lvert\epsilon_i^{(2)}\rvert$	$r_i^{(2)}$
1	1.20(-12)	6.10(-12)	1.59(-19)	2.83(-14)
2	1.54(-13)	1.90(-12)	**8.78(-19)**	6.96(-14)
3	7.49(-13)	3.67(-12)	4.72(-19)	4.46(-14)
4	2.21(-12)	**2.26(-11)**	1.26(-19)	3.67(-14)
5	1.95(-15)	4.55(-14)	5.77(-21)	1.10(-15)
6	1.29(-19)	1.84(-17)	4.16(-22)	2.93(-16)
7	8.16(-16)	9.97(-15)	4.13(-22)	1.01(-16)
8	1.50(-15)	6.88(-15)	4.73(-23)	2.78(-17)
9	3.63(-14)	5.05(-13)	5.34(-19)	3.44(-14)
10	1.40(-12)	1.08(-11)	4.52(-20)	2.47(-14)
11	1.10(-12)	4.80(-12)	6.37(-19)	4.54(-14)
12	**3.28(-12)**	1.37(-11)	4.55(-19)	**7.52(-14)**

Tabela 5.4: Rezultati prvog i drugog iterativnog koraka

Računarska aritmetika dvostruke tačnosti bi u drugoj iteraciji bila premašena. U mnogim slučajevima, kao i u ovom primeru, četvorostruka tačnost je zadovoljavajuća. Za generisanje numeričkih primera kreiran je originalni C++ izvorni kod na operativnom sistemu MS WindowsNT, uz korišćenje nekih programskih rutina koji omogućavaju rad sa približno 30 tačnih cifara. Međutim, u nekim specijalnim primenama može se zahtevati i veća tačnost. Predlog jednog rešenja ovog problema i više detalja o načinu na koji su implementirani kompleksna kružna aritmetika i

Metod	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$w^{(1)}$	$w^{(2)}$
(5.5)	0.762	0.765	1.25(-3)	3.28(-12)
(5.29) $_{\mathrm{INV}_1=\mathrm{INV}_2=()^I}$	0.761	0.765	1.81(-4)	8.78(-19)

Tabela 5.5: Veličine $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, $w^{(1)}$ i $w^{(2)}$

algoritmi (5.5) i (5.29) dati su u dodatku.

Posmatrani intervalni iterativni procesi konvergiraju i pored toga što uslov sigurne konvergencije ovih metoda (dat sa (5.46) za $m = 0$) nije zadovoljen. Nameće se zaključak da je uslov (5.46) strog, a objašnjenje leži u činjenici da je ovaj uslov potreban pri izvođenju raznih ocena (koje ponekad nisu dovoljno oštre kako zbog njihove strukture tako i zbog jednostavnosti) pri analizi konvergencije. U praksi, intervalni metodi po pravilu konvergiraju pod slabijim uslovima.

Primer 3.

Neka je dat sledeći polinom devetog stepena

$$P(z) = z^9 + 3z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 99z^3 + 297z^2 - 100z - 300, \qquad (5.49)$$

čije su nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_9$, početni diskovi koje koristimo u ovom primeru $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)};\ r_i^{(0)}\}$ $(i = 1, \ldots, 9)$ kao i moduli grešaka $|\epsilon_1^{(0)}|, \ldots, |\epsilon_9^{(0)}|$ dati u tabeli 5.6.

i	ζ_i	$Z_i^{(0)}$	$\lvert\epsilon_i^{(0)}\rvert$
1	-3	$\{-3.3 + 0.3i;\ 0.5\}$	0.42
2	1	$\{1.2 + 0.2i;\ 0.5\}$	0.28
3	-1	$\{-1.2 - 0.2i;\ 0.5\}$	0.28
4	$2i$	$\{0.2 + 1.7i;\ 0.5\}$	0.36
5	$-2i$	$\{0.3 - 2.2i;\ 0.5\}$	0.36
6	$2 + i$	$\{2.2 + 1.2i;\ 0.5\}$	0.28
7	$2 - i$	$\{1.8 - 0.8i;\ 0.5\}$	0.28
8	$-2 + i$	$\{-1.8 + 1.3i;\ 0.5\}$	0.36
9	$-2 - i$	$\{-1.8 - 0.8i;\ 0.5\}$	0.28

