Logik
Vorlesung 9: Normalformen

Andreas Maletti

19. Dezember 2014

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Ersetzungstheorem
2. Negationsnormalform
3. Bereinigung von Formeln
4. Pränexnormalform
5. Skolemform

Bitte Fragen direkt stellen!

Überblick

Organisation

Organisation

Ankündigungen

- Punkteübersicht (Hausaufgaben) auf Webseite verfügbar
- Bonuspunkte:
  - 1 Bonuspunkt ab 36 Punkten
  - 2 Bonuspunkte ab 45 Punkten
  - 3 Bonuspunkte ab 54 Punkten

Frage

- Tutorium gewünscht? ✓
- Wenn ja, wann?

Überblick

Wiederholung: Äquivalenz

Prädikatenlogik — Wiederholung

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind äquivalent gdw.
$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✓
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall z \exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall x \forall z \exists y F$ ✗

Prädikatenlogik — Äquivalenz

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\forall x F$	$\exists x \neg F$	deMorgan-Gesetz für $\forall$
$\neg\exists x F$	$\forall x \neg F$	deMorgan-Gesetz für $\exists$
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall x F \wedge \forall x G$	Distributivität $\forall$ über $\wedge$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists x F \vee \exists x G$	Distributivität $\exists$ über $\vee$
$\forall x \forall y F$	$\forall y \forall x F$	Kommutativität von $\forall$
$\exists x \exists y F$	$\exists y \exists x F$	Kommutativität von $\exists$
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall x F \wedge G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall x F \vee G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists x F \wedge G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists x F \vee G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
alle klassischen Äquivalenzen der Aussagenlogik		

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Theorem (Ersetzungstheorem — Prädikatenlogik)

Sei F eine Formel und F' eine Teilformel von F.
Des Weiteren sei G' eine Formel, die äquivalent zu F' ist.
Dann ist F äquivalent zu der Formel, die man aus F erhält, indem man ein Vorkommen der Teilformel F' durch G' ersetzt.

Notizen

- gleicher Wortlaut wie in der Aussagenlogik
- Teilformeln einer Formel der Bauart $F = Qx_i G$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ sind F selbst und alle Teilformeln von G

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Beweis (1/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.
Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

1. Sei $F = R_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.
2. Sei $F = \neg F_1$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = \neg G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

     $$F^J = (\neg F_1)^J = 1 - F_1^J = 1 - G_1^J = (\neg G_1)^J = G^J$$

     und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.
     Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Beweis (2/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

3. Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

     $$\begin{aligned} F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J \end{aligned}$$

     und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.
     Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_2. Analog.
4. Sei $F = (F_1 \vee F_2)$. Analog zu 3

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Beweis (3/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

5. Sei $F = \forall x_i F_1$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = \forall x_i G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei $J = (U, \cdot^J)$ eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$\begin{aligned}
& (\forall x_i F_1)^J = 1 \\
\text{gdw. } & F_1^{J[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ für alle } u \in U \\
\text{gdw. } & G_1^{J[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ für alle } u \in U \\
\text{gdw. } & (\forall x_i G_1)^J = 1
\end{aligned}$$

   womit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$. Damit ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

6. Sei $F = \exists x_i F_1$. Analog zu 5

□

Notizen

- wir können also wieder äquivalente Formeln füreinander substituieren
- äquivalente Formeln sind semantisch ununterscheidbar
- äquivalente Formeln haben die gleichen Modelle

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Beispiele

Entwickeln Sie eine Formel,

- deren Modelle mind. 2 Elemente im Universum haben.
  (die Formel muss also Universen mit 1 Element ausschließen)

  $$P(x) \land \neg P(y)$$

  Für jedes Modell $I = (U, \cdot^I)$ muss gelten $x^I \in P^I$ und $y^I \notin P^I$. Also $x^I \neq y^I$ und da $x^I \in U$ und $y^I \in U$, hat U mind. 2 Elemente.

- deren Modelle höchstens 2 Elemente im Universum haben.
  (die Formel muss größere Universen ausschließen)

  Antwort:

  - clever: $P(a) \land \neg P(a)$ unerfüllbar und damit haben alle Modelle höchstens zwei Elemente
  - Gibt es auch eine erfüllbare Formel? (siehe Übung)

Definition (Termsubstitution)

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathcal{T}$, definieren wir $\cdot[x_\ell \mapsto t] \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ durch

- $x_\ell[x_\ell \mapsto t] = t$
- $x_i[x_\ell \mapsto t] = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq \ell$
- $f_i^k(t_1, \ldots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = f_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \ldots, t_k[x_\ell \mapsto t])$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

