Logik
Vorlesung 11: Herbrand-Theorie II

Andreas Maletti

16. Januar 2015

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. HERBRAND-Expansion
2. Algorithmus von GILMORE
3. Substitution und Unifikation

Bitte Fragen direkt stellen!

Überblick

Organisation

Organisation

Evaluierung

- externer Dienstleister (Uni Bonn)
- startet am Montag (19.01.2015)
- bitte nehmen Sie teil
  (und geigen dem Vorlesenden die Meinung)

Organisation

Evaluierung

- externer Dienstleister (Uni Bonn)
- startet am Montag (19.01.2015)
- bitte nehmen Sie teil
  (und geigen dem Vorlesenden die Meinung)

Übungsserien

- es wird (demnächst) eine 7. Übungsserie geben
  (Zusatzserie mit Inhalten aus der gesamten Vorlesung)
- wir werden Ihre besten 6 Serien für die Vorleistung bewerten
  (Möglichkeit einen Ausrutscher oder Krankheit auszugleichen)

Organisation

Prüfung

am 17.02.2015 um 13:00 Uhr im **Hs. 3**

- 1 DIN-A4-Blatt mit Notizen als Hilfsmittel zugelassen (beliebig beschrieben oder bedruckt)
- keine weiteren Hilfsmittel zugelassen
- Abmeldung noch bis 25. Januar möglich

Organisation

Prüfung

am 17.02.2015 um 13:00 Uhr im **Hs. 3**

- 1 DIN-A4-Blatt mit Notizen als Hilfsmittel zugelassen (beliebig beschrieben oder bedruckt)
- keine weiteren Hilfsmittel zugelassen
- Abmeldung noch bis 25. Januar möglich
- Bitte: melden Sie sich per TOOL ab, wenn Sie nicht mitschreiben möchten (oder wenn Sie aufgrund fehlender Vorleistung nicht teilnehmen können)

Organisation

Prüfung

am 17.02.2015 um 13:00 Uhr im **Hs. 3**

- 1 DIN-A4-Blatt mit Notizen als Hilfsmittel zugelassen (beliebig beschrieben oder bedruckt)
- keine weiteren Hilfsmittel zugelassen
- Abmeldung noch bis 25. Januar möglich
- Bitte: melden Sie sich per TOOL ab,
  wenn Sie nicht mitschreiben möchten (oder wenn Sie aufgrund fehlender Vorleistung nicht teilnehmen können)

Tutorium

am 6.02.2015 um 11 Uhr im **Hs. 5**

Wiederholung: HERBRAND-Struktur

Definition

Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Aussage in Skolemform und sei

$$H = \{f_0^0\} \cup \left(\mathsf{Symbole}(F) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k\right)\right)$$

Das HERBRAND-Universum $H(F)$ von F ist

$$H(F) = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathsf{Funk}(t) \subseteq H,\ \mathsf{Var}(t) = \emptyset\}$$

Eine HERBRAND-Struktur für F ist eine Interpretation $I = (H(F), \cdot^I)$, so dass

- $(x_i)^I = f_0^0$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $u_1, \ldots, u_k \in H(F)$

$$(f_i^k)^I(u_1, \ldots, u_k) = \begin{cases} f_i^k(u_1, \ldots, u_k) & \text{falls } f_i^k \in \mathsf{Symbole}(F) \\ f_0^0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Motivation

- durch HERBRAND-Strukturen ist Erfüllbarkeit jetzt einfacher (erfüllbar gdw. HERBRAND-Modell)
- aber wie findet man ein HERBRAND-Modell?

Motivation

- durch HERBRAND-Strukturen ist Erfüllbarkeit jetzt einfacher (erfüllbar gdw. HERBRAND-Modell)
- aber wie findet man ein HERBRAND-Modell?
- wir werden das Problem zunächst auf die Aussagenlogik zurückführen, da wir dort Lösungen kennen

Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

Motivation

- durch HERBRAND-Strukturen ist Erfüllbarkeit jetzt einfacher (erfüllbar gdw. HERBRAND-Modell)
- aber wie findet man ein HERBRAND-Modell?
- wir werden das Problem zunächst auf die Aussagenlogik zurückführen, da wir dort Lösungen kennen

Definition

Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Aussage in Skolemform. Dann existieren $n, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ quantorenfrei, so dass $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G$. Die HERBRAND-Expansion von F ist die Menge

$$E(F) = \{G[x_{i_1} \mapsto t_1] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in H(F)\}$$

Notizen

- HERBRAND-Expansion enthält alle Varianten von G, in denen alle Variablen durch Elemente des HERBRAND-Universums ersetzt wurden
- die Formeln der HERBRAND-Expansion enthalten keine Variablen und keine Quantoren

Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

Notizen

- HERBRAND-Expansion enthält alle Varianten von G, in denen alle Variablen durch Elemente des HERBRAND-Universums ersetzt wurden
- die Formeln der HERBRAND-Expansion enthalten keine Variablen und keine Quantoren

Beispiel

- Aussage in Skolemform $F = \forall x \forall y \big(P(f_0^0, x) \wedge \neg R(f(y)) \big)$

Prädikatenlogik — Herbrand-Theorie

Notizen

- Herbrand-Expansion enthält alle Varianten von G, in denen alle Variablen durch Elemente des Herbrand-Universums ersetzt wurden
- die Formeln der Herbrand-Expansion enthalten keine Variablen und keine Quantoren

Beispiel

- Aussage in Skolemform $F = \forall x \forall y \big(P(f_0^0, x) \wedge \neg R(f(y))\big)$
- Herbrand-Universum $H(F) = \{f_0^0, f(f_0^0), f(f(f_0^0)), \ldots\}$

Notizen

- HERBRAND-Expansion enthält alle Varianten von G, in denen alle Variablen durch Elemente des HERBRAND-Universums ersetzt wurden
- die Formeln der HERBRAND-Expansion enthalten keine Variablen und keine Quantoren

