# Logik
# Vorlesung 11: Herbrand-Theorie II

Andreas Maletti

16. Januar 2015

# Überblick

## Inhalt

# Vorlesungsziele

## heutige Vorlesung

1. HERBRAND-Expansion
2. Algorithmus von GILMORE
3. Substitution und Unifikation

Bitte Fragen direkt stellen!

# Überblick

Organisation

# Organisation

## Evaluierung

- externer Dienstleister (Uni Bonn)
- startet am Montag (19.01.2015)
- bitte nehmen Sie teil
  (und geigen dem Vorlesenden die Meinung)

## Übungsserien

- es wird (demnächst) eine 7. Übungsserie geben
  (Zusatzserie mit Inhalten aus der gesamten Vorlesung)
- wir werden Ihre besten 6 Serien für die Vorleistung bewerten
  (Möglichkeit einen Ausrutscher oder Krankheit auszugleichen)

# Organisation

## Prüfung

am 17.02.2015 um 13:00 Uhr im **Hs. 3**

- 1 DIN-A4-Blatt mit Notizen als Hilfsmittel zugelassen (beliebig beschrieben oder bedruckt)
- keine weiteren Hilfsmittel zugelassen
- Abmeldung noch bis 25. Januar möglich
- Bitte: melden Sie sich per TOOL ab, wenn Sie nicht mitschreiben möchten (oder wenn Sie aufgrund fehlender Vorleistung nicht teilnehmen können)

## Tutorium

am 6.02.2015 um 11 Uhr im **Hs. 5**

Wiederholung: HERBRAND-Struktur

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

## Definition

Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Aussage in Skolemform und sei

$$H = \{f_0^0\} \cup \left(\text{Symbole}(F) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k\right)\right)$$

Das HERBRAND-Universum $H(F)$ von $F$ ist

$$H(F) = \{t \in \mathcal{T} \mid \text{Funk}(t) \subseteq H, \text{Var}(t) = \emptyset\}$$

Eine HERBRAND-Struktur für $F$ ist eine Interpretation $I = (H(F), \cdot^I)$, so dass

- $(x_i)^I = f_0^0$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $u_1, \ldots, u_k \in H(F)$

$$(f_i^k)^I(u_1, \ldots, u_k) = \begin{cases} f_i^k(u_1, \ldots, u_k) & \text{falls } f_i^k \in \text{Symbole}(F) \\ f_0^0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

## Motivation

- durch HERBRAND-Strukturen ist Erfüllbarkeit jetzt einfacher (erfüllbar gdw. HERBRAND-Modell)
- aber wie findet man ein HERBRAND-Modell?
- wir werden das Problem zunächst auf die Aussagenlogik zurückführen, da wir dort Lösungen kennen

## Definition

Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Aussage in Skolemform. Dann existieren $n, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ quantorenfrei, so dass $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G$. Die HERBRAND-Expansion von $F$ ist die Menge

$$E(F) = \{G[x_{i_1} \mapsto t_1] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in H(F)\}$$

# Prädikatenlogik — Herbrand-Theorie

## Notizen

- Herbrand-Expansion enthält alle Varianten von $G$, in denen alle Variablen durch Elemente des Herbrand-Universums ersetzt wurden
- die Formeln der Herbrand-Expansion enthalten keine Variablen und keine Quantoren

## Beispiel

- Aussage in Skolemform $F = \forall x \forall y \big(P(f_0^0, x) \wedge \neg R(f(y))\big)$
- Herbrand-Universum $H(F) = \{f_0^0, f(f_0^0), f(f(f_0^0)), \ldots\}$
- Herbrand-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{P(f_0^0, f_0^0) \wedge \neg R(f(f_0^0)),\ P(f_0^0, f_0^0) \wedge \neg R(f(f(f_0^0))),$$
$$\ldots,\ P(f_0^0, f(f_0^0)) \wedge \neg R(f(f_0^0)),$$
$$P(f_0^0, f(f_0^0)) \wedge \neg R(f(f(f_0^0))), \ldots\}$$

