TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fachrichtung Mathematik
Institut für Algebra

Gewichtete Automaten mit dynamischer Kostenberechnung

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von :	**Georg Ulbrich**
geboren am :	**29. Mai 1977**
in :	**Dresden**
Betreuer :	**Prof. Dr. M. Droste**
Tag der Einreichung :	**18. August 2003**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Jahr 1951 bewies Kleene seinen klassischen Satz über die Äquivalenz von Rationalität und Erkennbarkeit formaler Wortsprachen. Zehn Jahre später zeigte Schützenberger in seiner Arbeit [Sch61], daß diese Äquivalenz allgemeiner für formale Potenzreihen (Abbildungen von einem endlich erzeugten freien Monoid in einen Semiring) gilt und charakterisierte damit algebraisch, welches Verhalten ein endliches diskretes System, also ein endlicher gewichteter Automat, haben kann.

Automaten eignen sich zur Simulation von endlichen, diskreten Prozessen, die Kosten verursachen. Ein solcher Prozeß wird durch einen Pfad, der in einem Automaten durchlaufen wird, modelliert. Die Automaten in Schützenbergers Sinn berechnen die Laufkosten eines Pfades, indem die Gewichte der einzelnen Transitionen aufmultipliziert werden. Man möchte weiterhin den Umstand modellieren, daß das Betreten bzw. Verlassen des Automaten Ressourcen verbraucht. Daher multipliziert man die Laufkosten des Pfades noch mit Ein- bzw. Austrittskosten und erhält auf diese Weise die Gesamtkosten, die das Abarbeiten des Pfades hervorruft.

Diese Art der Kostenberechnung ist in einem gewissen Sinn statisch. Wir werden in der vorliegenden Arbeit Automaten definieren, die in der Kostenberechnung flexibler sind und daher die Modellierung einer größeren Klasse von Prozessen gestatten.

Ein erster Schritt in diese Richtung war die Idee von Droste und Kuske in der Arbeit [DK02], dem Automaten ein Gedächtnis in Bezug auf die Kostenberechnung zu verleihen. Das erreichen sie dadurch, daß nicht mehr nur das Gewicht einer Transition zu den Laufkosten eines Pfades beiträgt, sondern auch die Position, die diese Transition innerhalb des Pfades einnimmt. Droste und Kuske untersuchen den tropischen Semiring genauer und argumentieren mit einem sogenannten *Deflationsparameter* q. In ihrem Automatenmodell beschreibt q, wie stark ein Ereignis die Bewertung eines Prozesses beeinflußt. Wählt man z.B. $0 \leq q < 1$, dann tragen Transitionen umso weniger zu den Laufkosten des Pfades bei, je später sie ausgeführt werden.

Die Idee der gedächtnisgestützten Kostenberechnung wird in der vorliegenden Arbeit in zwei Richtungen verallgemeinert. Zum einen machen wir den Beitrag einer Transition zu den Laufkosten nicht nur abhängig von der *Anzahl* der bereits abgearbeiteten Transitionen, sondern wir berücksichtigen genauer, *welche* Buchstaben bereits gelesen wurden. Die zweite Verallgemeinerung schafft Symmetrie, denn wir lassen nicht nur bereits gelesene Buchstaben sondern auch Buchstaben, die noch zu lesen sind, in die Berechnung der Laufkosten einfließen. Die Prozessmodellierung wird damit detaillierter, denn die Bewertung eines Vorganges hängt von vergangenen und zukünftigen Ereignissen ab. Das geeignete mathematische Werkzeug zur Beschreibung solcher Automaten ist das *Bewertungspaar*.

Im Kapitel 2 wiederholen wir kurz grundlegende Definitionen zu Alphabeten, Semiringen und Potenzreihen. Desweiteren definieren wir den Begriff des Bewertungspaares.

In Kapitel 3 stellen wir unsere Definition eines Automaten vor. Der wesentliche Unterschied zu endlichen gewichteten Automaten im klassischen Sinn ist die Art und Weise der Laufkosten- bzw. Kostenberechnung eines Pfades. Wir erklären Erkennbarkeit einer Potenzreihe, beweisen ein Faktorisierungslemma und leiten klassische automatentheoretische Resultate als Folgerungen aus unseren Ergebnissen her. Wir beweisen eine Lemma zur Normalisierbarkeit von Automaten und demonstrieren, daß jeder Automat zu einem kostendeterministischen Automaten äquivalent ist. Wir definieren den Begriff der Darstellung einer Potenzreihe und wir zeigen, daß genau die erkennbaren Potenzreihen eine Darstellung besitzen.

Im Kapitel 4 stellen wir den Semiring $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ aller Potenzreihen vor. Die Addition dieses Semiringes ist die gewöhnliche punktweise Addition von Potenzreihen, aber die Multiplikation muß unserer Definition der Laufkosten eines Pfades angepaßt werden. Unsere Definition des Produktes verallgemeinert das wohlbekannte Cauchy-Produkt. Wir erklären den Begriff der Rationalität.

Kapitel 5 enthält als Hauptresultat unserer Arbeit einen Beweis der Äquivalenz von Rationalität und Erkennbarkeit.

Im Kapitel 6 geben wir ein motivierendes Beispiel zur Modellierung eines Prozesses, gehen kurz auf die verwendeten Beweistechniken ein und zählen weiterführende Fragestellungen auf.

Danksagung

Mein Dank gilt insbesondere Prof. Dr. M. Droste für die Betreuung dieser Arbeit, deren Resultat ohne seine Anregung nicht zustande gekommen wäre. Ich danke HDoz. Dr. D. Kuske für anregende Diskussionen und meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines Studiums.

2 Grundlagen

Eine endliche Menge $A \neq \emptyset$ ist ein *Alphabet* und ihre Elemente sind die *Buchstaben*. Das *freie Monoid* A^* ist die Menge aller endlichen Wörter über A mit der Konkatenation von Wörtern als Monoidoperation und dem *leeren Wort* ε als neutralem Element. Die Menge $A^* \setminus \{\varepsilon\}$ der nichtleeren Worte wird mit A^+ bezeichnet. Ist $n \geq 0$ und $w = a_1 \ldots a_n \in A^*$ ein Wort mit $a_i \in A$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann nennt man $|w| = n$ die *Länge* von w.

Ein Quintupel $(\mathfrak{K}, \oplus, \odot, 0, 1)$ ist ein *Semiring* (*mit Eins*), wenn jede der folgenden Eigenschaften gilt

- das Tripel $(\mathfrak{K}, \oplus, 0)$ ist ein abelsches Monoid
- das Tripel $(\mathfrak{K}, \odot, 1)$ ist ein Monoid
- die Null absorbiert beidseitig, also $\forall x \in \mathfrak{K} : 0 \odot x = x \odot 0 = 0$
- es herrscht beidseitige Distributivität, d.h.

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{K} : \quad x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \quad \text{und} \quad (x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z.$$

Wie gewohnt einigen wir uns darauf, daß die Operation $\odot$ stärker bindet als $\oplus$.

Eine Abbildung $h : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ zwischen Semiringen ist ein (*Semiring*-) *Homomorphismus*, wenn sie die Operationen vermöge

$$\forall x, y \in \mathfrak{K} : \quad h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y) \quad \text{und} \quad h(x \odot y) = h(x) \odot h(y)$$

respektiert und $h(0) = 0$ sowie $h(1) = 1$ gelten. Ein Homomorphismus der Form $h : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ ist ein *Endomorphismus* von $\mathfrak{K}$. Die Menge $\mathrm{End}(\mathfrak{K})$ aller Endomorphismen von $\mathfrak{K}$ bildet mit der Abbildungskomposition $\circ$ als Operation und der *identischen Abbildung*

$$\mathrm{id} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} : x \mapsto x$$

als neutralem Element das *Endomorphismenmonoid* von $\mathfrak{K}$.

Sei nun $\varphi : A^* \to \mathrm{End}(\mathfrak{K}) : w \mapsto \varphi_w$ ein (Monoid-) Homomorphismus und $\psi : A^* \to \mathrm{End}(\mathfrak{K}) : w \mapsto \psi_w$ ein Antihomomorphismus, es gelte also

$$\forall u, v \in A^* : \quad \varphi_{uv} = \varphi_u \circ \varphi_v \quad \text{bzw.} \quad \psi_{uv} = \psi_v \circ \psi_u.$$

Das Paar (ψ, φ) nennen wir ein *Bewertungspaar* und die Abbildungen ψ und φ *Bewertungsfunktionen*, wenn φ und ψ *kommutierende Bilder* haben, d.h.

$$\forall u, v \in A^* : \quad \varphi_u \circ \psi_v = \psi_v \circ \varphi_u.$$

Eine Abbildung $S : A^* \to \mathfrak{K} : w \mapsto (S, w)$ ist eine (*formale*) *Potenzreihe*. Wir nennen S *quasiregulär*, wenn $(S, \varepsilon) = 0$ ist. Seien $u \in A^*, x \in \mathfrak{K}$. Gelten $(S, u) = x$ und $(S, w) = 0$ für alle $w \in A^*$ mit $w \neq u$, dann ist S ein *Monom* und wird mit xu abgekürzt.

Von nun an seien ein Alphabet A, ein Semiring $\mathfrak{K}$ und ein Bewertungspaar (ψ, φ) fest gewählt. Wir halten uns an die gewohnte Konvention, daß leere Summen den Wert 0 und leere Produkte den Wert 1 haben.

3 Endliche gewichtete Automaten

3.1 Erkennbare Potenzreihen

Ein *endlicher gewichteter Automat* (oder einfach *Automat*) ist ein Quadrupel

$$\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out}).$$

Dabei ist Q eine endliche Menge von *Zuständen* und $T \subseteq Q \times A \times \mathfrak{K} \times Q$ eine endliche Menge von *Transitionen*. Die Funktionen $\mathrm{in}, \mathrm{out} : Q \to \mathfrak{K}$ beschreiben *Ein-* bzw. *Austrittskosten*.

Ist $t = (p, a, x, q)$ eine Transition, dann nennen wir x das *Gewicht* von t. Ein Zustand $\iota \in Q$ ist eine *Quelle*, wenn es keine Transition der Form $(p, a, x, \iota) \in T$ gibt. Analog ist $\sigma \in Q$ eine *Senke*, wenn keine Transition der Gestalt $(\sigma, a, x, q) \in T$ existiert.

Ein Automat $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ ist *normalisiert*, wenn es eine Quelle ι und eine von ι verschiedene Senke σ gibt, sodaß

$$\mathrm{in}(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = \iota \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathrm{out}(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gelten. In diesem Fall schreiben wir auch $\mathfrak{A} = (Q, T, \iota, \sigma)$ und nennen ι den *Initial-* und σ den *Finalzustand* von $\mathfrak{A}$.

Ein Element $P = t_1 t_2 \ldots t_n \in T^*$ mit $t_i = (q_i, a_i, x_i, q_{i+1})$ ist ein *Pfad* (in $\mathfrak{A}$) der *Länge* n. Die Zustände $q_2, \ldots, q_{n-1}$ sind seine *inneren Zustände*, seine *Beschriftung* ist das Wort $w = a_1 a_2 \ldots a_n$. Wir sagen, daß P ein *w-Pfad* ist und daß P (in $\mathfrak{A}$) von q_1 nach q_{n+1} *führt*, in Zeichen

$$P : q_1 \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q_{n+1}.$$

Bemerkung 3.1. Im klassischen Sinn definiert man nun die Laufkosten des Pfades P durch

$$\mathrm{rc}(P) = x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n.$$

Der Beitrag einer gegebenen Transition zu den Laufkosten ist also fix, nämlich gerade ihr Gewicht.