Notizen

- Ersetzung aller (Vorkommen von) x_ℓ durch t
- Beispiel demnächst

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Definition (Formelsubstitution)

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathcal{T}$, definieren wir $\cdot[x_\ell \mapsto t] \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ durch

- $R_i^k(t_1, \dots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = R_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \dots, t_k[x_\ell \mapsto t])$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $(\neg F)[x_\ell \mapsto t] = \neg(F[x_\ell \mapsto t])$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $(F_1 \circ F_2)[x_\ell \mapsto t] = (F_1[x_\ell \mapsto t] \circ F_2[x_\ell \mapsto t])$
  für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $(Qx_\ell F)[x_\ell \mapsto t] = Qx_\ell F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$
  (keine Substitution in gebundene Variablen)
- $(Qx_i F)[x_\ell \mapsto t] = Qx_i(F[x_\ell \mapsto t])$
  für alle $F \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq \ell$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Notizen

- Ersetzung aller freien Vorkommen von x_ℓ durch t
- keine Änderung an gebundenen Variablen

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Beispiel

gebundene Vorkommen in rot und freie Vorkommen in grün

$$F = \Big(\exists x_0 \underbrace{\neg\big(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0\big)}_{x_0} \to \forall x_1 \underbrace{\big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)}_{x_1}\Big)$$

Also ist $F[x_1 \mapsto f_0^1(f_0^0)]$ gleich

$$F = \Big(\exists x_0 \underbrace{\neg\big(R_0^2(x_0, f_0^1(f_0^0)) \vee R_0^0\big)}_{x_0} \to \forall x_1 \underbrace{\big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)}_{x_1}\Big)$$

Notizen

- $F[x_i \mapsto t]$ = Substitution in einer Formel — Syntax
- $I[x_i \mapsto u]$ = Substitution in einer Interpretation — Semantik

Prädikatenlogik — Äquivalenz

Theorem

Sei Qx_iF eine Formel mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$. Weiterhin sei $j \in \mathbb{N}$, so dass x_j nicht in F vorkommt.
Dann sind Qx_iF und $Qx_j(F[x_i \mapsto x_j])$ äquivalent.

Beweis.

in der Übung $\square$

Notizen

- gestattet Umbenennung gebundener Variablenvorkommen (zusammen mit Ersetzungstheorem)
- wir können "Mehrfachbelegungen" von Variablen vermeiden

Normalformen

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein Literal gdw.

1. $F = R_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ ist oder
   positives Literal
2. $F = \neg R_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ ist
   negatives Literal

Literale der Form 1 bzw. 2 heißen positiv bzw. negativ

Notizen

- entspricht der Def. in der Aussagenlogik
- Literale = Atome und negierte Atome

Prädikatenlogik — Normalformen

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in Negationsnormalform falls Negationen ($\neg$) nur in Literalen vorkommen.

Beispiele

- $\exists x \forall y \big(R(x) \wedge \neg S(x, y)\big) \wedge \forall z \neg S(z, b)$
  ist in Negationsnormalform
- $\neg \forall x S(x)$ und $\exists x \big(R(x) \wedge S(a)\big) \rightarrow S(b)$
  sind nicht in Negationsnormalform

Prädikatenlogik — Normalformen

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Beweis.

1. Auflösen der Abkürzungen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
2. Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\neg F$	F	Involution $\neg$
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$
$\neg\forall x F$	$\exists x \neg F$	deMorgan-Gesetz für $\forall$
$\neg\exists x F$	$\forall x \neg F$	deMorgan-Gesetz für $\exists$

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Dies terminiert (Argument wie bisher) und nach Ersetzungstheorem ist die erhaltene Formel äquivalent zu F □

Beispiel

$$
\begin{array}{rl}
 & \exists x \big(R(x) \land S(a) \big) \to S(b) \\
\text{äquivalent zu} & \neg \exists x \big(R(x) \land S(a) \big) \lor S(b) \\
\text{äquivalent zu} & \forall x \neg \big(R(x) \land S(a) \big) \lor S(b) \\
\text{äquivalent zu} & \forall x \big(\neg R(x) \lor \neg S(a) \big) \lor S(b)
\end{array}
$$

und dies ist in Negationsnormalform

Prädikatenlogik — Normalformen

Definition

Wir definieren die Funktion GV: $\mathcal{F} \to \mathrm{Pow}(\mathcal{V})$ durch

(gebundene Variablen in Formel)

- $\mathrm{GV}(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $\mathrm{GV}(\neg F) = \mathrm{GV}(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $\mathrm{GV}(F_1 \circ F_2) = \mathrm{GV}(F_1) \cup \mathrm{GV}(F_2)$
  für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $\mathrm{GV}(Qx_i F) = \{x_i\} \cup \mathrm{GV}(F)$
  für alle $F \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Notizen