Beispiel

- Aussage in Skolemform $F = \forall x \forall y \big(P(f_0^0, x) \wedge \neg R(f(y))\big)$
- HERBRAND-Universum $H(F) = \{f_0^0, f(f_0^0), f(f(f_0^0)), \dots\}$
- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{P(f_0^0, f_0^0) \wedge \neg R(f(f_0^0)),\ P(f_0^0, f_0^0) \wedge \neg R(f(f(f_0^0))),$$
$$\dots,\ P(f_0^0, f(f_0^0)) \wedge \neg R(f(f_0^0)),$$
$$P(f_0^0, f(f_0^0)) \wedge \neg R(f(f(f_0^0))), \dots\}$$

Prädikatenlogik — Herbrand-Theorie

Notizen

- Herbrand-Expansion können wir als (unendliche) Menge aussagenlogischer Formeln verstehen
  [Atome der Gestalt $R_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ mit $t_1, \ldots, t_k \in H(F)$]
- wir können nun Methoden der Aussagenlogik anwenden

Notizen

- HERBRAND-Expansion können wir als (unendliche) Menge aussagenlogischer Formeln verstehen
  [Atome der Gestalt $R_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ mit $t_1, \ldots, t_k \in H(F)$]
- wir können nun Methoden der Aussagenlogik anwenden

Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\ldots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \ldots\}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1,\ A_0 \wedge \neg A_3,\ \ldots,\ A_2 \wedge \neg A_1,\ A_2 \wedge \neg A_3,\ \ldots\}$$

Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\ldots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \ldots\}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1,\ A_0 \wedge \neg A_3,\ \ldots,\ A_2 \wedge \neg A_1,\ A_2 \wedge \neg A_3,\ \ldots\}$$

Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\ldots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \ldots\}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1,\ A_0 \wedge \neg A_3,\ \ldots,\ A_2 \wedge \neg A_1,\ A_2 \wedge \neg A_3,\ \ldots\}$$

- diese Menge $E(F)$ ist erfüllbar
  (es gibt eine Interpretation I mit $I \models F'$ für alle $F' \in E(F)$)

Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\ldots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \ldots\}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1,\ A_0 \wedge \neg A_3,\ \ldots,\ A_2 \wedge \neg A_1,\ A_2 \wedge \neg A_3,\ \ldots\}$$

- diese Menge $E(F)$ ist erfüllbar
  (es gibt eine Interpretation I mit $I \models F'$ für alle $F' \in E(F)$)
- Modell: $I = \{A_0, A_2, A_4, \ldots\} = \{P(f_0^0, t) \mid t \in H(F)\}$

Beispiel

- HERBRAND-Expansion $E(F)$

$$E(F) = \{\underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1}, \underbrace{P(f_0^0, f_0^0)}_{A_0} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3},$$

$$\ldots, \underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f_0^0))}_{A_1},$$

$$\underbrace{P(f_0^0, f(f_0^0))}_{A_2} \wedge \neg \underbrace{R(f(f(f_0^0)))}_{A_3}, \ldots\}$$

$$= \{A_0 \wedge \neg A_1,\ A_0 \wedge \neg A_3,\ \ldots,\ A_2 \wedge \neg A_1,\ A_2 \wedge \neg A_3,\ \ldots\}$$

- diese Menge $E(F)$ ist erfüllbar
  (es gibt eine Interpretation I mit $I \models F'$ für alle $F' \in E(F)$)
- Modell: $I = \{A_0, A_2, A_4, \ldots\} = \{P(f_0^0, t) \mid t \in H(F)\}$
- dies liefert HERBRAND-Struktur $(J, \cdot^J)$ mit
  $P^J = \{(f_0^0, t) \mid t \in H(F)\}$ und $R^J = \emptyset$

Theorem (Satz von Gödel-Herbrand-Skolem)

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist erfüllbar gdw.
die Menge $E(F)$ im (aussagenlogischen) Sinne erfüllbar ist

Theorem (Satz von GÖDEL-HERBRAND-SKOLEM)

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist erfüllbar gdw. die Menge $E(F)$ im (aussagenlogischen) Sinne erfüllbar ist

Beweis.

Es genügt die Existenz eines HERBRAND-Modells gdw. $E(F)$ erfüllbar ist. Sei $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G$ mit $n, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ quantorenfrei.

Theorem (Satz von GÖDEL-HERBRAND-SKOLEM)

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist erfüllbar gdw. die Menge $E(F)$ im (aussagenlogischen) Sinne erfüllbar ist

Beweis.

Es genügt die Existenz eines HERBRAND-Modells gdw. $E(F)$ erfüllbar ist. Sei $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G$ mit $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ quantorenfrei.

F hat ein HERBRAND-Modell $I = (H(F), \cdot^I)$

gdw. $G^{I[x_{i_1} \mapsto t_1^I] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n^I]} = 1$ für alle $t_1, \dots, t_n \in H(F)$

gdw. $(G[x_{i_1} \mapsto t_1] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n])^I = 1$ für alle $t_1, \dots, t_n \in H(F)$

gdw. $(F')^I = 1$ für alle $F' \in E(F)$

gdw. I ist Modell für $E(F)$ $\square$

KURT GÖDEL (* 1906; † 1978)

- öster. Logiker; bedeutendster Logiker
- Beweistheorie
  (klassische vs. konstruktive Logik)
- widerlegte HILBERTsche Grundsatzprogramm

Korollar (Satz von HERBRAND)

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist unerfüllbar gdw.
eine endliche Teilmenge von $E(F)$ unerfüllbar ist

Prädikatenlogik — Herbrand-Theorie

Kurt Gödel (* 1906; † 1978)

- öster. Logiker; bedeutendster Logiker
- Beweistheorie
  (klassische vs. konstruktive Logik)
- widerlegte Hilbertsche Grundsatzprogramm

Korollar (Satz von Herbrand)

Eine Aussage $F \in \mathcal{F}$ in Skolemform ist unerfüllbar gdw.
eine endliche Teilmenge von $E(F)$ unerfüllbar ist

Beweis.