In [DK02] wird allgemeiner mit

$$\mathrm{rc}(P) = x_1 \odot h(x_2) \odot h^2(x_3) \odot \ldots \odot h^{n-1}(x_n)$$

für einen Endomorphismus $h \in \mathrm{End}(\mathfrak{K})$ argumentiert. Neben dem Gewicht der Transition geht auch noch ihre Position innerhalb des Pfades in die Laufkostenberechnung ein.

Wir definieren die *Laufkosten* des Pfades P allgemeiner vermöge

$$\begin{aligned} \mathrm{rc}(P) &= \left[\varphi_\varepsilon \circ \psi_{a_2 \ldots a_n}(x_1)\right] \odot \left[\varphi_{a_1} \circ \psi_{a_3 \ldots a_n}(x_2)\right] \odot \ldots \odot \left[\varphi_{a_1 \ldots a_{n-1}} \circ \psi_\varepsilon(x_n)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{a_1 \ldots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \ldots a_n}(x_i). \end{aligned}$$

Bezüglich der Laufkostenberechnung eines Pfades arbeitet der Automat viel komplexer als im Schützenbergersinn. Bei der Ermittlung des Beitrages einer Transition zu den Laufkosten nehmen bereits gelesene Buchstaben über φ Einfluß. Analog werden künftig zu lesende Buchstaben über ψ mit einbezogen.

Ist P ein nichtleerer w-Pfad, der von p nach q führt, dann definieren wir seine *Kosten* $\mathrm{c}(P)$ durch

$$\mathrm{c}(P) = \psi_w(\mathrm{in}(p)) \odot \mathrm{rc}(P) \odot \varphi_w(\mathrm{out}(q))$$

und für den leeren Pfad setzen wir

$$\mathrm{c}(\varepsilon) = \sum_{q \in Q} \mathrm{in}(q) \odot \mathrm{out}(q).$$

Das *Verhalten* $\|\mathfrak{A}\|$ eines Automaten $\mathfrak{A}$ ist die durch

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum \{\mathrm{c}(P) \mid P \text{ ist } w\text{-Pfad in } \mathfrak{A}\}$$

definierte Potenzreihe. In der Summe rechts stehen nur endlich viele Summanden, denn da der Automat nur endlich viele Transitionen hat, gibt es nur endlich viele w-Pfade.

Definition 3.2. Eine Potenzreihe S ist (ψ, φ)-*erkennbar* (oder einfach *erkennbar*), wenn es einen Automaten $\mathfrak{A}$ mit $\|\mathfrak{A}\| = S$ gibt. In diesem Fall sagt man, daß S von $\mathfrak{A}$ *erkannt* wird. Die Menge aller erkennbaren Potenzreihen wird mit $\mathrm{Rec}_{\psi,\varphi}(A^*)$ bezeichnet.

Hauptziel unserer Arbeit ist eine algebraische Charakterisierung von $\mathrm{Rec}_{\psi,\varphi}(A^*)$.

Bemerkung 3.3. Folgende Aussagen sind aus den Definitionen sofort klar.

- Die Laufkosten einer Transition sind gleich ihrem Gewicht.
- Normalisierte Automaten haben quasireguläres Verhalten.
- Ist $w \in A^+$ und $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ ein Automat, dann gilt

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum_{p,q \in Q} \sum \{\mathrm{c}(P) \mid P : p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q\}.$$

- Ist $w \in A^*$ und $\mathfrak{A} = (Q, T, \iota, \sigma)$ ein normalisierter Automat, dann ist

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum \{\mathrm{rc}(P) \mid P : \iota \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} \sigma\}.$$

3.2 Faktorisierung der Laufkosten

Dieses Lemma wird in den folgenden Beweisen eine zentrale Rolle spielen.

Lemma 3.4 (Faktorisierungslemma). *Ist $\mathfrak{A} = (Q, T, in, out)$ ein Automat, $w \in A^*$, P ein w-Pfad und $P = P_1 \dots P_n$ eine Faktorisierung von P in w_i-Pfade P_i $(i = 1, \dots, n)$, dann gilt*

$$rc(P) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(rc(P_i)).$$

Beweis. Induktion nach n.

Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten der Gleichung ein leeres Produkt. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n = 2$ und P ein w-Pfad. Faktorisiere $P = P_1 P_2$ in einen w_1-Pfad $P_1 = t_1 \dots t_s$ bzw. w_2-Pfad $P_2 = t_{s+1} \dots t_m$ mit $w = w_1 w_2$ und $t_i = (q_i, a_i, x_i, q_{i+1}) \in T$ für alle $i = 1, \dots, m$. Aus der Definition der Laufkostenfunktion folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{rc}(P) &= \prod_{i=1}^{m} \varphi_{a_1 \dots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \dots a_m}(x_i) \\
&= \left[\prod_{i=1}^{s} \varphi_{a_1 \dots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \dots a_{s+1} \dots a_m}(x_i)\right] \odot \left[\prod_{i=s+1}^{m} \varphi_{a_1 \dots a_s \dots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \dots a_m}(x_i)\right] \\
&= \psi_{a_{s+1} \dots a_m}\left(\prod_{i=1}^{s} \varphi_{a_1 \dots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \dots a_s}(x_i)\right) \\
&\quad \odot \varphi_{a_1 \dots a_s}\left(\prod_{i=s+1}^{m} \varphi_{a_{s+1} \dots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \dots a_m}(x_i)\right) \\
&= \psi_{w_2}(\mathrm{rc}(P_1)) \odot \varphi_{w_1}(\mathrm{rc}(P_2)).
\end{aligned}$$

Für $n = 0, 1, 2$ ist die Behauptung also bewiesen. Sei jetzt $n \geq 3$, die Annahme richtig für $n - 1$ und $P = P_1 \dots P_n$. Wir setzen $P' = P_1 \dots P_{n-1}$ und dementsprechend $w' = w_1 \dots w_{n-1}$. Nun benutzen wir sowohl den eben bewiesenen Fall für das Produkt zweier Pfade als auch die Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\mathrm{rc}(P) &= \mathrm{rc}(P' P_n) = \psi_{w_n}(\mathrm{rc}(P')) \odot \varphi_{w'}(\mathrm{rc}(P_n)) \\
&= \psi_{w_n}\left(\prod_{i=1}^{n-1} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_{n-1}}(\mathrm{rc}(P_i))\right) \odot \varphi_{w'}(\mathrm{rc}(P_n)) \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(\mathrm{rc}(P_i))\right] \odot \varphi_{w'}(\mathrm{rc}(P_n)) \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(\mathrm{rc}(P_i))\right] \odot \left[\prod_{i=n}^{n} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(\mathrm{rc}(P_i))\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(\mathrm{rc}(P_i))
\end{aligned}$$

und haben per Induktion die Behauptung für alle $n \geq 0$ bewiesen. $\square$

3.3 Normalisierung

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung eines klassischen Resultates, welches man z.B. in [Ei74] findet.

Lemma 3.5. *Ist $\mathfrak{A}'$ ein Automat, dann gibt es einen normalisierten Automaten $\mathfrak{A}$ mit*

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w = \varepsilon \\ (\|\mathfrak{A}'\|, w) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\mathfrak{A}' = (Q', T', \mathrm{in}', \mathrm{out}')$ und $\mathfrak{A} = (Q, T, \iota, \sigma)$ der normalisierte Automat mit $Q = Q' \,\dot\cup\, \{\iota\} \,\dot\cup\, \{\sigma\}$ und

$$\begin{aligned} T = T' \quad & \cup \quad \{(\iota, a, \sum_{(p,a,x,q)\in T'} (\psi_a(\mathrm{in}'(p)) \odot x), q) \mid a \in A, q \in Q'\} \\ & \cup \quad \{(p, a, \sum_{(p,a,x,q)\in T'} (x \odot \varphi_a(\mathrm{out}'(q))), \sigma) \mid a \in A, p \in Q'\} \\ & \cup \quad \{(\iota, a, \sum_{(p,a,x,q)\in T'} (\psi_a(\mathrm{in}'(p)) \odot x \odot \varphi_a(\mathrm{out}'(q))), \sigma) \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

Wie jeder normalisierte Automat hat $\mathfrak{A}$ quasireguläres Verhalten. Zu zeigen bleibt, daß $\|\mathfrak{A}\|$ und $\|\mathfrak{A}'\|$ auf A^+ übereinstimmen.

Sei zuerst $a \in A$. Nach Konstruktion gibt es nur eine Transition von ι nach σ mit Beschriftung a. Sie hat die Gestalt

$$(\iota, a, \sum_{(p,a,x,q)\in T'} (\psi_a(\mathrm{in}'(p)) \odot x \odot \varphi_a(\mathrm{out}'(q))), \sigma)$$

und damit ist

$$(\|\mathfrak{A}\|, a) = \sum_{(p,a,x,q)\in T'} \psi_a(\mathrm{in}'(p)) \odot x \odot \varphi_a(\mathrm{out}'(q)).$$

Andererseits ist aber

$$\begin{aligned} (\|\mathfrak{A}'\|, a) &= \sum_{t=(p,a,x,q)\in T'} \mathrm{c}'(t) \\ &= \sum_{t=(p,a,x,q)\in T'} \psi_a(\mathrm{in}'(p)) \odot \mathrm{rc}'(t) \odot \varphi_a(\mathrm{out}'(q)) \\ &= \sum_{(p,a,x,q)\in T'} \psi_a(\mathrm{in}'(p)) \odot x \odot \varphi_a(\mathrm{out}'(q)) \\ &= (\|\mathfrak{A}\|, a). \end{aligned}$$

Damit verhalten sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ auf den Wörtern der Länge 1 gleich.