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

## Notizen

- HERBRAND-Expansion können wir als (unendliche) Menge aussagenlogischer Formeln verstehen
  [Atome der Gestalt $R_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ mit $t_1, \ldots, t_k \in H(F)$]
- wir können nun Methoden der Aussagenlogik anwenden

## Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\ldots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \ldots\}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1, A_0 \wedge \neg A_3, \ldots, A_2 \wedge \neg A_1, A_2 \wedge \neg A_3, \ldots\}$$

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

## Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\dots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \dots \}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1,\ A_0 \wedge \neg A_3,\ \dots,\ A_2 \wedge \neg A_1,\ A_2 \wedge \neg A_3,\ \dots\}$$

- diese Menge $E(F)$ ist erfüllbar
  (es gibt eine Interpretation $I$ mit $I \models F'$ für alle $F' \in E(F)$)
- Modell: $I = \{A_0, A_2, A_4, \dots\} = \{P(f_0^0, t) \mid t \in H(F)\}$
- dies liefert HERBRAND-Struktur $(J, \cdot^J)$ mit
  $P^J = \{(f_0^0, t) \mid t \in H(F)\}$ und $R^J = \emptyset$

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

**Theorem (Satz von GÖDEL-HERBRAND-SKOLEM)**

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist erfüllbar gdw. die Menge $E(F)$ im (aussagenlogischen) Sinne erfüllbar ist

**Beweis.**

Es genügt die Existenz eines HERBRAND-Modells gdw. $E(F)$ erfüllbar ist. Sei $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G$ mit $n, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ quantorenfrei.

$F$ hat ein HERBRAND-Modell $I = (H(F), \cdot^I)$

gdw. $G^{I[x_{i_1} \mapsto t_1^I] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n^I]} = 1$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in H(F)$

gdw. $(G[x_{i_1} \mapsto t_1] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n])^I = 1$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in H(F)$

gdw. $(F')^I = 1$ für alle $F' \in E(F)$

gdw. $I$ ist Modell für $E(F)$ $\square$

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

**KURT GÖDEL (* 1906; † 1978)**

- öster. Logiker; bedeutendster Logiker
- Beweistheorie
  (klassische vs. konstruktive Logik)
- widerlegte HILBERTsche Grundsatzprogramm

**Korollar (Satz von HERBRAND)**

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist unerfüllbar gdw.
eine endliche Teilmenge von $E(F)$ unerfüllbar ist

**Beweis.**

Konsequenz des vorherigen Theorems und
der Kompaktheit der Aussagenlogik $\square$

**Beispiel**

- unerfüllbare Formel in Prädikatenlogik

$$F = \forall x \forall y \Big(\neg R(x, y) \land R(f_0^0, f(f_0^0))\Big)$$

- HERBRAND-Expansion

$$E(F) = \{\neg R(f_0^0, f_0^0) \land R(f_0^0, f(f_0^0)), \\ \neg R(f_0^0, f(f_0^0)) \land R(f_0^0, f(f_0^0)), \dots\}$$

- bereits die endliche Teilmenge $\{\neg R(f_0^0, f(f_0^0)) \land R(f_0^0, f(f_0^0))\}$ ist unerfüllbar

# Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

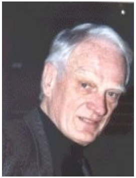
## Algorithmus von GILMORE

Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Aussage in Skolemform und $\{F_0, F_1, \ldots\}$ eine Aufzählung von $E(F)$.

1. setze $n \leftarrow 0$
2. falls $\{F_0, \ldots, F_n\}$ unerfüllbar ist, liefere **unerfüllbar**
3. setze $n \leftarrow n + 1$ und zurück zu 2

## PAUL GILMORE (* 1906; † 1978)

- kanad. Logiker
- algorithmische Beweistheorie
- Professor und Forscher bei der IBM



## Theorem

Der Algorithmus von GILMORE ist korrekt und vollständig für Unerfüllbarkeit von prädikatenlogischen Aussagen in Skolemform.