Tabela 5.6: Nule polinoma (5.49) i početni diskovi

Uslov (5.46) za $m = 0$ ni u ovom slučaju nije ispunjen, tj.

$$n = 9, \qquad \rho^{(0)} \cong 0.35 < 4(n-1)r^{(0)} = 16.$$

Cilj ovog primera je testiranje ponašanja intervalnog iterativnog procesa (5.29) za različite izbore inverzija INV_1 i INV_2, pri određivanju nula polinoma (5.49) sa početnim inkluzivnim diskovima datim u tabeli 5.6. Vrednosti $r_i^{(3)}$ $(i = 1, \ldots, 9)$ za različite izbore inverzija INV_1 i INV_2 prikazani su u tabeli 5.7, pri čemu su vrednosti $r^{(3)}$ odštampane u boldu. U tabeli 5.8 dati su maksimalni poluprečnici $r^{(1)}$ i $r^{(2)}$ za posmatrane slučajeve.

i	$\mathrm{INV}_1=()^I$ $\mathrm{INV}_2=()^I$	$\mathrm{INV}_1=()^{-1}$ $\mathrm{INV}_2=()^I$	$\mathrm{INV}_1=()^I$ $\mathrm{INV}_2=()^{-1}$	$\mathrm{INV}_1=()^{-1}$ $\mathrm{INV}_2=()^{-1}$
1	7.07(-52)	2.02(-44)	3.43(-41)	9.54(-40)
2	3.03(-56)	6.69(-49)	1.63(-42)	9.62(-43)
3	1.68(-50)	5.97(-42)	5.31(-38)	5.19(-37)
4	1.44(-60)	1.69(-53)	1.57(-49)	5.52(-50)
5	1.79(-65)	4.13(-55)	3.72(-51)	8.85(-53)
6	1.86(-55)	1.14(-53)	3.04(-43)	1.87(-43)
7	4.47(-58)	2.28(-51)	1.26(-45)	1.15(-45)
8	1.13(-55)	1.22(-46)	1.39(-42)	1.08(-42)
9	**9.00(-50)**	**2.64(-41)**	**6.49(-37)**	**8.65(-36)**

Tabela 5.7: Vrednosti $r_i^{(3)}$ za različite izbore inverzija INV_1 i INV_2

	$\mathrm{INV}_1=()^I$ $\mathrm{INV}_2=()^I$	$\mathrm{INV}_1=()^{-1}$ $\mathrm{INV}_2=()^I$	$\mathrm{INV}_1=()^I$ $\mathrm{INV}_2=()^{-1}$	$\mathrm{INV}_1=()^{-1}$ $\mathrm{INV}_2=()^{-1}$
$r^{(1)}$	6.17(-2)	5.24(-2)	4.67(-2)	4.11(-2)
$r^{(2)}$	1.03(-9)	3.28(-8)	3.47(-8)	7.60(-8)

Tabela 5.8: Vrednosti $r^{(1)}$ i $r^{(2)}$ za različite izbore inverzija INV_1 i INV_2

Podsećamo da je u teoremi 5.3 utvrđeno da je R-red konvergencije intervalnog iterativnog metoda (5.29), gde se svaka od inverzija INV_1 i INV_2 izračunava po formuli (1.28) ili (1.29), najmanje $2 + \sqrt{7} \cong 4.646$ ako je $\mathrm{INV}_2 = ()^{-1}$ (tj. ako koristimo formulu (1.28)), odnosno 5 u ostalim slučajevima. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 5.7 vidimo da su poluprečnici odgovarajućih aproksimativnih diskova najmanji kada se koristi isključivo inverzija u centriranoj formi (1.29), tj. $\mathrm{INV}_1 = \mathrm{INV}_2 = ()^I$. U slučajevima kada je $\mathrm{INV}_2 = ()^{-1}$ izbor inverzije INV_1 nema uticaja na brzinu konvergencije. Ove konstatacije su u skladu sa tvrđenjem leme 5.5 da je

$$\hat{\epsilon} = a\mathcal{O}(\epsilon^5 r^2) + \mathcal{O}(\epsilon^5) + b\mathcal{O}(\epsilon^3 r^2),$$

pri čemu je $a = 0$ ako je $\mathrm{INV}_1 = ()^I$, a $b = 0$ ako je $\mathrm{INV}_2 = ()^I$.