Sei nun $w \in A^+$ ein Wort der Länge ≥ 2. Dann gibt es genau eine Faktorisierung $w = avb$ mit $a, b \in A$ und $v \in A^*$.

$$\begin{aligned}(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum\{\mathrm{rc}(P) \mid P : \iota \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} \sigma\} \\ &= \sum_{p,q \in Q} \sum_{(\iota,a,x,q) \in T} \sum_{R : q \xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}} p} \sum_{(p,b,y,\sigma) \in T} \mathrm{rc}\Big[(\iota, a, x, q) R (p, b, y, \sigma)\Big]\end{aligned}$$

Um die Menge, über die die erste Summe läuft, etwas zu verkleinern, überlege man sich, daß für $q = \iota$ die zweite Summe leer ist, denn da ι in $\mathfrak{A}$ eine Quelle ist, gibt es keine Transition der Form (ι, a, x, ι). Ist $q = \sigma$, dann verschwindet die dritte Summe für alle $p \neq \sigma$, denn σ ist eine Senke in $\mathfrak{A}$. Wenn aber $p = \sigma$ ist, dann ist aus dem selben Grund die vierte Summe leer. Man ändert den obigen Ausdruck also nicht, wenn man q nur über Q' laufen läßt. Völlig analoge Überlegungen gelten für p. Wenn p, q in Q' sind, dann muß R ganz in $\mathfrak{A}'$ verlaufen, da die einzigen Zustände außerhalb Q' Quellen bzw. Senken sind. Wir haben somit

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum_{p,q \in Q'} \sum_{(\iota,a,x,q) \in T} \sum_{R : q \xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'} p} \sum_{(p,b,y,\sigma) \in T} \mathrm{rc}\Big[(\iota, a, x, q) R (p, b, y, \sigma)\Big].$$

Nun nutzen wir die Faktorisierungseigenschaft der Laufkostenfunktion

$$\begin{aligned}\mathrm{rc}\Big[(\iota, a, x, q) R (p, b, y, \sigma)\Big] &= \psi_{vb}(\mathrm{rc}((\iota, a, x, q))) \odot \varphi_a \circ \psi_b(\mathrm{rc}(R)) \odot \varphi_{av}(\mathrm{rc}((p, b, y, \sigma))) \\ &= \psi_{vb}(x) \odot \varphi_a \circ \psi_b(\mathrm{rc}(R)) \odot \varphi_{av}(y).\end{aligned}$$

Aus den Distributivgesetzen folgt

$$\begin{aligned}(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{p,q \in Q'} \sum_{(\iota,a,x,q) \in T} \sum_{R : q \xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'} p} \sum_{(p,b,y,\sigma) \in T} \psi_{vb}(x) \odot \varphi_a \circ \psi_b(\mathrm{rc}(R)) \odot \varphi_{av}(y) \\ &= \sum_{p,q \in Q'} \left[\sum_{(\iota,a,x,q) \in T} \psi_{vb}(x)\right] \odot \left[\sum_{R : q \xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'} p} \varphi_a \circ \psi_b(\mathrm{rc}(R))\right] \odot \left[\sum_{(p,b,y,\sigma) \in T} \varphi_{av}(y)\right] \\ &= \sum_{p,q \in Q'} \psi_{vb}\left[\sum_{(\iota,a,x,q) \in T} x\right] \odot \left[\sum_{R : q \xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'} p} \varphi_a \circ \psi_b(\mathrm{rc}'(R))\right] \odot \varphi_{av}\left[\sum_{(p,b,y,\sigma) \in T} y\right].\end{aligned}$$

Im mittleren geklammerten Ausdruck können wir rc' statt rc schreiben, da R ganz in $\mathfrak{A}'$ verläuft.

Betrachte nun die Summe in der ersten eckigen Klammer. Zu gegebenem $a \in A$ und gegebenem $q \in Q$ gibt es nach Konstruktion genau eine Transition der Form (ι, a, x, q) in T. Diese Transition hat dann (wieder nach Konstruktion) das Gewicht

$$x = \sum_{(p',a,x',q) \in T'} \psi_a(\mathrm{in}'(p')) \odot x'.$$

Damit haben wir

$$\psi_{vb}\left[\sum_{(\iota,a,x,q)\in T} x\right] = \psi_{vb}\left[\sum_{(p',a,x',q)\in T'} \psi_a(\mathrm{in}'(p'))\odot x'\right] = \sum_{(p',a,x',q)\in T'} \psi_w(\mathrm{in}'(p'))\odot \psi_{vb}(x').$$

Analog finden wir zu gegebenem $p\in Q$ und $b\in A$

$$\varphi_{av}\left[\sum_{(p,b,y,\sigma)\in T} y\right] = \sum_{(p,b,y',q')\in T'} \varphi_{av}(y')\odot\varphi_w(\mathrm{out}'(q')).$$

Die beiden letzten Gleichungen benutzen wir nun in unserer Berechnung von $(\|\mathfrak{A}\|, w)$

$$\begin{aligned}(\|\mathfrak{A}\|, w) \quad &= \quad \sum_{p,q\in Q'}\left[\sum_{(p',a,x',q)\in T'} \psi_w(\mathrm{in}'(p'))\odot\psi_{vb}(x')\right]\odot\left[\sum_{R:q\xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'}p} \varphi_a\circ\psi_b(\mathrm{rc}'(R))\right] \\ &\quad\quad \odot\left[\sum_{(p,b,y',q')\in T'}\varphi_{av}(y')\odot\varphi_w(\mathrm{out}'(q'))\right].\end{aligned}$$

Mit den Distributivgesetzen können wir die Summenzeichen wieder alle am vorderen Ende des Ausdrucks versammeln und haben

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum_{p,q\in Q'}\ \sum_{(p',a,x',q)\in T'}\ \sum_{R:q\xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'}p}\ \sum_{(p,b,y',q')\in T'} f$$

mit der Abkürzung

$$f = \psi_w(\mathrm{in}'(p'))\odot\psi_{vb}(x')\odot\varphi_a\circ\psi_b(\mathrm{rc}'(R))\odot\varphi_{av}(y')\odot\varphi_w(\mathrm{out}'(q')).$$

Mit der Faktorisierungseigenschaft der Laufkosten und der Definition der Kosten eines Pfades folgt, daß das Produkt f gerade die Kosten des Pfades $(p',a,x',q)R(p,b,y',q')$ in $\mathfrak{A}'$ ist.

$$\begin{aligned}(\|\mathfrak{A}\|, w) \quad &= \quad \sum_{p,q\in Q'}\ \sum_{(p',a,x',q)\in T'}\ \sum_{R:q\xrightarrow{v}_{\mathfrak{A}'}p}\ \sum_{(p,b,y',q')\in T'} \mathrm{c}'\Big[(p',a,x',q)R(p,b,y',q')\Big] \\ &= \quad \sum_{p',q'\in Q'}\ \sum_{P:p'\xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'}q'} \mathrm{c}'(P) \\ &= \quad (\|\mathfrak{A}'\|, w).\end{aligned}$$

Wir haben nun gezeigt, daß das Verhalten von $\mathfrak{A}$ mit dem von $\mathfrak{A}'$ auch auf den Wörtern der Länge ≥ 2 überein stimmt. □

Dieses Lemma sagt gerade, daß zu jeder erkennbaren Potenzreihe S ein normalisierter Automat existiert, dessen Verhalten mit S auf A^+ überein stimmt. Insbesondere werden erkennbare quasireguläre Potenzreihen von normalisierten Automaten erkannt.

3.4 Kostendeterministische Automaten und Darstellungen

Ein Automat $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ heißt *kostendeterministisch*, wenn für alle $p, q \in Q$ und alle $a \in A$ genau ein $x \in \mathfrak{K}$ existiert, sodaß $(p, a, x, q) \in T$ ist.

Lemma 3.6. *Zu jedem Automaten gibt es einen kostendeterministischen Automaten mit gleichem Verhalten.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}' = (Q', T', \mathrm{in}', \mathrm{out}')$ ein Automat. Wir setzen $\mathfrak{A} = (Q', T, \mathrm{in}', \mathrm{out}')$ mit

$$T = \left\{ (p, a, \sum_{(p,a,x,q)\in T'} x, q) \mid p, q \in Q' \text{ und } a \in A \right\}.$$

Für alle Zustände p, q und jeden Buchstaben a gibt es offenbar genau eine Transition $(p, a, x, q) \in T$, also ist der Automat kostendeterministisch. Da die Ein- und Austrittskosten durch die Konstruktion erhalten bleiben, stimmen die Verhalten beider Automaten auf $w = \varepsilon$ überein.

Sei nun $w \in A^+$. Mittels Induktion nach $|w|$ etablieren wir zuerst das Zwischenergebnis

$$\forall p, q \in Q' : \qquad \sum_{P:p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{rc}'(P) = \sum_{P:p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P).$$

Für $|w| = 1$ ist nach Konstruktion nichts zu zeigen, denn die Laufkosten einer Transition sind gleich ihrem Gewicht. Sei nun $w \in A^+, a \in A$ und das Zwischenergebnis für w bewiesen. Mit dem Faktorisierungslemma gilt dann für alle $p, q \in Q'$

$$\begin{aligned}
\sum_{P:p \xrightarrow{aw}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{rc}'(P) &= \sum_{r\in Q'} \sum_{t:p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}'} r} \sum_{P:r \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{rc}'(tP) \\
&= \sum_{r\in Q'} \sum_{t:p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}'} r} \sum_{P:r \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \psi_w(\mathrm{rc}'(t)) \odot \varphi_a(\mathrm{rc}'(P)) \\
&= \sum_{r\in Q'} \psi_w \left(\sum_{t:p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}'} r} \mathrm{rc}'(t) \right) \odot \varphi_a \left(\sum_{P:r \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{rc}'(P) \right).
\end{aligned}$$

Nun nutzen wir aus, daß das Zwischenergebnis schon für w und alle Transitionen t bewiesen ist, wir können also statt rc' bzw. $\mathfrak{A}'$ nun rc und $\mathfrak{A}$ schreiben und formen analog zu den eben durchgeführten Schritten um

$$\begin{aligned}
\sum_{P:p \xrightarrow{aw}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{rc}'(P) &= \sum_{r\in Q'} \psi_w \left(\sum_{t:p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}} r} \mathrm{rc}(t) \right) \odot \varphi_a \left(\sum_{P:r \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P) \right) \\
&= \sum_{r\in Q'} \sum_{t:p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}} r} \sum_{P:r \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(tP) \\
&= \sum_{P:p \xrightarrow{aw}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P).
\end{aligned}$$

Damit ist die Zwischenbehauptung per Induktion bewiesen und wir zeigen jetzt die Aussage des Lemmas für $w \in A^+$.

$$\begin{aligned}
(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{p,q \in Q'} \sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{c}(P) \\
&= \sum_{p,q \in Q'} \sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \psi_w(\mathrm{in}'(p)) \odot \mathrm{rc}(P) \odot \varphi_w(\mathrm{out}'(q)) \\
&= \sum_{p,q \in Q'} \psi_w(\mathrm{in}'(p)) \odot \left(\sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P) \right) \odot \varphi_w(\mathrm{out}'(q))
\end{aligned}$$

Mit dem Zwischenergebnis können wir in der inneren Summe Striche zu rc bzw. $\mathfrak{A}$ hinzufügen und erhalten

$$\begin{aligned}
(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{p,q \in Q'} \psi_w(\mathrm{in}'(p)) \odot \left(\sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{rc}'(P) \right) \odot \varphi_w(\mathrm{out}'(q)) \\
&= \sum_{p,q \in Q'} \sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \psi_w(\mathrm{in}'(p)) \odot \mathrm{rc}'(P) \odot \varphi_w(\mathrm{out}'(q)) \\
&= \sum_{p,q \in Q'} \sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} q} \mathrm{c}'(P) \\
&= (\|\mathfrak{A}'\|, w).
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Mit $\mathfrak{K}^{n \times n}$ bezeichnen wir das Monoid aller $n \times n$-Matrizen über $\mathfrak{K}$ mit der gewöhnlichen Matrixmultiplikation $\odot$ als Operation. Wenn wir im folgenden einen Endomorphismus h von $\mathfrak{K}$ auf eine Matrix oder einen Vektor M mit Einträgen aus $\mathfrak{K}$ anwenden, dann verstehen wir diese Anwendung komponentenweise, also

$$h(M)_{i,j} = h(M_{i,j}).$$

Eine Abbildung $\mu : A^* \to \mathfrak{K}^{n \times n}$ ist ein (ψ, φ)-*Morphismus*, wenn ε auf das neutrale Element abgebildet wird und für alle $u, v \in A^*$ die Gleichung

$$\mu(uv) = \psi_v(\mu(u)) \odot \varphi_u(\mu(v))$$

gilt.