## Beweis.

- Korrektheit: folgt direkt aus dem Satz von HERBRAND
- Vollständigkeit: Aus dem Satz von HERBRAND folgt, dass eine endliche unerfüllbare Menge $M \subseteq E(F)$ existiert. Der Algorithmus von GILMORE wird irgendwann eine Obermenge $M' \supseteq M$ betrachten, die (aufgrund der konjunktiven Verknüpfung von Elementen einer Menge) auch unerfüllbar ist. Also stoppt der Algorithmus von GILMORE und liefert **unerfüllbar**. □

## Notizen

- Algorithmus von Gilmore terminiert
  für unerfüllbare Aussagen in Skolemform
- terminiert allerdings nicht bei erfüllbarer Formel
- Unerfüllbarkeit semi-entscheidbar
  (mehr dazu in der VL Berechenbarkeit)
- einen Algorithmus, der immer mit der korrekten Antwort
  "erfüllbar" oder "unerfüllbar" terminiert, kann es nicht geben
- Unerfüllbarkeit nicht entscheidbar
  (auch dazu mehr in der VL Berechenbarkeit)
- Algorithmus von Gilmore akademisch interessant,
  aber völlig praxisfern

Exkurs: Theorien

# Prädikatenlogik — Theorien

## Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

in einer Prädikatenlogik mit Gleichheit '$=$'
('$=$' hat die übliche, festgelegte Bedeutung)

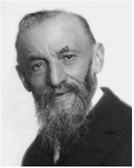
Konjunktion dieser Formeln:

- $N(a)$ und $\forall x\big(N(x) \rightarrow N(f(x))\big)$ — $a \in N$ und $f : N \rightarrow N$
- $\forall x \forall y\big((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y)\big)$ — $f$ injektiv
- $\forall x \neg\big(a = f(x)\big)$ — $a \neq f(x)$
- reicht dies?
  (Interpretieren alle Modelle $N$ als isomorphe Kopie der natürlichen Zahlen mit $a$ als 0 und $f$ als Nachfolger?)
- nein, Induktionsaxiom fehlt
  (man nehme die nicht-negativen reellen Zahlen)
- Induktionsaxiom (in dieser Logik) nicht ausdrückbar

# Prädikatenlogik — Theorien

**GUISEPPE PEANO (* 1858; † 1932)**

- ital. Mathematiker und Logiker
- Begründer der axiomatischen Mengenlehre
- Formalisierung der vollständigen Induktion



**weitere Theorien**

- für (alle) Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$
- für die Mengenlehre ZF und ZFC
- ...

# Prädikatenlogik — Theorien

## Beispiel

- angenommen wir hätten die natürlichen Zahlen bereits spezifiziert (mit $N$, $a$ und $f$)
- was realisiert $R$?

$$\forall x \forall y \forall z \Big( \big(N(x) \wedge N(y) \wedge N(z)\big) \rightarrow \\ \Big(R(x,y,z) \leftrightarrow \big((x = z \wedge y = a) \vee \\ \exists y', z' (N(y') \wedge N(z') \wedge R(x,y',z') \wedge \\ y = f(y') \wedge z = f(z'))\big)\Big)\Big)$$

- Additionsrelation $R(x,y,z)$ wahr gdw. $x + y = z$

# Prädikatenlogik — Theorien

## Warum ist Erfüllbarkeit wichtig?

- eine unerfüllbare Theorie hat keine Modelle
  (läßt sich nicht realisieren)
- es lassen sich damit "Luftschlösser" bauen
  (z.B. haben wir auf der vorherigen Folie
  die Spezifikation der natürlichen Zahlen angenommen
  und darauf aufbauend die Addition definiert)
- damit lassen sich nun Eigenschaften der Addition beweisen
  z.B. Assoziativität und Kommutativität
- sollte die "Theorie" der natürlichen Zahlen unerfüllbar sein,
  dann lässt sich auch beweisen, dass $n + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  denn aus einem Widerspruch folgt jede Aussage

# Prädikatenlogik — Theorien

## Notizen

- "aber die Theorie der natürlichen Zahlen ist doch erfüllbar" (denn es gibt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Modell)
- dieser Nachweis wird üblicherweise über Mengen geführt ($0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, ..., $n = \{0, \ldots, n-1\}$)
- damit kann man die Widerspruchsfreiheit der Peano-Axiome in der stärkeren Theorie der Mengenlehre beweisen
- Mengenlehre basiert (üblicherweise) auf ZF-Axiomen (oder ZFC — ZF mit Auswahlaxiom [choice])
- aber die Widerspruchsfreiheit (Erfüllbarkeit) von ZF läßt sich in ZF wieder nicht beweisen (es braucht dazu eine noch stärkere Theorie)
- etc.