Literatura

[1] O. Aberth, *Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously*, Math. Comp. 27 (1993), 339–344.

[2] G. Alefeld, J. Herzberger, *Introduction to Interval Computation*, Academic Press, New York (1983).

[3] E. Bodewig, *On types of convergence and the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation*, Quart. Appl. Math. 7 (1949), 325–333.

[4] W. Börsch-Supan, *A posteriori error bounds for the zeros of polynomials*, Numer. Math. 5 (1963), 380–398.

[5] W. Börsch-Supan, *Rewsiduenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange-Interpolation,* Numer. Math. 14 (1970), 287–296.

[6] D. Braess, K.P. Hadeler, *Simultaneous inclusion of the zeros of a polynomial*, Numer. Math. 21 (1973), 161–165.

[7] K. Briggs, *The doubledouble homepage*, http://www-epidem.plantsci.cam.ac.uk/~kbriggs/doubledouble.html.

[8] C. Carstensen, M.S. Petković, *An improvement of Gargantini simultaneous inclusion method for polynomial roots by Schroeder's correction*, Appl. Numer. Math. 25 (1993), 59–67.

[9] P. Chen, *Approximate zeros of quadratically convergent algorithms*, Math. Comp. 63 (1994), 247–270.

[10] J.H. Curry, *On zero finding methods of higher order from data at one point*, J. Complexity 5 (1989), 219–237.

[11] K. Dočev, *Modified Newton method for the simultaneous approximate calculation of all roots of a given algebraic equation* (in Bulgarian). Mat. Spis. B'ulgar. Akad. Nauk 5 (1966), 136–139.

[12] E. Durand, *Solution numériques des équations algébraiques, Tom. I: Équations du Type F(x)=0; Racines d'un Polynôme*, Masson, Paris (1960).

[13] L.W. Ehrlich, *A modified Newton method for polynomials*, Comm. ACM 10 (1967), 107–108.

[14] L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. I, Vol. X, 422–455.

[15] I. Gargantini, *Parallel Laguerre iterations: Complex case*, Numer. Math. 26 (1976), 317–323.

[16] I. Gargantini, *Further applications of circular arithmetic: Schroeder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials*, SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), 497–510.

[17] I. Gargantini, P. Henrici, *Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros*, Numer. Math. 18 (1972), 305–320.

[18] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. I.*, John Wiley and Sons, New York (1974).

[19] E. Hansen, M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numer. Math. 27 (1977), 257–269.

[20] Đ. Herceg, *Konvergencija simultanih postupaka za nalaženje nula polinoma*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1999.

[21] Z. Huang, S. Zheng, *On a family of parallel root-finding methods for generalized polynomials*, Appl. Math. Comput. 91 (1998), 221–231.

[22] A.I. Iliev, H.I. Semerdziev, *On some generalizations of Chebyshev's method for the simultaneous finding all roots of polynomial equations*, (in Russian), J. Comput. Math. and Math. Phys. Vol. 39 (1999), 1445-1452.

[23] I.O. Kerner, *Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen*, Numer. Math. 8 (1966), 290–294.

[24] M. Kim, *On approximate zeros and rootfinding algorithms for a complex polynomial*, Math. Comp. 51 (1988), 707–719.

[25] D. Knuth, *The Art of Programming, Vol. 2*, Addison-Wesley, New York (1969).

[26] P. Kravanja, *On Computing Zeros of Analytic Functions and Related Problems in Structured Numerical Linear Algebra*, Ph. D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven (1999).

[27] V.H. Maehly, *Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen*, Z. Angew. Math. Phys. 5 (1954), 260–263.

[28] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Mathematical surveys, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island (1966).

[29] R.E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1966).

[30] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in several Variables*, Academic Press, New York (1970).

[31] M.S. Petković, *Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1989).

[32] M.S. Petković, *On initial conditions for the convergence of simultaneous root finding methods*, Computing 57 (1996), 163–177.

[33] M.S. Petković, *Halley-like method with corrections for the inclusion of polynomial zeros*, Computing 62 (1999), 69–88.

[34] M.S. Petković, C. Carstensen, *Some improved inclusion methods for polynomial roots with Weierstrass' correction*, Comput. Math. with Appl. 25 (1993), 59–67.

[35] M.S. Petković, C. Carstensen, M. Trajković, *Weierstrass' formula and zero-finding methods*, Numer. Math. 69 (1995), 353–372.