Sei nun $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ ein Automat, S eine Potenzreihe und $n \geq 1$. Wir nennen ein Tripel (λ, μ, γ) eine (n-dimensionale) *Darstellung* von $\|\mathfrak{A}\|$ bzw. S, wenn $\lambda \in \mathfrak{K}^{1 \times n}$ und $\gamma \in \mathfrak{K}^{n \times 1}$ sind, $\mu : A^* \to \mathfrak{K}^{n \times n}$ ein (ψ, φ)-Morphismus ist und

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \psi_w(\lambda) \odot \mu(w) \odot \varphi_w(\gamma) = (S, w)$$

für alle $w \in A^*$ gilt.

Proposition 3.7. *Eine Potenzreihe S hat eine Darstellung genau dann, wenn sie erkennbar ist.*

Beweis. Werde zuerst S von $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ erkannt. Jedem $w \in A^*$ ordnen wir die $Q \times Q$-Matrix

$$\mu(w)_{p,q} = \sum_{P:p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P)$$

zu. Dann ist μ ein (ψ, φ)-Morphismus, denn sind $w_1, w_2 \in A^*$ und $p, q \in Q$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu(w_1 w_2)_{p,q} &= \sum_{P:p \xrightarrow{w_1 w_2}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P) \\
&= \sum_{i \in Q} \sum_{P_1:p \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}} i} \sum_{P_2:i \xrightarrow{w_2}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P_1 P_2) \\
&= \sum_{i \in Q} \sum_{P_1:p \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}} i} \sum_{P_2:i \xrightarrow{w_2}_{\mathfrak{A}} q} \psi_{w_2}(\mathrm{rc}(P_1)) \odot \varphi_{w_1}(\mathrm{rc}(P_2)) \\
&= \sum_{i \in Q} \left[\sum_{P_1:p \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}} i} \psi_{w_2}(\mathrm{rc}(P_1)) \right] \odot \left[\sum_{P_2:i \xrightarrow{w_2}_{\mathfrak{A}} q} \varphi_{w_1}(\mathrm{rc}(P_2)) \right] \\
&= \sum_{i \in Q} \psi_{w_2} \left(\sum_{P_1:p \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}} i} \mathrm{rc}(P_1) \right) \odot \varphi_{w_1} \left(\sum_{P_2:i \xrightarrow{w_2}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P_2) \right) \\
&= \sum_{i \in Q} \psi_{w_2}(\mu(w_1)_{p,i}) \odot \varphi_{w_1}(\mu(w_2)_{i,q}),
\end{aligned}$$

also $\mu(w_1 w_2) = \psi_{w_2}(\mu(w_1)) \odot \varphi_{w_1}(\mu(w_2))$. Faßt man in als Zeilen- und out als Spaltenvektor in kanonischer Art und Weise auf, dann gilt

$$\begin{aligned}
(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{p,q \in Q} \sum_{P:p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{c}(P) \\
&= \sum_{p,q \in Q} \sum_{P:p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \psi_w(\mathrm{in}(p)) \odot \mathrm{rc}(P) \odot \varphi_w(\mathrm{out}(q)) \\
&= \sum_{p,q \in Q} \psi_w(\mathrm{in}(p)) \odot \left[\sum_{P:p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P) \right] \odot \varphi_w(\mathrm{out}(q)) \\
&= \sum_{p,q \in Q} \psi_w(\mathrm{in}(p)) \odot \mu(w)_{p,q} \odot \varphi_w(\mathrm{out}(q)) \\
&= \psi_w(\mathrm{in}) \odot \mu(w) \odot \varphi_w(\mathrm{out}).
\end{aligned}$$

Damit ist $(\mathrm{in}, \mu, \mathrm{out})$ eine Darstellung von S.

Sei nun andererseits $(\mathrm{in}, \mu, \mathrm{out})$ eine n-dimensionale Darstellung von S. Setze $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ mit $Q = \{1, \ldots, n\}$ und $T = \{(p, a, \mu(a)_{p,q}, q) \mid p, q \in Q, a \in A\}$. Zu zeigen bleibt

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \psi_w(\mathrm{in}) \odot \mu(w) \odot \varphi_w(\mathrm{out}),$$

dafür genügt offenbar die Richtigkeit von

$$\mu(w)_{p,q} = \sum_{P: p \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P) \quad \text{für alle } p, q \in Q.$$

Induktion nach $|w|$. Sei zuerst $w = \varepsilon$. Für $p \neq q$ steht auf beiden Seiten der Gleichung eine Null, ansonsten auf beiden Seiten eine Eins. Sei nun $a \in A, w \in A^*$ und die Behauptung richtig für w. Da μ ein (ψ, φ)-Morphismus ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mu(aw)_{p,q} &= (\psi_w(\mu(a)) \odot \varphi_a(\mu(w)))_{p,q} \\
&= \sum_{i \in Q} \psi_w(\mu(a))_{p,i} \odot \varphi_a(\mu(w))_{i,q} \\
&= \sum_{i \in Q} \psi_w(\mu(a)_{p,i}) \odot \varphi_a(\mu(w)_{i,q}) \\
&= \sum_{i \in Q} \psi_w(\mu(a)_{p,i}) \odot \varphi_a \left(\sum_{P: i \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P) \right) \\
&= \sum_{i \in Q} \sum_{P: i \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \psi_w(\mu(a)_{p,i}) \odot \varphi_a(\mathrm{rc}(P)) \\
&= \sum_{t: p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}} i} \sum_{P: i \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \psi_w(\mathrm{rc}(t)) \odot \varphi_a(\mathrm{rc}(P)) \\
&= \sum_{t: p \xrightarrow{a}_{\mathfrak{A}} i} \sum_{P: i \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(tP) \\
&= \sum_{P: p \xrightarrow{aw}_{\mathfrak{A}} q} \mathrm{rc}(P).
\end{aligned}$$

Damit ist die Zwischenbehauptung und auch die Proposition bewiesen. □

4 Formale Potenzreihen

4.1 Der Semiring $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^* \rangle\rangle$

Mit $\mathfrak{K}^{A^*}$ bezeichnet man die Menge aller Potenzreihen von A^* nach $\mathfrak{K}$. Für $S, T \in \mathfrak{K}^{A^*}$ definieren wir eine *Summe* (oder *Addition*) durch

$$(S \oplus T, w) = (S, w) \oplus (T, w)$$

und eine *Multiplikation* (oder ein *Produkt*) durch

$$(S \odot T, w) = \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((T,v)).$$

Bemerkung 4.1. Das Zeichen $\odot$ wird von anderen Autoren i.a. für das *Hadamard*-Produkt

$$(S \odot T, w) = (S, w) \odot (T, w)$$

der Potenzreihen S, T verwendet. In unserer Arbeit benötigen wir das Hadamard-Produkt nicht und wollen die Notation möglichst einfach halten, daher bezeichnet $S \odot T$ immer das Produkt von S und T im obigen Sinne.

Bemerkung 4.2. Wählt man als Bewertungspaar $(w \mapsto \mathrm{id}, w \mapsto \mathrm{id})$, dann vereinfacht sich unsere Produktdefinition von Potenzreihen zum wohlbekannten *Cauchy*-Produkt

$$(S \odot T, w) = \sum_{w=uv} (S,u) \odot (T,v).$$

Man erhält die Produktdefinition von Droste und Kuske in [DK02], wenn man mit dem Bewertungspaar $(w \mapsto \mathrm{id}, w \mapsto h)$ für ein $h \in \mathrm{End}(\mathfrak{K})$ arbeitet

$$(S \odot T, w) = \sum_{w=uv} (S,u) \odot h^{|u|}((T,v)).$$

Wir setzen $\mathbf{0} = 0\varepsilon$ bzw. $\mathbf{1} = 1\varepsilon$ und bezeichnen das Quintupel $(\mathfrak{K}^{A^*}, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ mit $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^* \rangle\rangle$.

Lemma 4.3. *Die Struktur $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^* \rangle\rangle$ ist ein Semiring.*

Beweis. Da die Addition von Potenzreihen punktweise erklärt wurde, ist mit $(\mathfrak{K}, \oplus, 0)$ auch $(\mathfrak{K}^{A^*}, \oplus, \mathbf{0})$ ein abelsches Monoid.

Seien nun S, T, U Potenzreihen und $w \in A^*$. Dann ist

$$\begin{aligned}
((S \odot T) \odot U, w) &= \sum_{w=uv} \psi_v((S \odot T, u)) \odot \varphi_u((U,v)) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v \left(\sum_{u=u_1u_2} \psi_{u_2}((S,u_1)) \odot \varphi_{u_1}((T,u_2)) \right) \odot \varphi_u((U,v)) \\
&= \sum_{w=uv} \sum_{u=u_1u_2} \psi_v \circ \psi_{u_2}((S,u_1)) \odot \psi_v \circ \varphi_{u_1}((T,u_2)) \odot \varphi_u((U,v)) \\
&= \sum_{w=u_1u_2v} \psi_{u_2v}((S,u_1)) \odot \psi_v \circ \varphi_{u_1}((T,u_2)) \odot \varphi_{u_1} \circ \varphi_{u_2}((U,v)).
\end{aligned}$$

Wir benennen die Variablen um ($u_1 \mapsto u, u_2 \mapsto v_1, v \mapsto v_2$) und wenden auf den mittleren Faktor die Kommutativität von φ und ψ an.

$$\begin{aligned}
((S \odot T) \odot U, w) &= \sum_{w=uv_1v_2} \psi_{v_1v_2}((S,u)) \odot \varphi_u \circ \psi_{v_2}((T,v_1)) \odot \varphi_u \circ \varphi_{v_1}((U,v_2)) \\
&= \sum_{w=uv} \sum_{v=v_1v_2} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u \circ \psi_{v_2}((T,v_1)) \odot \varphi_u \circ \varphi_{v_1}((U,v_2)) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u \left(\sum_{v=v_1v_2} \psi_{v_2}((T,v_1)) \odot \varphi_{v_1}((U,v_2)) \right) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((T \odot U, v)) \\
&= (S \odot (T \odot U), w)
\end{aligned}$$

Damit ist die Assoziativität der Multiplikation gezeigt.

Wegen $\psi_\varepsilon = \mathrm{id}$ gilt

$$(S \odot \mathbf{1}, w) = \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((\mathbf{1},v)) = \psi_\varepsilon((S,w)) \odot \varphi_w((\mathbf{1},\varepsilon)) = (S,w)$$

und analog folgt $(\mathbf{1} \odot S, w) = (S,w)$. Die Potenzreihe $\mathbf{1}$ ist daher eine Links- und eine Rechtseins bzgl. Multiplikation. Die Struktur $(\mathfrak{K}^{A^*}, \odot, \mathbf{1})$ ist somit ein Monoid.

Offenbar ist die Potenzreihe $\mathbf{0}$ beidseitig absorbierend. Die Distributivität von links folgt aus

$$\begin{aligned}
(S \odot (T \oplus U), w) &= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((T \oplus U, v)) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((T,v) \oplus (U,v)) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot [\varphi_u((T,v)) \oplus \varphi_u((U,v))] \\
&= \left[\sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((T,v)) \right] \oplus \left[\sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((U,v)) \right] \\
&= (S \odot T, w) \oplus (S \odot U, w) \\
&= ((S \odot T) \oplus (S \odot U), w).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Distributivität von rechts und hat die Behauptung bewiesen. □

4.2 Explizite Darstellung von S^n und rationale Potenzreihen

Wir setzen $S^0 = \mathbf{1}$ und rekursiv $S^{n+1} = S \odot S^n$ für alle $n \geq 0$. Diese rekursive Darstellung der Potenzen einer Potenzreihe läßt sich mit dem folgenden Lemma in einer expliziten Form schreiben, die für spätere Beweise vorteilhaft ist.