Wiederholung: Resolution

# Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

## Definition

Sei $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.
Ein Disjunktionsglied $R \subseteq \mathcal{L}$ ist Resolvent von $F$ gdw.
zwei Disjunktionsglieder $\{D_1, D_2\} \subseteq F$ und ein Atom $A_i$ existieren, so dass

1. $A_i \in D_1$ und $\neg A_i \in D_2$ und
2. $R = \big(D_1 \setminus \{A_i\}\big) \cup \big(D_2 \setminus \{\neg A_i\}\big)$

## Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

# Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

## Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x\big(P(x) \land \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t)\cdots)$ mit $n$-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\}, \{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \dots\big\}_\land$$

- Resolution (aus der Aussagenlogik):
  1. $\{\neg P(f^2(f_0^0))\}$ Element von $F$
  2. $\{P(f^2(f_0^0))\}$ Element von $F$
  3. $\emptyset$ Resolvent von $\{①, ②\}$
- damit ist die HERBRAND-Expansion unerfüllbar
- und auch die Ausgangsformel ist daher unerfüllbar

# Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

## Notizen

- wir können Resolution im GILMORE-Algorithmus einsetzen

$\rightarrow$ liefert Grundresolutionsalgorithmus
$=$ (aussagenlogische) Resolution auf HERBRAND-Expansion

- auch korrekt und vollständig,
  aber auch (relativ) nutzlos
- Grundresolution, denn alle Variablen werden durch variablenfreie Terme (siehe HERBRAND-Expansion) ersetzt

## Motivation

- dies ist offenbar ineffizient
  (denn beliebige Instanzen werden berücksichtigt)
- wir sollten dies effizienter (d.h. zielgerichteter) erledigen

Substitution

# Prädikatenlogik — Substitution

## Definition (Wiederholung — Substitution)

- Terme: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathcal{T}$, definieren wir $\cdot[x_\ell \mapsto t] \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ durch
  - $x_\ell[x_\ell \mapsto t] = t$
  - $x_i[x_\ell \mapsto t] = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq \ell$
  - $f_i^k(t_1, \dots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = f_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \dots, t_k[x_\ell \mapsto t])$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- Literale (spezielle Formeln): und $\cdot[x_\ell \mapsto t] \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ durch
  - $R_i^k(t_1, \dots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = R_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \dots, t_k[x_\ell \mapsto t])$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
  - $(\neg F)[x_\ell \mapsto t] = \neg(F[x_\ell \mapsto t])$ für alle $F \in \mathcal{F}$

## Notizen

- Ersetzung aller Vorkommen von $x_\ell$ durch $t$
- in Resolution rechnen wir auf konjunktiven Normalformen (daher hier keine Nicht-Literale)

# Prädikatenlogik — Substitution

## Definition (allg. Substitution)

Sei $V \subseteq \mathcal{V}$ eine endliche Menge von Variablen.
Jede (totale) Funktion $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ ist eine Substitution.