Konsequenz des vorherigen Theorems und
der Kompaktheit der Aussagenlogik □

Beispiel

- unerfüllbare Formel in Prädikatenlogik

$$F = \forall x \forall y \Big(\neg R(x, y) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)) \Big)$$

Beispiel

- unerfüllbare Formel in Prädikatenlogik

$$F = \forall x \forall y \Big(\neg R(x, y) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)) \Big)$$

- Herbrand-Expansion

$$E(F) = \{\neg R(f_0^0, f_0^0) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)),$$
$$\neg R(f_0^0, f(f_0^0)) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)), \ldots\}$$

Beispiel

- unerfüllbare Formel in Prädikatenlogik

$$F = \forall x \forall y \Big(\neg R(x, y) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)) \Big)$$

- HERBRAND-Expansion

$$\begin{aligned} E(F) = \{ & \neg R(f_0^0, f_0^0) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)), \\ & \neg R(f_0^0, f(f_0^0)) \wedge R(f_0^0, f(f_0^0)), \ldots \} \end{aligned}$$

Beispiel

- unerfüllbare Formel in Prädikatenlogik

$$F = \forall x \forall y \Big(\neg R(x, y) \land R(f_0^0, f(f_0^0)) \Big)$$

- HERBRAND-Expansion

$$E(F) = \{\neg R(f_0^0, f_0^0) \land R(f_0^0, f(f_0^0)),\\ \neg R(f_0^0, f(f_0^0)) \land R(f_0^0, f(f_0^0)), \ldots\}$$

- bereits die endliche Teilmenge $\{\neg R(f_0^0, f(f_0^0)) \land R(f_0^0, f(f_0^0))\}$ ist unerfüllbar

Prädikatenlogik — HERBRAND-Theorie

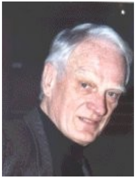
Algorithmus von GILMORE

Sei $F \in \mathcal{F}$ eine Aussage in Skolemform und $\{F_0, F_1, \ldots\}$ eine Aufzählung von $E(F)$.

1. setze $n \leftarrow 0$
2. falls $\{F_0, \ldots, F_n\}$ unerfüllbar ist, liefere **unerfüllbar**
3. setze $n \leftarrow n + 1$ und zurück zu 2

PAUL GILMORE (* 1906; † 1978)

- kanad. Logiker
- algorithmische Beweistheorie
- Professor und Forscher bei der IBM



Theorem

Der Algorithmus von Gilmore ist korrekt und vollständig für Unerfüllbarkeit von prädikatenlogischen Aussagen in Skolemform.

Theorem

Der Algorithmus von GILMORE ist korrekt und vollständig für Unerfüllbarkeit von prädikatenlogischen Aussagen in Skolemform.

Beweis.

- Korrektheit: folgt direkt aus dem Satz von HERBRAND

Theorem

Der Algorithmus von GILMORE ist korrekt und vollständig für Unerfüllbarkeit von prädikatenlogischen Aussagen in Skolemform.

Beweis.

- Korrektheit: folgt direkt aus dem Satz von HERBRAND
- Vollständigkeit: Aus dem Satz von HERBRAND folgt, dass eine endliche unerfüllbare Menge $M \subseteq E(F)$ existiert. Der Algorithmus von GILMORE wird irgendwann eine Obermenge $M' \supseteq M$ betrachten, die (aufgrund der konjunktiven Verknüpfung von Elementen einer Menge) auch unerfüllbar ist. Also stoppt der Algorithmus von GILMORE und liefert **unerfüllbar**. □

Notizen

- Algorithmus von Gilmore terminiert
  für unerfüllbare Aussagen in Skolemform
- terminiert allerdings nicht bei erfüllbarer Formel

Notizen

- Algorithmus von Gilmore terminiert
  für unerfüllbare Aussagen in Skolemform
- terminiert allerdings nicht bei erfüllbarer Formel
- Unerfüllbarkeit semi-entscheidbar
  (mehr dazu in der VL Berechenbarkeit)

Notizen

- Algorithmus von Gilmore terminiert
  für unerfüllbare Aussagen in Skolemform
- terminiert allerdings nicht bei erfüllbarer Formel
- Unerfüllbarkeit semi-entscheidbar
  (mehr dazu in der VL Berechenbarkeit)
- einen Algorithmus, der immer mit der korrekten Antwort
  "erfüllbar" oder "unerfüllbar" terminiert, kann es nicht geben
- Unerfüllbarkeit nicht entscheidbar
  (auch dazu mehr in der VL Berechenbarkeit)

Notizen

- Algorithmus von GILMORE terminiert
  für unerfüllbare Aussagen in Skolemform
- terminiert allerdings nicht bei erfüllbarer Formel
- Unerfüllbarkeit semi-entscheidbar
  (mehr dazu in der VL BERECHENBARKEIT)
- einen Algorithmus, der immer mit der korrekten Antwort
  "erfüllbar" oder "unerfüllbar" terminiert, kann es nicht geben
- Unerfüllbarkeit nicht entscheidbar
  (auch dazu mehr in der VL BERECHENBARKEIT)
- Algorithmus von GILMORE akademisch interessant,
  aber völlig praxisfern

Exkurs: Theorien

Prädikatenlogik — Theorien

Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

in einer Prädikatenlogik mit Gleichheit '$=$'
('$=$' hat die übliche, festgelegte Bedeutung)

Konjunktion dieser Formeln:

- $N(a)$ und $\forall x \big(N(x) \to N(f(x))\big)$ — $a \in N$ und $f : N \to N$
- $\forall x \forall y \big((f(x) = f(y)) \to (x = y)\big)$ — f injektiv
- $\forall x \neg \big(a = f(x)\big)$ — $a \neq f(x)$

PEANO-Axiome der natürlichen Zahlen

in einer Prädikatenlogik mit Gleichheit '$=$'
('$=$' hat die übliche, festgelegte Bedeutung)

Konjunktion dieser Formeln:

- $N(a)$ und $\forall x\big(N(x) \to N(f(x))\big)$ — $a \in N$ und $f : N \to N$
- $\forall x \forall y\big((f(x) = f(y)) \to (x = y)\big)$ — f injektiv
- $\forall x \neg\big(a = f(x)\big)$ — $a \neq f(x)$
- reicht dies?
  (Interpretieren alle Modelle N als isomorphe Kopie der natürlichen Zahlen mit a als 0 und f als Nachfolger?)

Prädikatenlogik — Theorien

Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

in einer Prädikatenlogik mit Gleichheit '$=$'
('$=$' hat die übliche, festgelegte Bedeutung)

Konjunktion dieser Formeln:

- $N(a)$ und $\forall x(N(x) \to N(f(x)))$ — $a \in N$ und $f: N \to N$
- $\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \to (x = y))$ — f injektiv
- $\forall x \neg(a = f(x))$ — $a \neq f(x)$
- reicht dies?
  (Interpretieren alle Modelle N als isomorphe Kopie der natürlichen Zahlen mit a als 0 und f als Nachfolger?)
- nein, Induktionsaxiom fehlt
  (man nehme die nicht-negativen reellen Zahlen)

Prädikatenlogik — Theorien

Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

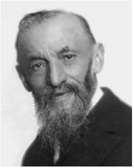
in einer Prädikatenlogik mit Gleichheit '$=$'
('$=$' hat die übliche, festgelegte Bedeutung)

Konjunktion dieser Formeln:

- $N(a)$ und $\forall x(N(x) \to N(f(x)))$ — $a \in N$ und $f : N \to N$
- $\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \to (x = y))$ — f injektiv
- $\forall x \neg(a = f(x))$ — $a \neq f(x)$
- reicht dies?
  (Interpretieren alle Modelle N als isomorphe Kopie der natürlichen Zahlen mit a als 0 und f als Nachfolger?)
- nein, Induktionsaxiom fehlt
  (man nehme die nicht-negativen reellen Zahlen)
- Induktionsaxiom (in dieser Logik) nicht ausdrückbar

Guiseppe Peano (* 1858; † 1932)

- ital. Mathematiker und Logiker
- Begründer der axiomatischen Mengenlehre
- Formalisierung der vollständigen Induktion



weitere Theorien

- für (alle) Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$
- für die Mengenlehre ZF und ZFC
- ...

Beispiel

- angenommen wir hätten die natürlichen Zahlen bereits spezifiziert (mit N, a und f)
- was realisiert R?

$$\forall x \forall y \forall z \Big((N(x) \land N(y) \land N(z)) \rightarrow \\ \Big(R(x,y,z) \leftrightarrow ((x = z \land y = a) \lor \\ \exists y', z' (N(y') \land N(z') \land R(x, y', z') \land \\ y = f(y') \land z = f(z'))) \Big) \Big)$$

Prädikatenlogik — Theorien

Beispiel

- angenommen wir hätten die natürlichen Zahlen bereits spezifiziert (mit N, a und f)
- was realisiert R?

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(N(x) \wedge N(y) \wedge N(z)\big) \rightarrow \Big(R(x,y,z) \leftrightarrow \big((x = z \wedge y = a) \vee \exists y', z' \big(N(y') \wedge N(z') \wedge R(x,y',z') \wedge y = f(y') \wedge z = f(z')\big)\big)\Big)\Big)$$

- Additionsrelation $R(x,y,z)$ wahr gdw. $x + y = z$

Prädikatenlogik — Theorien

Warum ist Erfüllbarkeit wichtig?

- eine unerfüllbare Theorie hat keine Modelle
  (läßt sich nicht realisieren)
- es lassen sich damit "Luftschlösser" bauen
  (z.B. haben wir auf der vorherigen Folie
  die Spezifikation der natürlichen Zahlen angenommen
  und darauf aufbauend die Addition definiert)
- damit lassen sich nun Eigenschaften der Addition beweisen
  z.B. Assoziativität und Kommutativität
- sollte die "Theorie" der natürlichen Zahlen unerfüllbar sein,
  dann lässt sich auch beweisen, dass $n + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  denn aus einem Widerspruch folgt jede Aussage

Notizen

- "aber die Theorie der natürlichen Zahlen ist doch erfüllbar" (denn es gibt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Modell)
- dieser Nachweis wird üblicherweise über Mengen geführt ($0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $\ldots$, $n = \{0, \ldots, n-1\}$)
- damit kann man die Widerspruchsfreiheit der PEANO-Axiome in der stärkeren Theorie der Mengenlehre beweisen

Notizen

- “aber die Theorie der natürlichen Zahlen ist doch erfüllbar” (denn es gibt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Modell)
- dieser Nachweis wird üblicherweise über Mengen geführt ($0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, ..., $n = \{0, \ldots, n-1\}$)
- damit kann man die Widerspruchsfreiheit der PEANO-Axiome in der stärkeren Theorie der Mengenlehre beweisen
- Mengenlehre basiert (üblicherweise) auf ZF-Axiomen (oder ZFC — ZF mit Auswahlaxiom [choice])