Lemma 4.4. *Ist S eine Potenzreihe, $n \geq 0$ und $w \in A^*$, dann hat (S^n, w) die explizite Darstellung*

$$(S^n, w) = \sum_{w=w_1\ldots w_n} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{w_1\ldots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1}\ldots w_n}((S, w_i)).$$

Beweis. Induktion nach n.

Sei $n = 0$. Ist $w = \varepsilon$, dann steht auf der linken Seite der Gleichung per Definition eine Eins. Auf der rechten Seite steht eine Summe mit einem leeren Produkt als einzigem Summanden, also auch eine Eins. Da sich ein nichtleeres Wort auf keinerlei Art in $n = 0$ Teilworte faktorisieren läßt, steht für $w \neq \varepsilon$ auf beiden Seiten eine Null.

Sei nun die Behauptung für n und alle Wörter bewiesen. Sei $w \in A^*$, dann ist

$$\begin{aligned}
(S^{n+1}, w) &= (S \odot S^n, w) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u((S^n, v)) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \varphi_u\left(\sum_{v=v_1\ldots v_n} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{v_1\ldots v_{i-1}} \circ \psi_{v_{i+1}\ldots v_n}((S, v_i))\right) \\
&= \sum_{w=uv} \psi_v((S,u)) \odot \left[\sum_{v=v_1\ldots v_n} \prod_{i=1}^{n} \varphi_u \circ \varphi_{v_1\ldots v_{i-1}} \circ \psi_{v_{i+1}\ldots v_n}((S, v_i))\right] \\
&= \sum_{w=uv_1\ldots v_n} \psi_{v_1\ldots v_n}((S,u)) \odot \left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_{uv_1\ldots v_{i-1}} \circ \psi_{v_{i+1}\ldots v_n}((S, v_i))\right].
\end{aligned}$$

Wir benennen die Variablen um ($u \mapsto w_1, v_j \mapsto w_{j+1}$) und verschieben danach die Indexgrenzen des Produktes ($i \mapsto i+1$). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(S^{n+1}, w) &= \sum_{w=w_1\ldots w_{n+1}} \psi_{w_2\ldots w_{n+1}}((S, w_1)) \odot \left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_{w_1\ldots w_i} \circ \psi_{w_{i+2}\ldots w_{n+1}}((S, w_{i+1}))\right] \\
&= \sum_{w=w_1\ldots w_{n+1}} \psi_{w_2\ldots w_{n+1}}((S, w_1)) \odot \left[\prod_{i=2}^{n+1} \varphi_{w_1\ldots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1}\ldots w_{n+1}}((S, w_i))\right] \\
&= \sum_{w=w_1\ldots w_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \varphi_{w_1\ldots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1}\ldots w_{n+1}}((S, w_i))
\end{aligned}$$

und per Induktion ist die Behauptung bewiesen. □

Sei S eine quasireguläre Potenzreihe, $w \in A^*$ und $n > |w|$. Dann gibt es zu jeder Faktorisierung $w = w_1 \ldots w_n$ ein j mit $1 \leq j \leq n$ und $w_j = \varepsilon$. Da S quasiregulär ist, verschwindet (S, w_j). Damit ist im Produkt der expliziten Darstellung von (S^n, w) der Faktor für $i = j$ Null. Also verschwinden sowohl Produkt als auch Summe und es gilt $(S^n, w) = 0$.

Mit dieser Beobachtung hat die Definition der *Iteration* einer quasiregulären Potenzreihe S durch

$$(S^*, w) = \sum_{n \geq 0} (S^n, w)$$

Sinn, denn in der Summe rechts verschwinden zu jedem $w \in A^*$ höchstens endlich viele Summanden nicht.

Bemerkung 4.5. Folgende Aussagen sind aus den Definitionen sofort klar.

- Summe und Produkt quasiregulärer Potenzreihen sind quasiregulär.
- Ist S quasiregulär und $n \geq 1$, dann ist auch S^n quasiregulär.
- Ist S quasiregulär, dann ist $(S^*, \varepsilon) = 1$.

Definition 4.6. Die kleinste Teilmenge von $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^* \rangle\rangle$, die alle Monome der Form xu mit $x \in \mathfrak{K}, u \in A \cup \{\varepsilon\}$ enthält und abgeschlossen ist unter den Operationen $\oplus, \odot, {}^*$ (wobei * nur auf quasireguläre Potenzreihen angewandt wird), heißt $\mathrm{Rat}_{\psi,\varphi}(A^*)$, die Menge der (ψ, φ)-*rationalen* (oder einfach *rationalen*) Potenzreihen.

5 Unser Hauptresultat

5.1 Rationalität impliziert Erkennbarkeit

Lemma 5.1. *Die Monome der Form xu mit $x \in \mathfrak{K}, u \in A \cup \{\varepsilon\}$ sind erkennbar.*

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{K}$ und zuerst $u = \varepsilon$. Der Automat $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$ mit $Q = \{p\}$, $T = \emptyset$ und $\mathrm{in}(p) = 1$ bzw. $\mathrm{out}(p) = x$ erkennt xu. Da es keine Transitionen gibt, existieren keine w-Pfade für $w \in A^+$. Der leere Pfad hat Kosten

$$\sum_{q \in Q} \mathrm{in}(q) \odot \mathrm{out}(q) = \mathrm{in}(p) \odot \mathrm{out}(p) = x = (xu, u).$$

Für $u \in A$ setze $Q = \{\iota, \sigma\}, T = \{(\iota, u, x, \sigma)\}$ und sei $\mathfrak{A} = (Q, T, \iota, \sigma)$ der resultierende normalisierte Automat. Dann hat $\mathfrak{A}$ quasireguläres Verhalten und der einzige nichtleere Pfad in $\mathfrak{A}$ ist die Transition (ι, u, x, σ). Für alle $w \in A^*$ mit $w \neq u$ ist daher $(\|\mathfrak{A}\|, w) = 0$. Die Summe über die Kosten aller u-Pfade ist gerade das Gewicht der Transition, also x. Damit ist $\|\mathfrak{A}\| = xu$. $\square$

Lemma 5.2. *Die Summe erkennbarer Potenzreihen ist erkennbar.*

Beweis. Seien S', S'' Potenzreihen, die von den Automaten $\mathfrak{A}' = (Q', T', \mathrm{in}', \mathrm{out}')$ bzw. $\mathfrak{A}'' = (Q'', T'', \mathrm{in}'', \mathrm{out}'')$ erkannt werden. Die disjunkte Vereinigung dieser Automaten ist $\mathfrak{A} = (Q' \mathbin{\dot\cup} Q'', T' \cup T'', \mathrm{in}, \mathrm{out})$ mit

$$\mathrm{in}(q) = \begin{cases} \mathrm{in}'(q) & \text{falls } q \in Q' \\ \mathrm{in}''(q) & \text{falls } q \in Q'' \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathrm{out}(q) = \begin{cases} \mathrm{out}'(q) & \text{falls } q \in Q' \\ \mathrm{out}''(q) & \text{falls } q \in Q''. \end{cases}$$

Wegen

$$\sum_{q\in Q} \mathrm{in}(q)\odot \mathrm{out}(q) = \left[\sum_{q\in Q'} \mathrm{in}'(q)\odot \mathrm{out}'(q)\right] \oplus \left[\sum_{q\in Q''} \mathrm{in}''(q)\odot \mathrm{out}''(q)\right] = (S',\varepsilon)\oplus(S'',\varepsilon)$$

gilt $(\|\mathfrak{A}\|,\varepsilon) = (S'\oplus S'',\varepsilon)$. Sei nun $w\in A^+$. Da wir keine Transitionen im Automaten $\mathfrak{A}$ haben, die es nicht schon vorher in $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}''$ gab, muß jeder w-Pfad in $\mathfrak{A}$ ganz in $\mathfrak{A}'$ oder ganz in $\mathfrak{A}''$ verlaufen. Offenbar bleiben durch die Konstruktion auch alle w-Pfade aus $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}''$ erhalten. Die Kosten eines w-Pfades haben sich auch nicht geändert, da wir auf Q' bzw. Q'' die Ein- und Austrittskosten und mit den Gewichten der Transitionen auch die Laufkosten beibehalten haben. Somit ist $\|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}'\|\oplus\|\mathfrak{A}''\| = S'\oplus S''$. □

Lemma 5.3. *Das Produkt erkennbarer Potenzreihen ist erkennbar.*

Beweis. Seien S_1 und S_2 erkennbare Potenzreihen. Schreibe $S_1 = S'\oplus y_1\varepsilon$ und $S_2 = S''\oplus y_2\varepsilon$ mit quasiregulären Potenzreihen S' und S''. Nach Eilenbergs Lemma gibt es normalisierte Automaten $\mathfrak{A}' = (Q',T',\iota',\sigma')$ und $\mathfrak{A}'' = (Q'',T'',\iota'',\sigma'')$, die S' bzw. S'' erkennen. Wir können annehmen, daß Q' und Q'' disjunkt sind.

Wir zeigen zuerst, daß $S'\odot S''$ erkennbar ist. Sei dafür $\mathfrak{A}$ der Automat, der durch ausschließliches Identifizieren der Zustände σ' und ι'' entsteht. Diesen Zustand nennen wir κ und versehen ihn mit Ein- und Austrittskosten Null. Ansonsten bleiben Ein- und Austrittskosten sowie alle Transitionen erhalten. Offenbar ist $\mathfrak{A}$ ein normalisierter Automat mit Initialzustand ι' und Finalzustand σ''.