[36] M.S. Petković, Đ. Herceg, S.M. Ilić, *Point Estimation Theory and its Applications*, Institute of Mathematics, Novi Sad (1997).

[37] M.S. Petković, Đ. Herceg, S.M. Ilić, *Point estimation and some applications to iterative methods*, BIT 38 (1998), 111–126.

[38] M.S. Petković, Đ. Herceg, S.M. Ilić, *Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros*, Numer. Algorithms 17 (1998), 313–331.

[39] M.S. Petković, S.M. Ilić, *Point estimation and the convergence of the Ehrlich-Aberth method*, Publications de l'Institut Mathématique 62 (1997), 141–149.

[40] M.S. Petković, S.M. Ilić, S. Tričković, *A family of simultaneous zero-finding methods*, Comput. Math. Appls. 34 (1997), 49–59.

[41] M.S. Petković, Lj.D. Petković, *Complex Interval Arithmetic and its Applications*, Wiley-VCH, Berlin (1998).

[42] M.S. Petković, Lj.D. Petković, Đ. Herceg, *Point estimation of a family of simultaneous zero-finding methods*, Comput. Math. Appl. 36, (1998), 1–12.

[43] M.S. Petković, S. Tričković, Đ. Herceg, *On Euler-like methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros*, Japan J. Idustr. Appl. Math. 15 (1998), 295–315.

[44] M.S. Petković, D.V. Vranić, *The convergence of Euler-like method for the simultaneous inclusion of polynomial zeros*, Comput. Math. with Appl. 39 (2000), 95–105.

[45] M.S. Petković, D.V. Vranić, *On the guaranted convergence of a family of simultaneous iterative methods*, Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics, (to appear).

[46] M.S. Petković, D.V. Vranić, *An improvement of Euler-like method for the simultaneous inclusion of polynomial zeroes*, CD-ROM Proceedings of 16th IMACS WORLD CONGRESS 2000 on Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation, Lausanne, Switzerland (2000), paper code 310-1.

[47] S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1981), 1–35.

[48] S. Smale, *Newton's method estimates from data at one point*, in: The Merging Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics (eds. R.E. Ewing, K.I. Gross, C.F. Martin), Springer-Verlag, New York (1986), 185–196.

[49] B.T. Smith, *Error bounds for zeros of a polynomial based upon Gerschgorin's theorem*, J. Assoc. Comput. Mach. 17 (1970), 661–674.

[50] S.B. Tričković, *Iterativni metodi za nalaženje nula polinoma*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.

[51] D. Wang, F. Zhao, *The theory of Smale's point estimation and its application*, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995), 253–269.

[52] D. Wang, F. Zheng, *A family of parallel and interval iterations for finding all roots of a polynomial simultaneously with rapid convergence*, J. Comput. Math. 1 (1984), 70–76.

[53] X. Wang, D. Han, *On dominating sequence method in the point estimate and Smale's theorem*, Scientia Sinica Ser. A (1989), 905–913.

[54] K. Weierstrass, *Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Funktionen derstelben Veränderlichen*, Ges. Werke 3 (1903), 251–269 (Johnson Reprint Corp., New York 1967).

[55] F. Zhao, D. Wang, *The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand-Kerner program*, (in Chinese), Math. Numer. Sinica 15 (1993), 196–206.

Dodatak

Numerički rezultati iz odeljka 5.3 dobijeni su korišćenjem originalnog programskog koda napisanog na jeziku C++, uz primenu objektno orijentisanog programiranja (skraćeno OOP-a). U većini radova i knjiga iz oblasti matematike, numerički rezultati su dobijeni korišćenjem FORTRAN-a, koji je pogodan zbog svoje relativno zadovoljavajuće preciznosti (FORTRAN77 radi sa aritmetikom četvorostruke tačnosti), koju je dodatnim programskim bibliotekama moguće i povećati. Međutim, korišćenjem OOP-a, odnosno klasa, operacija i funkcija koje smo definisali, omogućen je znatno jednostavniji rad pri programiranju novih metoda. U skladu sa razvojem tehnologije i ekspanzijom Interneta, smatramo da bi realizacija sistema koji omogućava interaktivno (on-line) generisanje rezultata preko servera mogla biti svrsishodna. U ovom trenutku, realizovali smo probnu verziju „Servera za kompleksnu kružnu aritmetiku" koji se nalazi na sledećoj URL adresi:

http://www.informatik.uni-leipzig.de/∼vranic/ccas/server.htm. (*)

U nastavku će biti više reči o načinu na koji je kreirana C++ klasa *Polynomial*, kako je realizovan modul za rad sa kompleksnom kružnom aritmetikom pri čemu je zadržana standardna matematička notacija i biće prikazan korisnički interfejs za rad sa „Serverom za kompleksnu kružnu aritmetiku".