- liefert alle Variablen, die (irgendwo) gebunden werden
- eine Variable kann gleichzeitig gebunden und frei vorkommen

Beispiele

gebundene Vorkommen in rot und freie Vorkommen in grün

$$F = \Big(\exists x_0 \underbrace{\neg\big(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0\big)}_{x_0} \to \forall x_1 \underbrace{\big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)}_{x_1}\Big)$$

$$G = \forall x_0 \, \forall x_1 \underbrace{\underbrace{\Big(R_0^2(x_0, x_1) \to \big(R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)\big)\Big)}_{x_1}}_{x_0}$$

- $\mathrm{FV}(F) = \{x_0, x_1\}$ und $\mathrm{GV}(F) = \{x_0, x_1\}$
- $\mathrm{FV}(G) = \emptyset$ und $\mathrm{GV}(G) = \{x_0, x_1\}$

Prädikatenlogik — Normalformen

Definition

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt bereinigt, gdw.

- keine Variable gleichzeitig frei und gebunden in F vorkommt
  $\mathrm{FV}(F) \cap \mathrm{GV}(F) = \emptyset$
- und alle Quantoren verschiedene Variablen binden
  (hinter verschiedenen Vorkommen der Quantoren $\{\forall, \exists\}$ stehen verschiedene Variablen)

Beispiele

$$F = \Big(\exists x_0 \neg \big(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0\big) \to \forall x_1 \big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \Big(R_0^2(x_0, x_1) \to \big(R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)\big)\Big)$$

- F ist nicht bereinigt denn $\mathrm{FV}(F) \cap \mathrm{GV}(F) = \{x_0, x_1\}$
- G ist bereinigt

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente bereinigte Formel

Beweis.

Unter Nutzung des Umbennungs- und Ersetzungstheorems benennen wir schrittweise jedes gebundene Vorkommen einer Variable in x_i mit $x_i \notin \text{Symbole}(F) \cup \text{GV}(F)$ um.

Aufgrund des Unbenennungs- und des Ersetzungstheorems ist die so erhaltene Formel äquivalent zu F $\square$

Beispiel

$$F = \Big(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \to \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))\Big)$$

- gebundenes x_0 kollidiert mit freiem x_0; Umbenennung in x_2

  $$F = \Big(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \to \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))\Big)$$

- gebundenes x_1 kollidiert mit freiem x_1; Umbenennung in x_3 (Umbenennung in x_2 würde x_2 doppelt binden)

  $$F = \Big(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \to \forall x_3 (R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0))\Big)$$

- bereinigte Formel

Pränexform

Prädikatenlogik — Pränexform

Notizen

- Übertragung der Normalformen der Aussagenlogik

→ konjunktive Normalform für Prädikatenlogik

- Quantoren "im Weg", aber können mit

äquivalente Formeln		**Bezeichnung**
$\neg\forall x F$	$\exists x \neg F$	deMorgan-Gesetz für $\forall$
$\neg\exists x F$	$\forall x \neg F$	deMorgan-Gesetz für $\exists$
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall x F \wedge G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall x F \vee G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists x F \wedge G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists x F \vee G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$

vorangestellt werden

→ Pränexform

Prädikatenlogik — Pränexform

Definition

Eine Formel ist in Pränexform gdw. $F = Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \cdots Q_n x_{i_n} G$ mit

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und
- G enthält keine Quantoren

Die Formel ist in bereinigter Pränexform
gdw. sie bereinigt und in Pränexform ist.

Beispiele

$$F = \Big(\exists x_0 \neg\big(R_0^2(x_0, x_1) \lor R_0^0\big) \to \forall x_1 \big(R_1^2(x_1, x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \Big(R_0^2(x_0, x_1) \to \big(R_0^1(x_1) \lor R_0^1(x_0)\big)\Big)$$

- F ist nicht in Pränexform
- G ist in bereinigter Pränexform

Prädikatenlogik — Pränexform

Theorem

Für jede Formel existiert eine
äquivalente Formel in bereinigter Pränexform

Ansatz

1. Transformation in Negationsnormalform
2. Bereinigung (Umbenennung der gebundenen Variablen)
3. Anwendung der folgenden Äquivalenzen von rechts nach links

äquivalente	**Formeln**	**Bezeichnung**
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall x F \wedge G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall x F \vee G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists x F \wedge G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists x F \vee G$	falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$

Prädikatenlogik — Pränexform

Theorem

Für jede Formel F existiert eine
äquivalente Formel G in bereinigter Pränexform

Beweis (1/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ mit $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann ist $G = F$ bereits in bereinigter Pränexform.
- Sei $F = \neg F'$ mit $F' \in \mathcal{F}$. Gemäß Induktionsannahme existiert eine Formel G' in bereinigter Pränexform, die äquivalent zu F' ist. Sei $G' = Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G''$, so dass G'' keine Quantoren mehr enthält. Also
$$
\begin{aligned}
F = \neg F' &\leftrightarrow \neg G' = \neg Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G'' \\
&\leftrightarrow \overline{Q_1} x_{i_1} \cdots \overline{Q_n} x_{i_n} \neg G'' = G
\end{aligned}
$$
und G ist in bereinigter Pränexform, wobei $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$.