Sei $w\in A^*$. Jeder w-Pfad P von ι' nach σ'' muß über κ führen. Da $\kappa=\sigma'$ in $\mathfrak{A}'$ eine Senke ist, gibt es keine Transition, die von κ zu einem Zustand in $\mathfrak{A}'$ führt. Analog folgt, daß von einem Zustand in $\mathfrak{A}''$ keine Transition zu κ führt, da $\kappa=\iota''$ in $\mathfrak{A}''$ eine Quelle ist. Der Pfad $P=P'P''$ von ι' nach σ'' faktorisiert sich also auf genau eine Weise in einen w'-Pfad P', der ganz in $\mathfrak{A}'$, und einen w''-Pfad P'', der ganz in $\mathfrak{A}''$ verläuft. Umgekehrt ergeben ein w'-Pfad P' in $\mathfrak{A}'$ von ι' nach σ' und ein w''-Pfad P'' in $\mathfrak{A}''$ von ι'' nach σ'' einen $w=w'w''$-Pfad $P=P'P''$ in $\mathfrak{A}$ von ι' nach σ''. Mit dem Faktorisierungslemma und den Distributivgesetzen folgt

$$\begin{aligned}
(\|\mathfrak{A}\|,w) &= \sum_{P:\iota'\xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}}\sigma''} \mathrm{rc}(P)\\
&= \sum_{w=w'w''}\ \sum_{P':\iota'\xrightarrow{w'}_{\mathfrak{A}'}\kappa}\ \sum_{P'':\kappa\xrightarrow{w''}_{\mathfrak{A}''}\sigma''} \mathrm{rc}(P'P'')\\
&= \sum_{w=w'w''}\ \sum_{P':\iota'\xrightarrow{w'}_{\mathfrak{A}'}\kappa}\ \sum_{P'':\kappa\xrightarrow{w''}_{\mathfrak{A}''}\sigma''} \psi_{w''}(\mathrm{rc}(P'))\odot\varphi_{w'}(\mathrm{rc}(P''))\\
&= \sum_{w=w'w''}\left[\sum_{P':\iota'\xrightarrow{w'}_{\mathfrak{A}'}\kappa} \psi_{w''}(\mathrm{rc}(P'))\right]\odot\left[\sum_{P'':\kappa\xrightarrow{w''}_{\mathfrak{A}''}\sigma''} \varphi_{w'}(\mathrm{rc}(P''))\right].
\end{aligned}$$

Die Laufkostenfunktion rc stimmt mit den Funktionen rc$'$ bzw. rc$''$ auf Pfaden, die ganz in $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}''$ verlaufen, überein, denn wir haben nach Konstruktion alle Transitionen beibehalten. Benutzt man, daß $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ normalisiert sind, folgt

$$\begin{aligned}
(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{w=w'w''} \left[\sum_{P':\iota' \xrightarrow{w'}_{\mathfrak{A}'} \kappa} \psi_{w''}(\mathrm{rc}'(P')) \right] \odot \left[\sum_{P'':\kappa \xrightarrow{w''}_{\mathfrak{A}''} \sigma''} \varphi_{w'}(\mathrm{rc}''(P'')) \right] \\
&= \sum_{w=w'w''} \psi_{w''} \left(\sum_{P':\iota' \xrightarrow{w'}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \mathrm{rc}'(P') \right) \odot \varphi_{w'} \left(\sum_{P'':\iota'' \xrightarrow{w''}_{\mathfrak{A}''} \sigma''} \mathrm{rc}''(P'') \right) \\
&= \sum_{w=w'w''} \psi_{w''} \left(\sum_{P':\iota' \xrightarrow{w'}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \mathrm{c}'(P') \right) \odot \varphi_{w'} \left(\sum_{P'':\iota'' \xrightarrow{w''}_{\mathfrak{A}''} \sigma''} \mathrm{c}''(P'') \right) \\
&= \sum_{w=w'w''} \psi_{w''}((\|\mathfrak{A}'\|, w')) \odot \varphi_{w'}((\|\mathfrak{A}''\|, w'')) \\
&= \sum_{w=w'w''} \psi_{w''}((S', w')) \odot \varphi_{w'}((S'', w'')) \\
&= (S' \odot S'', w).
\end{aligned}$$

Also ist $S' \odot S''$ erkennbar.

Nun sei $\mathfrak{A}$ der Automat, der aus dem normalisierten Automaten $\mathfrak{A}'$ dadurch entsteht, daß man die Austrittskosten von σ' auf y_2 setzt. Dann ist für $w \in A^+$

$$\begin{aligned}
(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{P:\iota' \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} \sigma'} \mathrm{c}(P) \\
&= \sum_{P:\iota' \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} \sigma'} \psi_w(\mathrm{in}(\iota')) \odot \mathrm{rc}(P) \odot \varphi_w(\mathrm{out}(\sigma')) \\
&= \left[\sum_{P:\iota' \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} \sigma'} \mathrm{rc}(P) \right] \odot \varphi_w(y_2) \\
&= \left[\sum_{P:\iota' \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \mathrm{rc}'(P) \right] \odot \varphi_w(y_2) \\
&= (\|\mathfrak{A}'\|, w) \odot \varphi_w(y_2) \\
&= (S', w) \odot \varphi_w(y_2).
\end{aligned}$$

Da S' und $\|\mathfrak{A}\|$ quasiregulär sind, gilt diese Gleichung für alle $w \in A^*$. Überzeugen wir uns noch von

$$\begin{aligned}(S' \odot y_2\varepsilon, w) &= \sum_{w=w_1w_2} \psi_{w_2}((S', w_1)) \odot \varphi_{w_1}((y_2\varepsilon, w_2))\\ &= \psi_\varepsilon((S', w)) \odot \varphi_w((y_2\varepsilon, \varepsilon))\\ &= (S', w) \odot \varphi_w(y_2),\end{aligned}$$

dann haben wir eben gezeigt, daß die Potenzreihe $S' \odot y_2\varepsilon$, und aus analogen Gründen auch $y_1\varepsilon \odot S''$, erkennbar ist. Die Potenzreihe $y_1\varepsilon \odot y_2\varepsilon$ ist wegen

$$\begin{aligned}(y_1\varepsilon \odot y_2\varepsilon, w) &= \sum_{w=w_1w_2} \psi_{w_2}((y_1\varepsilon, w_1)) \odot \varphi_{w_1}((y_2\varepsilon, w_2))\\ &= \psi_w(y_1) \odot (y_2\varepsilon, w) \oplus (y_1\varepsilon, w) \odot \varphi_w(y_2)\\ &= ((y_1 \odot y_2 \oplus y_1 \odot y_2)\varepsilon, w)\end{aligned}$$

ein Monom und als solches erkennbar. Nun betrachte man

$$\begin{aligned}S_1 \odot S_2 &= (S' \oplus y_1\varepsilon) \odot (S'' \oplus y_2\varepsilon)\\ &= (S' \odot S'') \oplus (S' \odot y_2\varepsilon) \oplus (y_1\varepsilon \odot S'') \oplus (y_1\varepsilon \odot y_2\varepsilon).\end{aligned}$$

Jeder der Summanden wurde als erkennbar klassifiziert, als Summe erkennbarer Potenzreihen ist somit auch $S_1 \odot S_2$ erkennbar. □

Lemma 5.4. *Ist S eine erkennbare quasireguläre Potenzreihe, dann ist auch S^* erkennbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung und Eilenbergs Lemma gibt es einen normalisierten Automaten $\mathfrak{A}' = (Q', T', \iota', \sigma')$, der S erkennt. Sei nun $\mathfrak{A}$ der Automat, der aus $\mathfrak{A}'$ dadurch entsteht, daß man ausschließlich ι' und σ' identifiziert und mit Ein- und Austrittskosten Eins versieht. Diesen Zustand nennen wir wieder κ.

Da $\mathfrak{A}'$ normalisiert ist, gilt nach Konstruktion $(\|\mathfrak{A}\|, \varepsilon) = 1 = (S^*, \varepsilon)$. Es bleibt die Gleichung $(\|\mathfrak{A}\|, w) = (S^*, w)$ für $w \in A^+$ zu zeigen. Beachte, daß nach Konstruktion jeder Pfad nichtverschwindender Kosten in $\mathfrak{A}$ von κ nach κ läuft und für diese Pfade Kosten und Laufkosten gleich sind. Ebenfalls sind nach Konstruktion die Laufkosten für Pfade in $\mathfrak{A}'$ gleich den Laufkosten derselben Pfade in $\mathfrak{A}$.

Sei nun $w \in A^+$. Um alle w-Pfade in $\mathfrak{A}$ von κ nach κ aufzuzählen, überlege man sich, daß es zu jedem w-Pfad P dieser Art genau ein $n \geq 0$, genau eine Faktorisierung $w = w_1 \dots w_n$ und genau eine Faktorisierung $P = P_1 \dots P_n$ gibt, derart, daß jeder Teilpfad P_i mit Beschriftung w_i in $\mathfrak{A}'$ von ι' nach σ' läuft. Summiert man über alle $n \geq 0$ und alle Faktorisierungen für w und P auf, dann hat man jeden w-Pfad in $\mathfrak{A}$ genau einmal gezählt. Mit der Faktorisierungsformel für die Laufkosten haben wir

$$\begin{aligned}(\|\mathfrak{A}\|, w) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{w=w_1\dots w_n} \sum_{P_1:\iota' \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \cdots \sum_{P_n:\iota' \xrightarrow{w_n}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \mathrm{rc}'(P_1 \dots P_n)\\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{w=w_1\dots w_n} \sum_{P_1:\iota' \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \cdots \sum_{P_n:\iota' \xrightarrow{w_n}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{w_1\dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1}\dots w_n}(\mathrm{rc}'(P_i)).\end{aligned}$$

Im Produkt hängt der Faktor für $i = 1$ von n, der Faktorisierung von w und P_1 ab, aber keinem weiteren Teilpfad. Wir können diesen Faktor also aus den inneren Summen heraus bis direkt hinter die Summe, die über alle Pfade P_1 läuft, ziehen. Desweiteren hängen die übrigen Faktoren des Produktes und die Summationen über die Pfade P_i mit $i \geq 2$ nicht von P_1 ab. Substituieren wir

$$f_i = \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(\mathrm{rc}'(P_i)),$$

dann haben wir

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) \;=\; \sum_{n \geq 0} \sum_{w = w_1 \dots w_n} \left[\sum_{P_1 : \iota' \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} f_1 \right] \odot \left[\sum_{P_2 : \iota' \xrightarrow{w_2}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \cdots \sum_{P_n : \iota' \xrightarrow{w_n}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \prod_{i=2}^{n} f_i \right].$$

Betrachte nun den zweiten Ausdruck in eckigen Klammern. Analog zu f_1 können wir den Faktor f_2 nach vorn ziehen. Wir führen diesen Prozeß für jeden Faktor f_i durch und finden schließlich

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) \;=\; \sum_{n \geq 0} \sum_{w = w_1 \dots w_n} \left[\sum_{P_1 : \iota' \xrightarrow{w_1}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} f_1 \right] \odot \left[\sum_{P_2 : \iota' \xrightarrow{w_2}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} f_2 \right] \odot \dots \odot \left[\sum_{P_n : \iota' \xrightarrow{w_n}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} f_n \right].$$

Betrachten wir den i-ten eckig geklammerten Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum_{P_i : \iota' \xrightarrow{w_i}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} f_i \;&=\; \sum_{P_i : \iota' \xrightarrow{w_i}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}(\mathrm{rc}'(P_i)) \\ &=\; \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n} \left(\sum_{P_i : \iota' \xrightarrow{w_i}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} \mathrm{rc}'(P_i) \right). \end{aligned}$$

In den runden Klammern steht nun gerade das Verhalten von $\mathfrak{A}'$ bei w_i. Da S von $\mathfrak{A}'$ erkannt wird, folgt

$$\sum_{P_i : \iota' \xrightarrow{w_i}_{\mathfrak{A}'} \sigma'} f_i = \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}((S, w_i)).$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Berechnung von $(\|\mathfrak{A}\|, w)$ ein und finden

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum_{n \geq 0} \sum_{w = w_1 \dots w_n} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{w_1 \dots w_{i-1}} \circ \psi_{w_{i+1} \dots w_n}((S, w_i)).$$

Im Kapitel über Potenzreihen haben wir gezeigt, daß die innere Summe gerade die explizite Darstellung von (S^n, w) ist. Daher ist für alle $w \in A^+$

$$(\|\mathfrak{A}\|, w) = \sum_{n \geq 0} (S^n, w).$$

Daß diese Gleichheit auch für $w = \varepsilon$ gilt, hatten wir uns schon überlegt, also ist $\mathfrak{A}$ ein Automat, der S^* erkennt. $\square$

Die Lemmata dieses Abschnitts zeigen, daß man, ausgehend von den Monomen besagter Form, durch endlich viele Anwendungen der Operationen $\oplus, \odot, {}^*$ die Menge der erkennbaren Potenzreihen nicht verläßt. Da aber jede rationale Potenzreihe auf diese Weise erzeugt werden kann, haben wir die folgende Proposition bewiesen.