C++ klasa 'Polynomial'

Sa ciljem da omogućimo elegantniji rad, pri pisanju novih aplikacija na jeziku C++, implementiran je modul koji podržava rad sa kompleksnom kružnom aritmetikom. Da bi bilo jasnije kako se novodefinisane klase, operacije i funkcije koriste, dajemo listing C++ zaglavlja *intmat.hpp*.

```
// Datoteka INTMAT.HPP
#include <stdlib.h>
#include <iostream.h>
#include <iomanip.h>
#include <math.h>
#include "double2.h"
```

```
class Complex {           // Klasa kompleksnih brojeva z = x + i.y
public:
    double2 x;
    double2 y;
    friend ostream & operator<< (ostream &, Complex);
};

class Disc {              // Klasa diskova Z = { z ; r }
public:
    Complex c;
    double2 r;
    friend ostream & operator<< (ostream &, Disc);
};

// Kompleksni operatori
Complex operator+(const Complex &, const Complex &);     // z1+z2
Complex operator+(const int &, const Complex &);         //  n+z
Complex operator+(const double2 &, const Complex &);     //  a+z
Complex operator-(const Complex &, const Complex &);     // z1-z2
Complex operator-(const double2 &, const Complex &);     //  a-z
Complex operator-(const int &, const Complex &);         //  n-z
Complex operator*(const Complex &, const Complex &);     // z1*z2
Complex operator*(const double2 &, const Complex &);     //  a*z
Complex operator*(const int &, const Complex &);         //  n*z
Complex operator/(const Complex &, const Complex &);     // z1/z2
Complex operator/(const Complex &, const double2 &);     //  z/a
Complex operator/(const double2 &, const Complex &);     //  a/z
Complex operator/(const Complex &, const int &);         //  z/n
Complex operator/(const int &, const Complex &);         //  n/z

// Operatori nad diskovima
Disc operator+(const Disc &, const Disc &);         // d1+d2
Disc operator+(const Complex &, const Disc &);      //  z+d
Disc operator+(const int &, const Disc &);          //  n+d
Disc operator-(const Disc &, const Disc &);         // d1-d2
Disc operator-(const Disc &, const Complex &);      //  d-z
Disc operator-(const Complex &, const Disc &);      //  z-d
Disc operator*(const Disc &, const Disc &);         // d1*d2
Disc operator*(const Complex &, const Disc &);      //  z*d
Disc operator/(const Disc &, const Disc &);         // d1*d2^{-1}
Disc operator/(const Complex &, const Disc &);      //  z*d2^{-1}

// Napomena: 'z', 'z1' i 'z2' - su kompleksni brojevi,
//           'd', 'd1' i 'd2' - su diskovi,
```

```
//          'n' - je ceo     i    'a' - je realan broj

// Funkcije nad klasom kompleksnih brojeva
Complex C(Complex);   // Komplement kompleksnog broja
double2  R(Complex);  // Moduo kompleksnog broja
double2  R2(Complex); // Moduo na kvadrat
double2  Q(Complex);  // Glavna vrednost argumenta

// Funkcije nad klasom diskova
Disc Im1(Disc);       // tacna inverzija diska         =()^{-1}
Disc I(Disc);         // inverzija u centriranoj formi =()^I
Disc Inv(Disc,int);   // ako je 'int==2' koristi se I(Disc)
                      // ako je 'int!=2' koristi se Im1(Disc)
Disc Root(Disc);      // kvadratni koren
Disc RootN(Disc,int); // n-ti koren
```