Prädikatenlogik — Theorien

Notizen

- “aber die Theorie der natürlichen Zahlen ist doch erfüllbar”
  (denn es gibt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Modell)
- dieser Nachweis wird üblicherweise über Mengen geführt
  ($0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, …, $n = \{0, \ldots, n-1\}$)
- damit kann man die Widerspruchsfreiheit der Peano-Axiome in der stärkeren Theorie der Mengenlehre beweisen
- Mengenlehre basiert (üblicherweise) auf ZF-Axiomen
  (oder ZFC — ZF mit Auswahlaxiom [choice])
- aber die Widerspruchsfreiheit (Erfüllbarkeit) von ZF
  läßt sich in ZF wieder nicht beweisen
  (es braucht dazu eine noch stärkere Theorie)

Notizen

- "aber die Theorie der natürlichen Zahlen ist doch erfüllbar"
  (denn es gibt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Modell)
- dieser Nachweis wird üblicherweise über Mengen geführt
  ($0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $\dots$, $n = \{0, \dots, n-1\}$)
- damit kann man die Widerspruchsfreiheit der PEANO-Axiome in der stärkeren Theorie der Mengenlehre beweisen
- Mengenlehre basiert (üblicherweise) auf ZF-Axiomen
  (oder ZFC — ZF mit Auswahlaxiom [choice])
- aber die Widerspruchsfreiheit (Erfüllbarkeit) von ZF
  läßt sich in ZF wieder nicht beweisen
  (es braucht dazu eine noch stärkere Theorie)
- etc.

Wiederholung: Resolution

Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

Definition

Sei $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.
Ein Disjunktionsglied $R \subseteq \mathcal{L}$ ist Resolvent von F gdw.
zwei Disjunktionsglieder $\{D_1, D_2\} \subseteq F$ und ein Atom A_i existieren, so dass

1. $A_i \in D_1$ und $\neg A_i \in D_2$ und
2. $R = \big(D_1 \setminus \{A_i\}\big) \cup \big(D_2 \setminus \{\neg A_i\}\big)$

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x \big(P(x) \land \neg P(f(f(x))) \big)$

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x \big(P(x) \land \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t) \cdots)$ mit n-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\}, \\ \{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \dots\big\}_\land$$

Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x\big(P(x) \wedge \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t)\cdots)$ mit n-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\}, \{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \dots\big\}_\wedge$$

- Resolution (aus der Aussagenlogik):
  1. $\{\neg P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x \big(P(x) \wedge \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t)\cdots)$ mit n-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\}, \{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \dots\big\}_\wedge$$

- Resolution (aus der Aussagenlogik):
  1. $\{\neg P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F
  2. $\{P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F

Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x \big(P(x) \land \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t)\cdots)$ mit n-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\},$$
$$\{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \ldots\big\}_\land$$

- Resolution (aus der Aussagenlogik):
  1. $\{\neg P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F
  2. $\{P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F
  3. $\emptyset$ Resolvent von $\{①, ②\}$

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x \big(P(x) \wedge \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t) \cdots)$ mit n-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\},$$
$$\{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \ldots\big\}_\wedge$$

- Resolution (aus der Aussagenlogik):
  1. $\{\neg P(f^2(f_0^0))\}$ — Element von F
  2. $\{P(f^2(f_0^0))\}$ — Element von F
  3. $\emptyset$ — Resolvent von $\{1, 2\}$
- damit ist die HERBRAND-Expansion unerfüllbar

Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

Beispiel

- prädikatenlogische Formel $\forall x\big(P(x) \wedge \neg P(f(f(x)))\big)$
- HERBRAND-Expansion $[f^n(t) = f(\cdots f(t)\cdots)$ mit n-mal $f]$

$$F = \big\{\{P(f_0^0)\}, \{\neg P(f^2(f_0^0))\}, \{P(f(f_0^0))\}, \{\neg P(f^3(f_0^0))\},$$
$$\{P(f^2(f_0^0))\}, \{\neg P(f^4(f_0^0))\}, \dots\big\}_\wedge$$

- Resolution (aus der Aussagenlogik):
  1. $\{\neg P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F
  2. $\{P(f^2(f_0^0))\}$ Element von F
  3. $\emptyset$ Resolvent von {1, 2}
- damit ist die HERBRAND-Expansion unerfüllbar
- und auch die Ausgangsformel ist daher unerfüllbar

Notizen

- wir können Resolution im Gilmore-Algorithmus einsetzen

$\rightarrow$ liefert Grundresolutionsalgorithmus
$=$ (aussagenlogische) Resolution auf Herbrand-Expansion

Notizen

- wir können Resolution im GILMORE-Algorithmus einsetzen

$\rightarrow$ liefert Grundresolutionsalgorithmus
$=$ (aussagenlogische) Resolution auf HERBRAND-Expansion

- auch korrekt und vollständig,
  aber auch (relativ) nutzlos

Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

Notizen

- wir können Resolution im GILMORE-Algorithmus einsetzen

$\rightarrow$ liefert Grundresolutionsalgorithmus
= (aussagenlogische) Resolution auf HERBRAND-Expansion

- auch korrekt und vollständig,
  aber auch (relativ) nutzlos
- Grundresolution, denn alle Variablen werden durch variablenfreie Terme (siehe HERBRAND-Expansion) ersetzt

Prädikatenlogik — Wiederholung Resolution

Notizen

- wir können Resolution im GILMORE-Algorithmus einsetzen

$\rightarrow$ liefert Grundresolutionsalgorithmus
= (aussagenlogische) Resolution auf HERBRAND-Expansion

- auch korrekt und vollständig,
  aber auch (relativ) nutzlos
- Grundresolution, denn alle Variablen werden durch variablenfreie Terme (siehe HERBRAND-Expansion) ersetzt

Motivation

- dies ist offenbar ineffizient
  (denn beliebige Instanzen werden berücksichtigt)
- wir sollten dies effizienter (d.h. zielgerichteter) erledigen

Substitution

Prädikatenlogik — Substitution

Definition (Wiederholung — Substitution)