Proposition 5.5. *Jede rationale Potenzreihe ist erkennbar.*

5.2 Erkennbarkeit impliziert Rationalität

Proposition 5.6. *Jede erkennbare Potenzreihe ist rational.*

Beweis. Sei S' eine erkennbare Potenzreihe. Schreibe $S' = S \oplus y\varepsilon$ mit quasiregulärem S und sei $\mathfrak{A} = (Q, T, \iota, \sigma)$ ein normalisierter Automat mit n Zuständen, der S erkennt. Wir können annehmen, daß $Q = \{1, \dots, n\}$ ist. Für $p, q \in Q$ und $0 \leq k \leq n$ sei $X_{p,q}^{(k)}$ die Menge aller nichtleeren Pfade P von p nach q, sodaß P nur innere Zustände $\leq k$ hat.

Wir zeigen die aus der Automatentheorie wohlbekannte Zerlegung (siehe z.B. [KN01], S. 84)

$$\forall k \geq 0: \quad X_{p,q}^{(k+1)} = X_{p,q}^{(k)} \,\dot{\cup}\, X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^* X_{k+1,q}^{(k)}.$$

Jeder Pfad in $X_{p,q}^{(k)}$ liegt auch in $X_{p,q}^{(k+1)}$. Ein Pfad aus $X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^* X_{k+1,q}^{(k)}$ führt von p nach $k+1$, vollführt evtl. ein paar Schleifen und läuft von $k+1$ weiter nach q. Zwischen p und q werden höchstens Zustände $\leq k+1$ durchlaufen, also liegt der Pfad in $X_{p,q}^{(k+1)}$. Damit haben wir die Inklusion $\supseteq$ gezeigt. Sei nun P ein Pfad aus $X_{p,q}^{(k+1)}$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten. Hat P nur innere Zustände $\leq k$ oder Länge 1, dann liegt P schon in $X_{p,q}^{(k)}$. Sei nun P ein Pfad der Länge ≥ 2 mit einem inneren Zustand gleich $k+1$. Dann kann man $P = P_1 P_2 P_3$ eindeutig zerlegen derart, daß $P_1 : p \longrightarrow k+1$ nur innere Zustände $\leq k$, $P_2 : k+1 \longrightarrow k+1$ nur Zustände $\leq k+1$ und $P_3 : k+1 \longrightarrow q$ nur innere Zustände $\leq k$ durchläuft und P_1 bzw. P_3 nichtleer sind. Den Pfad P_2 kann man weiter zerlegen, sodaß jeder Faktor nur innere Zustände $\leq k$ hat. Damit ist $P_1 \in X_{p,k+1}^{(k)}, P_2 \in \left(X_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^*$ und $P_3 \in X_{k+1,q}^{(k)}$, also

$$P \in X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^* X_{k+1,q}^{(k)}.$$

Damit gilt auch die Inklusion $\subseteq$. Die Vereinigung ist disjunkt, da jeder Pfad aus

$$X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)}\right)^* X_{k+1,q}^{(k)}$$

einen inneren Zustand $k+1$ hat und somit nicht in $X_{p,q}^{(k)}$ liegt.

Sei $S_{p,q}^{(k)}$ die Potenzreihe

$$(S_{p,q}^{(k)}, w) = \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{p,q}^{(k)},\ P \text{ ist ein } w\text{-Pfad} \right\}.$$

Für $w \in A^*$ gilt mit der eben bewiesenen Zerlegung

$$\begin{aligned}
(S_{p,q}^{(k+1)}, w) &= \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{p,q}^{(k+1)},\ P \text{ ist ein } w\text{-Pfad} \right\} \\
&= \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{p,q}^{(k)},\ P \text{ ist } w\text{-Pfad} \right\} \\
&\quad \oplus \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^* X_{k+1,q}^{(k)},\ P \text{ ist } w\text{-Pfad} \right\} \\
&= S_{p,q}^{(k)} \oplus R(w)
\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$R(w) = \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^* X_{k+1,q}^{(k)},\ P \text{ ist } w\text{-Pfad} \right\}.$$

Zu jedem w-Pfad P sei $P = P_1 P_2 P_3$ die oben beschrieben eindeutige Zerlegung mit $P_1 \in X_{p,k+1}^{(k)}, P_2 \in \left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^*$ und $P_3 \in X_{k+1,q}^{(k)}$. Weiter sei w_i die Beschriftung von P_i für $i = 1, 2, 3$. Damit ist

$$\begin{aligned}
R(w) &= \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{p,k+1}^{(k)} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^* X_{k+1,q}^{(k)},\ P \text{ ist } w\text{-Pfad} \right\} \\
&= \sum_{w = w_1 w_2 w_3} \sum_{P_1} \sum_{P_2} \sum_{P_3} \mathrm{rc}(P_1 P_2 P_3) \\
&= \sum_{w = w_1 w_2 w_3} \sum_{P_1} \sum_{P_2} \sum_{P_3} \psi_{w_2 w_3}(\mathrm{rc}(P_1)) \odot \varphi_{w_1} \circ \psi_{w_3}(\mathrm{rc}(P_2)) \odot \varphi_{w_1 w_2}(\mathrm{rc}(P_3)) \\
&= \sum_{w = w_1 w_2 w_3} \left[\sum_{P_1} \psi_{w_2 w_3}(\mathrm{rc}(P_1)) \right] \odot \left[\sum_{P_2} \varphi_{w_1} \circ \psi_{w_3}(\mathrm{rc}(P_2)) \right] \odot \left[\sum_{P_3} \varphi_{w_1 w_2}(\mathrm{rc}(P_3)) \right] \\
&= \sum_{w = w_1 w_2 w_3} \psi_{w_2 w_3} \left(\sum_{P_1} \mathrm{rc}(P_1) \right) \odot \varphi_{w_1} \circ \psi_{w_3} \left(\sum_{P_2} \mathrm{rc}(P_2) \right) \odot \varphi_{w_1 w_2} \left(\sum_{P_3} \mathrm{rc}(P_3) \right) \\
&= \sum_{w = w_1 w_2 w_3} \psi_{w_2 w_3} \left((S_{p,k+1}^{(k)}, w_1) \right) \odot \varphi_{w_1} \circ \psi_{w_3} \left((V, w_2) \right) \odot \varphi_{w_1 w_2} \left((S_{k+1,q}^{(k)}, w_3) \right)
\end{aligned}$$

mit der Substitution

$$(V, u) = \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in \left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^*,\ P \text{ ist ein } u\text{-Pfad} \right\}.$$

Offenbar gilt

$$\left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^* = \dot{\bigcup_{n \geq 0}} \left(X_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^n,$$

denn jeder Pfad P in $X_{k+1,k+1}^{(k)}$ hat eine Länge ≥ 1, für $n \geq 1$ hat also P den Zustand $k+1$ genau $n-1$ mal als inneren Zustand. Da V eine quasireguläre Potenzreihe ist, gilt für alle

$u \in A^*$

$$\begin{aligned}
(V,u) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in A^+\\ u=u_1\ldots u_n}} \sum \left\{\mathrm{rc}(P_1\ldots P_n) \mid P_i \in X^{(k)}_{k+1,k+1},\ P_i \text{ ist } u_i\text{-Pfad}\right\}\\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in A^+\\ u=u_1\ldots u_n}} \sum_{P_1}\cdots\sum_{P_n} \mathrm{rc}(P_1\ldots P_n)\\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in A^+\\ u=u_1\ldots u_n}} \sum_{P_1}\cdots\sum_{P_n} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{u_1\ldots u_{i-1}} \circ \psi_{u_{i+1}\ldots u_n}(\mathrm{rc}(P_i))\\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in A^+\\ u=u_1\ldots u_n}} \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{P_i} \varphi_{u_1\ldots u_{i-1}} \circ \psi_{u_{i+1}\ldots u_n}(\mathrm{rc}(P_i))\right]\\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in A^+\\ u=u_1\ldots u_n}} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{u_1\ldots u_{i-1}} \circ \psi_{u_{i+1}\ldots u_n} \left(\sum_{P_i}(\mathrm{rc}(P_i))\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in A^+\\ u=u_1\ldots u_n}} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{u_1\ldots u_{i-1}} \circ \psi_{u_{i+1}\ldots u_n} \left((S^{(k)}_{k+1,k+1}, u_i)\right).
\end{aligned}$$

Da $S^{(k)}_{k+1,k+1}$ eine quasireguläre Potenzreihe ist, können wir die Restriktion $u_1,\ldots,u_n \in A^+$ weglassen und haben mit Lemma 4.4 zur expliziten Darstellung der Iteration einer Potenzreihe die Gleichung

$$V = \left(S^{(k)}_{k+1,k+1}\right)^*$$

gefunden. Nun können wir $R(w)$ umschreiben

$$\begin{aligned}
R(w) &= \sum_{w=w_1w_2w_3} \psi_{w_2w_3}\left((S^{(k)}_{p,k+1}, w_1)\right) \odot \varphi_{w_1} \circ \psi_{w_3}\left((V,w_2)\right) \odot \varphi_{w_1w_2}\left((S^{(k)}_{k+1,q}, w_3)\right)\\
&= \left(S^{(k)}_{p,k+1} \odot \left(S^{(k)}_{k+1,k+1}\right)^* \odot S^{(k)}_{k+1,q}, w\right).
\end{aligned}$$

Also ist

$$S^{(k+1)}_{p,q} = S^{(k)}_{p,q} \oplus \left[S^{(k)}_{p,k+1} \odot \left(S^{(k)}_{k+1,k+1}\right)^* \odot S^{(k)}_{k+1,q}\right].$$

Mittels Induktion nach k zeigen wir nun, daß für alle $p,q \in Q$ und alle $k \geq 0$ die Potenzreihe $S^{(k)}_{p,q}$ rational ist. Es besteht $X^{(0)}_{p,q}$ gerade aus den Transitionen der Form (p,a,x,q), ist also endlich. Damit ist

$$(S^{(0)}_{p,q}, w) = \sum \left\{\mathrm{rc}(P) \mid P \in X^{(0)}_{p,q},\ P \text{ ist ein } w\text{-Pfad}\right\}$$

nur für endlich viele w keine leere Summe. Daher kann $S^{(0)}_{p,q}$ als endliche Summe von Monomen geschrieben werden, ist mithin rational. Da diese Aussage für alle $p,q \in Q$ gilt und wir die Gleichung

$$S_{p,q}^{(k+1)} = S_{p,q}^{(k)} \oplus \left[S_{p,k+1}^{(k)} \odot \left(S_{k+1,k+1}^{(k)} \right)^* \odot S_{k+1,q}^{(k)} \right]$$

bewiesen hatten, sind mit allen $S_{p,q}^{(k)}$ $(p, q \in Q)$ auch alle $S_{p,q}^{(k+1)}$ $(p, q \in Q)$ rational. Per Induktion ist $S_{p,q}^{(k)}$ rational für alle $k \geq 0$.