## Definition

Sei $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution. Wir definieren:

- $\mathrm{subst}'(x_i) = \mathrm{subst}(x_i)$ für alle $x_i \in V$
- $\mathrm{subst}'(x_i) = x_i$ für alle $x_i \in \mathcal{V} \setminus V$
- $\mathrm{subst}'(f_i^k(t_1, \dots, t_k)) = f_i^k(\mathrm{subst}'(t_1), \dots, \mathrm{subst}'(t_k))$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $\mathrm{subst}'(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = R_i^k(\mathrm{subst}'(t_1), \dots, \mathrm{subst}'(t_k))$ und $\mathrm{subst}'(\neg R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \neg R_i^k(\mathrm{subst}'(t_1), \dots, \mathrm{subst}'(t_k))$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

## Notizen

- wir schreiben einfach subst statt subst′
  (da gibt es keine Verwirrung)
- falls $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution mit $V = \{x_i\}$ ist, dann gilt
$$\mathrm{subst}(t) = t[x_i \mapsto \mathrm{subst}(x_i)]$$
- man kann sich diese Substitution als mehrfache (gleichzeitige) Variablenersetzung vorstellen
- allerdings gilt im Allgemeinen für Substitutionen $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ mit $V = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$
$$\mathrm{subst}(t) \neq t[x_{i_1} \mapsto \mathrm{subst}(x_{i_1})] \cdots [x_{i_n} \mapsto \mathrm{subst}(x_{i_n})]$$

# Prädikatenlogik — Substitution

## Beispiele

subst: $\{x_1, x_2, x_3\} \to \mathcal{T}$ mit

$$\text{subst}(x_1) = f(g(a)) \qquad \text{subst}(x_2) = x_3 \qquad \text{subst}(x_3) = a$$

- $\text{subst}\big(R(g(h(a,b)))\big) = R(g(h(a,b)))$
- $\text{subst}\big(\neg P(h(x_1,x_2,x_3),x_3)\big) = \neg P(h(f(g(a)),x_3,a),a)$
- aber $\neg P(h(x_1,x_2,x_3),x_3)[x_1 \mapsto f(g(a))][x_2 \mapsto x_3][x_3 \mapsto a]$ ist $\neg P(h(f(g(a)),a,a),a)$
  (denn die Einzelersetzungen werden nacheinander ausgeführt)
- man kann 'subst' allerdings mit Einzelersetzungen schreiben

$$[x_1 \mapsto f(g(a))][x_3 \mapsto a][x_2 \mapsto x_3]$$

# Prädikatenlogik — Substitution

**Theorem (Vertauschung)**

Seien $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution, $x \notin V$ eine Variable und $t \in \mathcal{T}$. Falls $x \notin \mathrm{Var}(\mathrm{subst}(v))$ für alle $v \in V$, dann gilt für alle Terme $u \in \mathcal{T}$

$$\mathrm{subst}(u[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(u)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$$

**Beweis (1/2).**

per Induktion über dem Termaufbau

- Sei $u = x$. Dann gilt $\mathrm{subst}(x[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(t) = \mathrm{subst}(x)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$
- Sei $u \neq x$ für $u \in \mathcal{V}$. Dann gilt $\mathrm{subst}(v[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(v) = \mathrm{subst}(v)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$ da $x \notin \mathrm{Var}(\mathrm{subst}(v))$

# Prädikatenlogik — Substitution

**Beweis (2/2).**

per Induktion über den Termaufbau

- Sei $u = f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{subst}(f_i^k(t_1, \ldots, t_k)[x \mapsto t]) \\
&= \mathrm{subst}(f_i^k(t_1[x \mapsto t], \ldots, t_k[x \mapsto t])) \\
&= f_i^k(\mathrm{subst}(t_1[x \mapsto t]), \ldots, \mathrm{subst}(t_k[x \mapsto t])) \\
&= f_i^k(\mathrm{subst}(t_1)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)], \ldots, \mathrm{subst}(t_k)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]) \\
&= f_i^k(\mathrm{subst}(t_1), \ldots, \mathrm{subst}(t_k))[x \mapsto \mathrm{subst}(t)] \\
&= \mathrm{subst}(f_i^k(t_1, \ldots, t_k))[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]
\end{aligned}$$

unter Nutzung der IH in der dritten Gleichheit. $\square$

# Prädikatenlogik — Substitution

## Notizen

- in begrenzten Fällen kann man also die Reihenfolge der Ersetzungen vertauschen
- zur Vereinfachung schreiben wir auch

  $$[x_{i_1} \mapsto \mathsf{subst}(x_{i_1}), \dots, x_{i_n} \mapsto \mathsf{subst}(x_{i_n})]$$

  anstatt der Substitution $\mathsf{subst}\colon \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \to \mathcal{T}$
- innerhalb der Klammern also parallele Substitution

  $$[x_{i_1} \mapsto t_1, \dots, x_{i_n} \mapsto t_n] \neq [x_{i_1} \mapsto t_1] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n]$$