- Terme: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathcal{T}$, definieren wir $\cdot[x_\ell \mapsto t] \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ durch
  - $x_\ell[x_\ell \mapsto t] = t$
  - $x_i[x_\ell \mapsto t] = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq \ell$
  - $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = f_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \ldots, t_k[x_\ell \mapsto t])$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
- Literale (spezielle Formeln): und $\cdot[x_\ell \mapsto t] \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ durch
  - $R_i^k(t_1, \ldots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = R_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \ldots, t_k[x_\ell \mapsto t])$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
  - $(\neg F)[x_\ell \mapsto t] = \neg(F[x_\ell \mapsto t])$ für alle $F \in \mathcal{F}$

Notizen

- Ersetzung aller Vorkommen von x_ℓ durch t
- in Resolution rechnen wir auf konjunktiven Normalformen (daher hier keine Nicht-Literale)

Prädikatenlogik — Substitution

Definition (allg. Substitution)

Sei $V \subseteq \mathcal{V}$ eine <u>endliche</u> Menge von Variablen.
Jede (totale) Funktion $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ ist eine Substitution.

Prädikatenlogik — Substitution

Definition (allg. Substitution)

Sei $V \subseteq \mathcal{V}$ eine endliche Menge von Variablen.
Jede (totale) Funktion $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ ist eine Substitution.

Definition

Sei $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution. Wir definieren:

- $\mathrm{subst}'(x_i) = \mathrm{subst}(x_i)$ für alle $x_i \in V$
- $\mathrm{subst}'(x_i) = x_i$ für alle $x_i \in \mathcal{V} \setminus V$
- $\mathrm{subst}'(f_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = f_i^k(\mathrm{subst}'(t_1), \ldots, \mathrm{subst}'(t_k))$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
- $\mathrm{subst}'(R_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = R_i^k(\mathrm{subst}'(t_1), \ldots, \mathrm{subst}'(t_k))$ und $\mathrm{subst}'(\neg R_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = \neg R_i^k(\mathrm{subst}'(t_1), \ldots, \mathrm{subst}'(t_k))$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

Notizen

- wir schreiben einfach subst statt subst′
  (da gibt es keine Verwirrung)
- falls $\mathrm{subst} \colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution mit $V = \{x_i\}$ ist, dann gilt

$$\mathrm{subst}(t) = t[x_i \mapsto \mathrm{subst}(x_i)]$$

Prädikatenlogik — Substitution

Notizen

- wir schreiben einfach subst statt subst′
  (da gibt es keine Verwirrung)
- falls $\mathsf{subst} \colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution mit $V = \{x_i\}$ ist, dann gilt
  $$\mathsf{subst}(t) = t[x_i \mapsto \mathsf{subst}(x_i)]$$
- man kann sich diese Substitution als mehrfache (gleichzeitige) Variablenersetzung vorstellen
- allerdings gilt im Allgemeinen für Substitutionen $\mathsf{subst} \colon V \to \mathcal{T}$ mit $V = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$
  $$\mathsf{subst}(t) \neq t[x_{i_1} \mapsto \mathsf{subst}(x_{i_1})] \cdots [x_{i_n} \mapsto \mathsf{subst}(x_{i_n})]$$

Beispiele

subst: $\{x_1, x_2, x_3\} \to \mathcal{T}$ mit

$$\mathrm{subst}(x_1) = f(g(a)) \qquad \mathrm{subst}(x_2) = x_3 \qquad \mathrm{subst}(x_3) = a$$

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

subst: $\{x_1, x_2, x_3\} \to \mathcal{T}$ mit

$$\text{subst}(x_1) = f(g(a)) \qquad \text{subst}(x_2) = x_3 \qquad \text{subst}(x_3) = a$$

- $\text{subst}\big(R(g(h(a, b)))\big) = R(g(h(a, b)))$

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

subst: $\{x_1, x_2, x_3\} \to \mathcal{T}$ mit

$$\text{subst}(x_1) = f(g(a)) \qquad \text{subst}(x_2) = x_3 \qquad \text{subst}(x_3) = a$$

- $\text{subst}\big(R(g(h(a, b)))\big) = R(g(h(a, b)))$
- $\text{subst}\big(\neg P(h(x_1, x_2, x_3), x_3)\big) = \neg P(h(f(g(a)), x_3, a), a)$

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

subst: $\{x_1, x_2, x_3\} \to \mathcal{T}$ mit

$$\text{subst}(x_1) = f(g(a)) \qquad \text{subst}(x_2) = x_3 \qquad \text{subst}(x_3) = a$$

- $\text{subst}\big(R(g(h(a, b)))\big) = R(g(h(a, b)))$
- $\text{subst}\big(\neg P(h(x_1, x_2, x_3), x_3)\big) = \neg P(h(f(g(a)), x_3, a), a)$
- aber $\neg P(h(x_1, x_2, x_3), x_3)[x_1 \mapsto f(g(a))][x_2 \mapsto x_3][x_3 \mapsto a]$ ist $\neg P(h(f(g(a)), a, a), a)$
  (denn die Einzelersetzungen werden nacheinander ausgeführt)

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

subst: $\{x_1, x_2, x_3\} \to \mathcal{T}$ mit

$$\text{subst}(x_1) = f(g(a)) \qquad \text{subst}(x_2) = x_3 \qquad \text{subst}(x_3) = a$$

- $\text{subst}\big(R(g(h(a,b)))\big) = R(g(h(a,b)))$
- $\text{subst}\big(\neg P(h(x_1, x_2, x_3), x_3)\big) = \neg P(h(f(g(a)), x_3, a), a)$
- aber $\neg P(h(x_1, x_2, x_3), x_3)[x_1 \mapsto f(g(a))][x_2 \mapsto x_3][x_3 \mapsto a]$ ist $\neg P(h(f(g(a)), a, a), a)$
  (denn die Einzelersetzungen werden nacheinander ausgeführt)
- man kann 'subst' allerdings mit Einzelersetzungen schreiben

$$[x_1 \mapsto f(g(a))][x_3 \mapsto a][x_2 \mapsto x_3]$$

Theorem (Vertauschung)