Osnovne operacije u skupu kompleksnih brojeva jesu podržane u jeziku C++, ali iz razloga lakšeg uključivanja paketa koji omogućavaju rad sa aritmetikom četvorostruke (ili veće) tačnosti definisana je „klasa" kompleksnih brojeva i osnovne operacije. Sve operacije nad diskovima realizovane su prema definicijama i formulama iz odeljka 1.4. Ovim je omogućen rad sa kompleksnim brojevima i kružnim intervalima, pri čemu se koriste ista sintaksa i principi kao i kod osnovnih tipova podataka (na primer *int* ili *double*). Drugim rečima, ako su $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}(\mathbb{Z})$ i neka je $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ data operacija, tada u programu pišemo, na primer

$$a_1 = a_2 * a_3;$$

$$b_1 = b_2 * b_3;$$

$$c_1 = c_2 * c_3.$$

Kao što se može videti iz programskog koda, jedini nestandardni tip podataka koji je korišćen je *double*2. Ovaj tip koristi 16 bajtova za predstavljanje broja sa pokretnom decimalnom tačkom, za razliku od standardnog tipa *double* koji koristi 8 bajtova. Za implementaciju osnovnih aritmetičkih operacija modifikovan je C++ programski paket autora Keith Briggsa, bivšeg studenta Univerziteta u Cambridgeu. Na ovaj način omogućen je rad sa približno 30 tačnih cifara. Brzina izvršenja aritmetičkih operacija pri korišćenju klase *double*2 je 10-25 puta manja nego kada se koristi standardni tip *double*. Ovo je, međutim, mnogostruko bolji odnos u poređenju sa usporavanjem koje uzrokuju paketi sa aritmetikom proizvoljne tačnosti.

Pomenuti programski paket koristi poznate tehnike Dekkera, Linnainma, Kahana, Knutha i Priesta (implementiranih u fortranskim kompajlerima), ali i nove metode samog autora. Više detalja, kao i podatke o radovima iz ove oblasti moguće je naći na Internet adresi [7].

Definisana je i klasa *Polynomial* za implementiranje intervalnih iterativnih algoritama, sa elementima i metodima datim u sledećem listingu.

```
// Datoteka POLY.HPP
#include "intmat.hpp"

class Polynomial {
   int n;                // Stepen polinoma
   Disc *Z;              // Pointer niza inkluzivnih diskova
   Complex *zn;          // Pointer niza nula polinoma
   double2 rho, r, d, w; // Parametri
   int method;           // Indikator izabranog metoda

   Complex P(Complex);  // Vrednost polinoma
   Complex W(int);      // Weierstrassova korekcija
   Complex G(int,int);  // Funkcija G_{k,i}

   Disc S(int);         // Funkcija S_i
   void rhordw(void);   // Izracunavanje parametara

   Disc Euler_like(int);         // Metod (5.3)
   Disc Euler_like_with_W(int);  // Metod (5.25)

public:
   Disc    getDisc(int);   // Vraca Z[i]
   Complex getZero(int);   // Vraca zn[i]
   double2 getRadius(int); // Vraca poluprecnik diska Z[i]
   Complex getCenter(int); // Vraca centar diska Z[i]
   void NextStep(void);    // Izvrsava sledecu iteraciju

   // Konstruktori i destruktor
   Polynomial(int,Complex *,Complex *);
   Polynomial(int,Disc *,Complex *);
   Polynomial(int,Complex *,Complex *,int,int,int,int,int);
   Polynomial(int,Disc *,Complex *,int,int,int,int,int);
   ~Polynomial(void);
};
```

Napominjemo da je ovde prikazan samo koncept na osnovu koga je implementiran programski kod. Smatramo da su deklaracije klasa, operacija i funkcija dovoljne za osnovno objašnjenje predloženog koncepta, dok samo definisanje funkcija i realizacija iterativnih metoda mogu biti ostvareni na više načina. Osim toga, moguća je (prema potrebi) nadgradnja postojećih klasa, tj. dodavanje novih elemenata, funkcija i konstruktora. Informacije o novim verzijama ovog programskog paketa mogu biti pronađene na adresi (*).