## Prädikatenlogik — Substitution

### Beispiele

- Vertauschung anwendbar

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\,\underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} = \underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(g(x_3))}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

- Vertauschung nicht anwendbar (gleiche Substitutionsvariable)

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\,\underbrace{[x_1 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} \neq \underbrace{[x_1 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(x_2)}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

- Vertauschung nicht anwendbar (Variable in Ersetzungsterm)

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\,\underbrace{[x_2 \mapsto g(x_1)]}_{\text{subst}} \neq \underbrace{[x_2 \mapsto g(x_1)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(g(x_1))}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

Unifikation

# Prädikatenlogik — Unifikation

## Definition (Unifikator)

Sei $M = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine endliche Menge von (prädikatenlogischen) Literalen.

- Ein Substitution $\mathrm{subst} \colon V \to \mathcal{T}$ heißt **Unifikator** für $M$ gdw.

$$\mathrm{subst}(L_1) = \cdots = \mathrm{subst}(L_n)$$

(Unifikator macht alle Literale gleich)

- Unifikator $\mathrm{subst} \colon V \to \mathcal{T}$ für $M$ ist der **allgemeinste Unifikator für $M$** gdw. für jeden Unifikator $\mathrm{subst}' \colon V' \to \mathcal{T}$ für $M$ eine Substitution $\mathrm{subst}'' \colon V'' \to \mathcal{T}$ existiert, so dass $\mathrm{subst}' = \mathrm{subst}\,\mathrm{subst}''$

(jeden Unif. erhält man per Substitution aus allg. Unif.)

## Notizen

- Unifikator ist nicht eindeutig
  $\rightarrow$ es können mehrere Unifikatoren existieren
- Unifikator muss nicht existieren
  $\rightarrow$ Menge $M$ heißt nicht unifizierbar gdw.
  kein Unifikator für $M$ existiert
- falls ein Unifikator existiert,
  dann existiert auch ein allg. Unifikator
- aber es kann auch mehrere allg. Unifikatoren geben

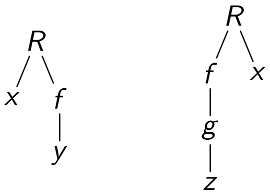
**Beispiel**

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(f(g(z)), x)$
- Unifikator

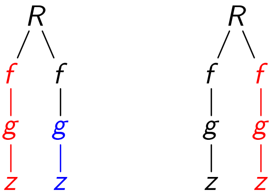
$$[x \mapsto f(g(z)),\ y \mapsto g(z)]$$

- ist sogar allgemeinster Unifikator

Darstellung als Syntaxbaum:



Nach Substitution:

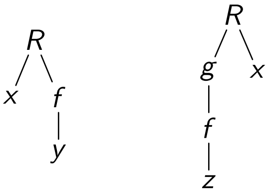


# Prädikatenlogik — Unifikation

## weiteres Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(g(f(z)), x)$
- nicht unifizierbar
  ($x$ müsste durch Term mit Wurzel $f$ sein;
  aber gleichzeitig auch Wurzel $g$ haben)

Darstellung als Syntaxbaum:



# Prädikatenlogik — Unifikation

## Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$ ✓
  (Unifikator $[y \mapsto a,\ z \mapsto f(x)]$)
- $P(f(y), g(x))$ und $P(z, x)$ ✗
  (linke Seite hat immer ein '$g$' mehr)
- $P(f(x), g(y))$ und $\neg P(z, x)$ ✗
  (positives vs. negatives Literal)

# Zusammenfassung

- Herbrand-Expansion
- Algorithmus von Gilmore
- Substitution und Unifikation

Sechste Übungsserie ist bereits verfügbar.