Seien $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution, $x \notin V$ eine Variable und $t \in \mathcal{T}$. Falls $x \notin \mathrm{Var}(\mathrm{subst}(v))$ für alle $v \in V$, dann gilt für alle Terme $u \in \mathcal{T}$

$$\mathrm{subst}(u[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(u)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$$

Prädikatenlogik — Substitution

Theorem (Vertauschung)

Seien $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution, $x \notin V$ eine Variable und $t \in \mathcal{T}$. Falls $x \notin \mathrm{Var}(\mathrm{subst}(v))$ für alle $v \in V$, dann gilt für alle Terme $u \in \mathcal{T}$

$$\mathrm{subst}(u[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(u)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$$

Beweis (1/2).

per Induktion über dem Termaufbau

- Sei $u = x$. Dann gilt
  $\mathrm{subst}(x[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(t) = \mathrm{subst}(x)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$

Prädikatenlogik — Substitution

Theorem (Vertauschung)

Seien $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ eine Substitution, $x \notin V$ eine Variable und $t \in \mathcal{T}$. Falls $x \notin \mathrm{Var}(\mathrm{subst}(v))$ für alle $v \in V$, dann gilt für alle Terme $u \in \mathcal{T}$

$$\mathrm{subst}(u[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(u)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$$

Beweis (1/2).

per Induktion über dem Termaufbau

- Sei $u = x$. Dann gilt $\mathrm{subst}(x[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(t) = \mathrm{subst}(x)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$
- Sei $u \neq x$ für $u \in \mathcal{V}$. Dann gilt $\mathrm{subst}(v[x \mapsto t]) = \mathrm{subst}(v) = \mathrm{subst}(v)[x \mapsto \mathrm{subst}(t)]$ da $x \notin \mathrm{Var}(\mathrm{subst}(v))$

Prädikatenlogik — Substitution

Beweis (2/2).

per Induktion über den Termaufbau

- Sei $u = f_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$.

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{subst}(f_i^k(t_1, \dots, t_k)[x \mapsto t]) \\
= {} & \operatorname{subst}(f_i^k(t_1[x \mapsto t], \dots, t_k[x \mapsto t])) \\
= {} & f_i^k(\operatorname{subst}(t_1[x \mapsto t]), \dots, \operatorname{subst}(t_k[x \mapsto t])) \\
= {} & f_i^k(\operatorname{subst}(t_1)[x \mapsto \operatorname{subst}(t)], \dots, \operatorname{subst}(t_k)[x \mapsto \operatorname{subst}(t)]) \\
= {} & f_i^k(\operatorname{subst}(t_1), \dots, \operatorname{subst}(t_k))[x \mapsto \operatorname{subst}(t)] \\
= {} & \operatorname{subst}(f_i^k(t_1, \dots, t_k))[x \mapsto \operatorname{subst}(t)]
\end{aligned}
$$

unter Nutzung der IH in der dritten Gleichheit. $\square$

Notizen

- in begrenzten Fällen kann man also die Reihenfolge der Ersetzungen vertauschen

Notizen

- in begrenzten Fällen kann man also die Reihenfolge der Ersetzungen vertauschen
- zur Vereinfachung schreiben wir auch

$$[x_{i_1} \mapsto \mathrm{subst}(x_{i_1}), \ldots, x_{i_n} \mapsto \mathrm{subst}(x_{i_n})]$$

  anstatt der Substitution $\mathrm{subst} \colon \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \to \mathcal{T}$
- innerhalb der Klammern also parallele Substitution

$$[x_{i_1} \mapsto t_1, \ldots, x_{i_n} \mapsto t_n] \neq [x_{i_1} \mapsto t_1] \cdots [x_{i_n} \mapsto t_n]$$

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

- Vertauschung anwendbar

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} = \underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(g(x_3))}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

- Vertauschung anwendbar

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\,\underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} = \underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(g(x_3))}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

- Vertauschung nicht anwendbar (gleiche Substitutionsvariable)

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\,\underbrace{[x_1 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} \neq \underbrace{[x_1 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(x_2)}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

Prädikatenlogik — Substitution

Beispiele

- Vertauschung anwendbar

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} = \underbrace{[x_2 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(g(x_3))}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

- Vertauschung nicht anwendbar (gleiche Substitutionsvariable)

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\underbrace{[x_1 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}} \neq \underbrace{[x_1 \mapsto g(x_3)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(x_2)}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

- Vertauschung nicht anwendbar (Variable in Ersetzungsterm)

$$[x_1 \mapsto f(x_2)]\underbrace{[x_2 \mapsto g(x_1)]}_{\text{subst}} \neq \underbrace{[x_2 \mapsto g(x_1)]}_{\text{subst}}[x_1 \mapsto \underbrace{f(g(x_1))}_{\text{subst}(f(x_2))}]$$

Unifikation

Definition (Unifikator)

Sei $M = \{L_1, \ldots, L_n\}$ eine endliche Menge von (prädikatenlogischen) Literalen.

- Ein Substitution $\mathsf{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ heißt Unifikator für M gdw.

$$\mathsf{subst}(L_1) = \cdots = \mathsf{subst}(L_n)$$

(Unifikator macht alle Literale gleich)

Prädikatenlogik — Unifikation

Definition (Unifikator)

Sei $M = \{L_1, \dots, L_n\}$ eine endliche Menge von (prädikatenlogischen) Literalen.