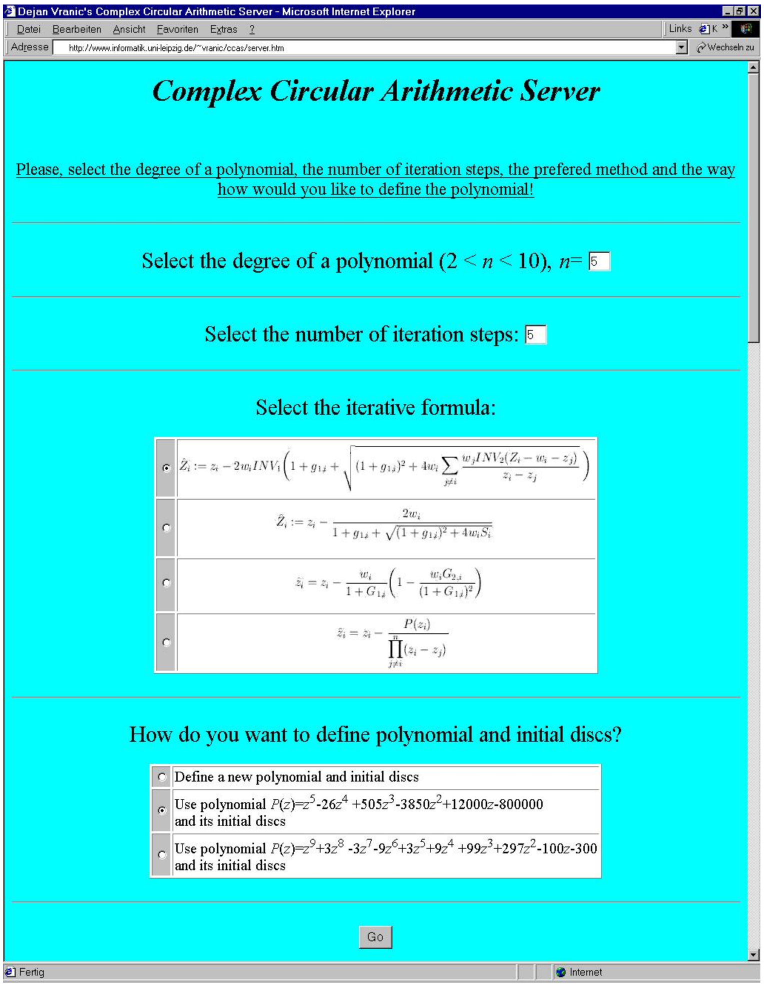
Sa namerom da demonstriramo jednostavnost pri definisanju veličina kada koristimo klase *Complex* i *Disc*, navešćemo samo primere definisanja Weierstrassove korekcije W_i, funkcije $G_{k,i}$ date sa (5.1), veličine S_i date sa (5.2) i metoda (5.5).

```
Complex Polynomial::W(int i) {
   Complex r; r.x=1; r.y=0;
   for (int j=0; j<n; j++)
      if (i!=j) r=r*((Z[i].c-zn[j])/(Z[i].c-Z[j].c));
   return (Z[i].c-zn[i])*r;
}

Complex Polynomial::G(int k,int i) {
   Complex r, d; r.x=r.y=0;
   for (int j=0; j<n; j++)
      if (i!=j) {
         d=W(j)/(Z[i].c-Z[j].c);
         if (k==2) d=d/(Z[i].c-Z[j].c);
         r=r+d;
      }
   return r;
}

Disc Polynomial::S(int i) {
   Disc r; r.c.x=r.c.y=r.r=0;
   for (int j=0; j<n; j++)
      if (i!=j) r=r+(W(j)/(Z[i].c-Z[j].c))/(Z[i]-Z[j].c);
   return r;
}

Disc Polynomial::Euler_like(int i) {
   return (Z[i].c-2*W(i)/(1+G(1,i))/
           (1+Root(1+4*W(i)/((1+G(1,i))*(1+G(1,i)))*S(i))));
}
```

Ovakav način programiranja naročito je pogodan, imajući u vidu da prethodni programski kod u potpunosti odgovara matematičkom zapisu u formulama (5.1), (5.2) i (5.5), što sam kod čini veoma čitljivim. Napomenimo da je korišćenjem uvedenih klasa i operacija moguća i realizacija tačkastih iterativnih algoritama u kompleksnoj aritmetici. U tom slučaju, dovoljno je inicijalizovati vrednosti poluprečnika početnih diskova na nulu.