Insbesondere ist nun

$$\begin{aligned}
\left(S_{\iota,\sigma}^{(n)}, w \right) &= \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P \in X_{\iota,\sigma}^{(n)},\ P \text{ ist ein } w\text{-Pfad} \right\} \\
&= \sum \left\{ \mathrm{rc}(P) \mid P : \iota \xrightarrow{w}_{\mathfrak{A}} \sigma \right\} \\
&= (\|\mathfrak{A}\|, w) \\
&= (S, w).
\end{aligned}$$

Also ist S rational. Das Monom $y\varepsilon$ ist rational, also auch $S' = S \oplus y\varepsilon$. □

5.3 Satz

Die Propositionen 5.5, 5.6 und 3.7 beweisen den folgenden Satz.

Satz 5.7. *Seien A ein Alphabet, $\mathfrak{K}$ ein Semiring, (ψ, φ) ein Bewertungspaar und $S \in \mathfrak{K}^{A^*}$ eine formale Potenzreihe. Dann sind äquivalent*

- *S ist erkennbar.*
- *S ist rational.*
- *S hat eine Darstellung.*

6 Anmerkungen

6.1 Ein Modellierungsbeispiel

In diesem Abschnitt modellieren wir einen einfachen ökonomischen Prozeß und betonen dabei die dynamische Kostenberechnung eines Pfades.

Sei dafür $\mathfrak{K}$ der *tropische Semiring*

$$\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0).$$

Mit der Vereinbarung $x \cdot (-\infty) = -\infty$ für alle $x \in \mathfrak{K}$ hat dann jeder Endomorphismus h von $\mathfrak{K}$ die Form $h(x) = qx$ für ein $q \geq 0$ (siehe [DK02]) und umgekehrt ist jede Abbildung dieser Form ein Endomorphismus von $\mathfrak{K}$.

Wir modellieren den Gewinn einer Firma X in einem Geschäftsjahr über einen endlichen gewichteten Automaten $\mathfrak{A} = (Q, T, \mathrm{in}, \mathrm{out})$. Wir stellen uns vor, daß X eine Produktionsstrecke hat und darauf in Großaufträgen Bauteile des Types a, b oder c produzieren kann. Man kann allerdings auf der Produktionsstrecke höchstens Bauteile eines Types gleichzeitig herstellen. Soll die Produktion umgestellt werden, ist eine Änderung der Streckenkonfiguration notwendig. Als Alphabet wählen wir $A = \{a, b, c\}$.

Den Zustand der Firma X könnte man zum Beispiel über die Anzahl der momentan eingestellten Mitarbeiter und die vorhandenen Produktionsmittel definieren. Eine Zustandsänderung würde somit bedeuten, Fachkräfte anzuwerben oder zu entlassen und Produktionsmittel zu erwerben oder zu verkaufen. Stellen wir uns also vor, es gäbe eine endliche Menge Q von Zuständen, in denen sich die Firma befinden kann. Sei weiter T eine Menge von Transitionen der Form

$$(\text{Zustand, Bautyp, Gewinn, Zustand}).$$

Das Abarbeiten einer Transition bestände aus den Schritten

- Personal- und Produktionsmittelbestand an Auftrag bzw. Bautyp anpassen,
- Bauteile produzieren,
- Gewinn kassieren.

Wir nehmen an daß die Ein- bzw. Austrittskosten verschwinden.

Nun könnte man sich vorstellen, daß zu Beginn des Geschäftsjahres die Auftragslage für das kommende Jahr bekannt ist, etwa $w = baac$. Das Ablaufen eines w-Pfades in dem Automaten beschreibt, welche Entscheidungen die Firma im kommenden Jahr trifft und welcher Gewinn dabei entsteht. Das Verhalten des Automaten bei w gibt uns den maximal möglichen Gewinn der Firma im kommenden Geschäftsjahr.

Mit Automaten im Sinne von Schützenberger hätte man kaum noch Möglichkeiten, weitere gewinnbeeinflußende Effekte zu simulieren. Mit unserer Automatendefinition hingegen können wir subtiler modellieren. Z.B. kann man annehmen, daß durch bereits ausgeführte Aufträge das Know-how der Belegschaft steigt und die Firma bei nachfolgenden Aufträgen effizienter und gewinnbringender arbeitet. Um diesen Lerneffekt in unser Modell einzubauen, setzen wir etwa

$$\varphi_a(x) = 1.4x, \quad \varphi_b(x) = 1.2x, \quad \varphi_c(x) = 1.8x.$$

Nach einem durchgeführten Auftrag zur Produktion von Bauteilen des Types a hat das Wissen der Belegschaft derart zugenommen, daß spätere Aufträge einen um den Faktor 1.4 erhöhten Gewinn einbringen.

Um auch noch zukünftige Ereignisse in die Laufkostenberechnung eines Pfades eingehen zu lassen, könnte man sich vorstellen, daß Profite aus abgearbeiteten Aufträgen gewinnbringend angelegt werden. Die Faktoren, um die sich angelegte Gewinne durch Zinsen vermehren, hängen von der Dauer der Abarbeitung der folgenden Aufträge ab. Wir setzen beispielhaft

$$\psi_a(x) = 1.1x, \quad \psi_b(x) = 1.13x, \quad \psi_c(x) = 1.05x.$$

Sei nun $P = t_1 t_2 t_3 t_4$ ein Pfad mit Beschriftung $w = baac$ und $t_i = (q_i, a_i, x_i, q_{i+1}) \in T$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Die Laufkosten von P sind

$$\begin{aligned}
\mathrm{rc}(P) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_{a_1 \dots a_{i-1}} \circ \psi_{a_{i+1} \dots a_n}(x_i) \\
&= \Big[\psi_{aac}(x_1)\Big] + \Big[\varphi_b \circ \psi_{ac}(x_2)\Big] + \Big[\varphi_{ba} \circ \psi_c(x_3)\Big] + \Big[\varphi_{baa}(x_4)\Big] \\
&= \Big[1.05 \cdot 1.1 \cdot 1.1 \cdot x_1\Big] + \Big[1.2 \cdot 1.05 \cdot 1.1 \cdot x_2\Big] + \\
&\quad \Big[1.2 \cdot 1.4 \cdot 1.05 \cdot x_3\Big] + \Big[1.2 \cdot 1.4 \cdot 1.4 \cdot x_4\Big].
\end{aligned}$$

Das Maximum dieser Zahl über alle *baac*-Pfade liefert den bestmöglichen Gewinn der Firma im kommenden Geschäftsjahr.

6.2 Zusammenfassung und Ausblick

Wesentlich in unserer Arbeit ist die neue Definition der Laufkosten eines Pfades. Dadurch erhalten wir Automaten, die flexibler in der Kostenberechnung sind als Automaten in Schützenbergers Sinn. Um die erkennbaren Potenzreihen zu charakterisieren, benutzen wir wieder den Begriff der Rationalität. Dafür passen wir die Definition des Cauchy-Produktes zweier Potenzreihen an. Die meisten verwendeten Beweisideen sind klassisch. Ein interessanter Aspekt unserer Beweisstrategie ist, daß der durch die neuen Definitionen entstehende Mehraufwand auf ein einziges Lemma, das Faktorisierungslemma, reduziert werden kann.

Es gibt einen gewissen Kanon von Fragestellungen, die bei Problemen der Rationalität und Erkennbarkeit von Potenzreihen auftauchen. Wann sind Bilder von rationalen bzw. erkennbaren Potenzreihen rational bzw. erkennbar? Sind die Träger rationaler Potenzreihen rationale Sprachen in A^* in Kleenes Sinn?

Püschmann untersucht in [Pü03] Automaten auf einseitig unendlichen Wörtern und wählt als Semiring einen distributiven Verband. Dort fallen die Begriffe Rationalität und Erkennbarkeit wieder zusammen. Sind Ergebnisse für Automaten, die (einseitig) unendliche Wörter lesen, auf unsere Definitionen übertragbar? Nähert man sich dem Problem naiv, tauchen sofort neue Fragen auf. Wie geht man am besten mit unendlichen Produkten im Endomorphismenmonoid von $\mathfrak{K}$ um? Hier könnte die Theorie der sogenannten ω-Semigruppen hilfreich sein. Motiviert unsere symmetrische Definition des Potenzreihenproduktes eher Untersuchungen von Automaten auf zweiseitig unendlichen Wörtern?

Für Anwendungen wichtig ist die Frage der Determinisierbarkeit von Automaten. Sind Ergebnisse von Mohri (siehe [Mo97]) übertragbar? Siehe dazu auch [Mä02] und [BGW00].

Betrachte die Struktur der bzgl. Inklusion partiell geordneten Menge

$$M = \{\mathrm{Rat}_{\psi,\varphi}(A^*) \mid (\psi, \varphi) \text{ ist ein Bewertungspaar}\}.$$

In [DK02] untersuchen die Autoren den tropischen Semiring genauer und zeigen, daß für zwei Deflationsparameter $p \neq q$ die Mengen der p-erkennbaren bzw. der q-erkennbaren Potenzreihen (ausser in trivialen Fällen) nicht vergleichbar sind. Wirkt sich allgemeiner unsere Definition des Potenzreihenproduktes so massiv auf die Struktur des Semiringes $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ aus, daß die Wahl verschiedener Bewertungspaare im wesentlichen schon Unvergleichbarkeit der zugehörigen Mengen rationaler Potenzreihen zur Folge hat?

Oder betrachte nur den Semiring $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ aller Potenzreihen für ein festes Bewertungspaar. Wann ist $\mathfrak{K}_{\psi,\varphi}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ etwa ein noetherscher Ring? Probleme dieser Art untersucht z.B. Brookfield in [Br03].

Literatur

[Br03] G. Brookfield. Noetherian generalized power series rings. *Communications in Algebra, 2003.* Akzeptiert.

[BGW00] A. Buchsbaum, R. Giancarlo, J. R. Westbrook. On the Determinization of Weighted Finite Automata. *SIAM Journal on Computing*, 30(5):1502-31, 2000.

[DK02] M. Droste, D. Kuske. Skew and infinitary formal power series. *University of Leicester, Mathematics & Computer Science, Technical Report No. 2002/38; 30th ICALP, Lecture Notes in Comp. Science vol. 2719, Springer, 2003.* S. 426-438.

[Ei74] S. Eilenberg. Automata, Languages and Machines. Vol A. *Academic Press, New York 1974.*

[KN01] B. Khoussainov, A. Nerode. Automata Theory and its Applications. *Birkhäuser, 2001.*

[Mä02] I. Mäurer. Zur Minimalisierung und Determinisierung von sequentiellen Transducern. Diplomarbeit, Institut für Algebra, Technische Universität Dresden, 2003.

[Mo97] M. Mohri. Finite-state Transducers in Language and Speech Processing. *Comp. Linguistics, Bd. 23*, S. 269-311, 1997.

[Pü03] U. Püschmann. Zu Kostenfunktionen von Büchi-Automaten. Diplomarbeit, Institut für Algebra, Technische Universität Dresden, 2003.

[Sch61] M. P. Schützenberger. On the definition of a family of automata. *Information and Control*, 4(2-3):245-270, September 1961.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tage eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Gewichtete Automaten mit dynamischer Kostenberechnung“ unter der Betreuung von Prof. Dr. Droste selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden nicht verwendet.

Datum Unterschrift