- Ein Substitution $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ heißt Unifikator für M gdw.

  $$\mathrm{subst}(L_1) = \cdots = \mathrm{subst}(L_n)$$

  (Unifikator macht alle Literale gleich)

- Unifikator $\mathrm{subst}\colon V \to \mathcal{T}$ für M ist der allgemeinste Unifikator für M gdw. für jeden Unifikator $\mathrm{subst}'\colon V' \to \mathcal{T}$ für M eine Substitution $\mathrm{subst}''\colon V'' \to \mathcal{T}$ existiert, so dass $\mathrm{subst}' = \mathrm{subst}\,\mathrm{subst}''$

  (jeden Unif. erhält man per Substitution aus allg. Unif.)

Notizen

- Unifikator ist nicht eindeutig
  $\rightarrow$ es können mehrere Unifikatoren existieren

Notizen

- Unifikator ist nicht eindeutig
  $\rightarrow$ es können mehrere Unifikatoren existieren
- Unifikator muss nicht existieren
  $\rightarrow$ Menge M heißt nicht unifizierbar gdw.
  kein Unifikator für M existiert

Prädikatenlogik — Unifikation

Notizen

- Unifikator ist nicht eindeutig
  $\rightarrow$ es können mehrere Unifikatoren existieren
- Unifikator muss nicht existieren
  $\rightarrow$ Menge M heißt nicht unifizierbar gdw.
  kein Unifikator für M existiert
- falls ein Unifikator existiert,
  dann existiert auch ein allg. Unifikator

Notizen

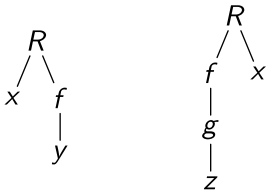
- Unifikator ist nicht eindeutig
  $\rightarrow$ es können mehrere Unifikatoren existieren
- Unifikator muss nicht existieren
  $\rightarrow$ Menge M heißt nicht unifizierbar gdw.
  kein Unifikator für M existiert
- falls ein Unifikator existiert,
  dann existiert auch ein allg. Unifikator
- aber es kann auch mehrere allg. Unifikatoren geben

Prädikatenlogik — Unifikation

Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(f(g(z)), x)$

Darstellung als Syntaxbaum:



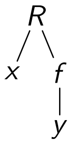
Prädikatenlogik — Unifikation

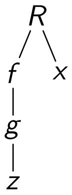
Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(f(g(z)), x)$
- Unifikator

$$[x \mapsto f(g(z)), \; y \mapsto g(z)]$$

Darstellung als Syntaxbaum:



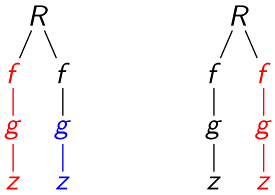


Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(f(g(z)), x)$
- Unifikator

$$[x \mapsto f(g(z)),\ y \mapsto g(z)]$$

Darstellung als Syntaxbaum:



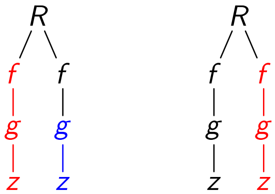
Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(f(g(z)), x)$
- Unifikator

$$[x \mapsto f(g(z)),\ y \mapsto g(z)]$$

- ist sogar allgemeinster Unifikator

Darstellung als Syntaxbaum:

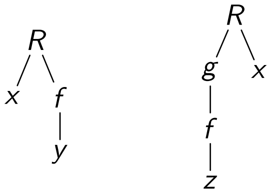


Prädikatenlogik — Unifikation

weiteres Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(g(f(z)), x)$

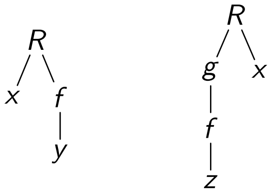
Darstellung als Syntaxbaum:



weiteres Beispiel

- zwei Literale $R(x, f(y))$ und $R(g(f(z)), x)$
- nicht unifizierbar
  (x müsste durch Term mit Wurzel f sein;
  aber gleichzeitig auch Wurzel g haben)

Darstellung als Syntaxbaum:



Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$

Prädikatenlogik — Unifikation

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗

  (verschiedene Relationssymbole)

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$

Prädikatenlogik — Unifikation

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$

Prädikatenlogik — Unifikation

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$ ✓
  (Unifikator $[y \mapsto a,\ z \mapsto f(x)]$)

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$ ✓
  (Unifikator $[y \mapsto a,\ z \mapsto f(x)]$)
- $P(f(y), g(x))$ und $P(z, x)$

Prädikatenlogik — Unifikation

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$ ✓
  (Unifikator $[y \mapsto a,\ z \mapsto f(x)]$)
- $P(f(y), g(x))$ und $P(z, x)$ ✗
  (linke Seite hat immer ein 'g' mehr)

Prädikatenlogik — Unifikation

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$ ✓
  (Unifikator $[y \mapsto a,\ z \mapsto f(x)]$)
- $P(f(y), g(x))$ und $P(z, x)$ ✗
  (linke Seite hat immer ein 'g' mehr)
- $P(f(x), g(y))$ und $\neg P(z, x)$

Prädikatenlogik — Unifikation

Aufgabe

Welche der folgenden Literale sind unifizierbar?

- $P(x, y)$ und $R(a, x)$ ✗
  (verschiedene Relationssymbole)
- $P(f(x), g(y))$ und $P(a, z)$ ✗
  (verschiedene Funktionssymbole)
- $P(f(x), y)$ und $P(z, a)$ ✓
  (Unifikator $[y \mapsto a,\ z \mapsto f(x)]$)
- $P(f(y), g(x))$ und $P(z, x)$ ✗
  (linke Seite hat immer ein 'g' mehr)
- $P(f(x), g(y))$ und $\neg P(z, x)$ ✗
  (positives vs. negatives Literal)

Zusammenfassung

- Herbrand-Expansion
- Algorithmus von Gilmore
- Substitution und Unifikation

Sechste Übungsserie ist bereits verfügbar.