Server za kompleksnu kružnu aritmetiku

Na kraju ovog dodatka, predstavljamo prvu verziju „Servera za kompleksnu kružnu aritmetiku” dostupnog preko Interneta na adresi (*). Ova verzija ima za cilj samo da demonstrira ideju koja je, na osnovu informacija kojima raspolažemo, originalna. Osnovni zadatak je omogućiti interaktivno generisanje numeričkih primera, a namera nam je da dalje razvijamo ovaj server dodavanjem fundamentalno novih opcija i funkcija.



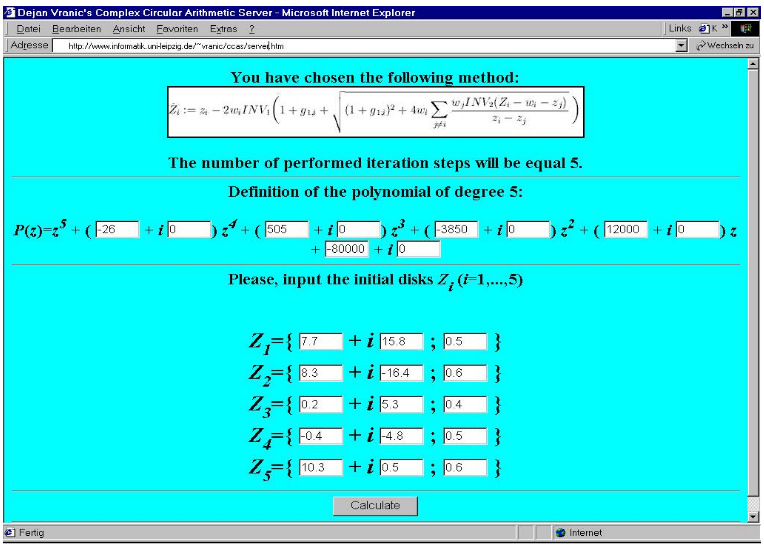
Slika 5.1: Početni ekran „Servera za kompleksnu kružnu aritmetiku”

Na slici 5.1 prikazan je početni ekran sa poljima za komunikaciju sa korisnikom. Korisnik može da odabere:

- stepen polinoma n,
- broj iterativnih koraka koje treba izvršiti,
- iterativni metod (intervalni ili tačkasti) koji se koristi,
- način definisanja polinoma i početnih diskova.

U ovom slučaju, izabrano je: stepen polinoma $n = 5$, ukupan broj iterativnih koraka je 5, koristi se metod (5.29) i uzima se polinom sa početnim aproksimacijama iz primera 1.

Sledeći ekran prikazan je na slici 5.2 i pokazuje rezultate izbora, pri čemu su moguće izmene koeficijenata polinoma i početnih diskova. Naglašavamo da je potrebno voditi računa da važi $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ukoliko korisnik želi drugačiji izbor stepena polinoma, broja iteracija, kao i metoda koji se koristi, treba se vratiti na prethodni ekran. Pritiskom na dugme *Calculate* pojavljuje se novi prozor i rezultati iteracija se štampaju.



Slika 5.2: Ekran za unos početnih parametara

U narednim verzijama biće uključen znatno veći broj iterativnih algoritama, sa mogućnošću za automatski izbor početnih aproksimacija koje ispunjavaju određene uslove sigurne konvergencije. Takođe, biće omogućen unos novih iterativnih formula, rad sa računarskom aritmetikom proizvoljne tačnosti, prekidanje iterativnog postupka kada se dostigne zadata tačnost, kao i štampanje rezultata na više načina (na primer samo tekst, TeX ili LaTeX2ϵ stil, itd.).

Zbog objedinjavanja zahteva za povećanjem tačnosti i pogodnosti koje pruža princip objektno orijentisanog programiranja (OOP), naredna verzija biće napisana na jeziku Java. Naime, u ovom jeziku omogućen je rad sa aritmetikom „beskonačne" preciznosti (na primer klasa BigDecimal), a povrh toga što je Java jezik za OOP, povoljno je i to što bi se program izvšavao na strani klijenta (tj. korisnika koji pristupa serveru). Jedina mana bila bi sporost jezika Java. Međutim, novije verzije Java prevodilaca, kao i stalni rast brzine procesora (u proseku se na svakih 18 meseci brzina takta udvostručava!) mogu znatno da umanje ovaj nedostatak. Drugo rešenje bi moglo da bude korišćene multiprocesorskog servera sa brzom vezom ka Internetu i programskog koda napisanog u C++ koji koristi neki programski paket za povećanje preciznosti.