Prädikatenlogik — Pränexform

Beweis (2/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = F_1 \circ F_2$ mit $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$. Dann existieren bereinigte Pränexformen $G_1, G_2 \in \mathcal{F}$, so dass F_1 und G_1 sowie F_2 und G_2 äquivalent sind.

  Seien $G_1 = Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G_1'$ und $G_2 = Q_1' x_{j_1} \cdots Q_m' x_{j_m} G_2'$, so dass G_1' und G_2' keine Quantoren mehr enthalten. Aufgrund des Umbenennungstheorems können wir annehmen, dass $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \cap (\mathrm{Symbole}(G_2) \cup \mathrm{GV}(G_2)) = \emptyset$ und $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\} \cap (\mathrm{Symbole}(G_1) \cup \mathrm{GV}(G_1)) = \emptyset$. Also

$$\begin{aligned}
F = F_1 \circ F_2 &\leftrightarrow G_1 \circ G_2 = (Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G_1') \circ G_2 \\
&\leftrightarrow Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} (G_1' \circ G_2) \\
&= Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} (G_1' \circ (Q_1' x_{j_1} \cdots Q_m' x_{j_m} G_2')) \\
&\leftrightarrow Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} Q_1' x_{j_1} \cdots Q_m' x_{j_m} (G_1' \circ G_2') = G
\end{aligned}$$

  und G ist in bereinigter Pränexform.

Beweis (3/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = Qx_iF'$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F' \in \mathcal{F}$. Dann existiert eine Formel G' in bereinigter Pränexform, die äquivalent zu F' ist.

  Sei $G' = Q_1x_{i_1} \cdots Q_nx_{i_n}G''$, so dass G'' keine Quantoren mehr enthält. Aufgrund des Umbenennungstheorems können wir annehmen, dass $i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$ (d.h. die Formel G' bindet x_i nicht). Also

  $$F = Qx_iF' \leftrightarrow Qx_iG' = Qx_i(Q_1x_{i_1} \cdots Q_nx_{i_n}G'') = G$$

  und G ist in bereinigter Pränexform. $\square$

Prädikatenlogik — Pränexform

Beispiel

Eingabeformel:

$$\Big(\exists x_0 \neg\big(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0\big) \rightarrow \forall x_1 \big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

1. Negationsnormalform:

$$\Big(\forall x_0 \big(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0\big) \vee \forall x_1 \big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

2. Bereinigung (Umbenennung aller gebundenen Variablen):

$$\Big(\forall x_2 \big(R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0\big) \vee \forall x_3 \big(R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)\big)\Big)$$

3. Pränexform:

$$\forall x_2 \forall x_3 \Big(R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0 \vee \big(R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)\big)\Big)$$

$\boxed{\text{Skolemform}}$

Prädikatenlogik — Skolemform

Motivation

- in Pränexform sind alle Quantoren bereits am Anfang
- nun wollen wir einige Quantoren (Existenzquantoren) eliminieren

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind erfüllbarkeitsäquivalent gdw.

F_1 erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar

Notizen

- gleiche Definition wie in Aussagenlogik
- $P(x)$ und $P(y)$ sind nicht äquivalent, aber erfüllbarkeitsäquivalent

Prädikatenlogik — Skolemform

Beobachtung

- $\exists x P(x)$ und $P(a)$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
- Was heißt $\left(\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)\right)^I = 1$?
  - für jedes $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ existiert $u_3 \in U$, so dass $(u_1, u_2, u_3) \in P^I$
  - wir können eine Funktion nutzen, die uns u_3 aus u_1 und u_2 berechnet

  $\rightarrow$ $\forall x \forall y P(x, y, f(x, y))$
  - durch "richtige" Interpretation von f ist auch diese Formel erfüllbar

  $\rightarrow$ Erfüllbarkeitsäquivalenz
- $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$ und $\forall x \forall y P(x, y, f(x, y))$ sind erfüllbarkeitsäquivalent

Prädikatenlogik — Skolemform

Skolem-Transformation

Sei F eine Formel in bereinigter Pränexform.

1. falls F keinen Existenzquantor enthält, **liefere** F
2. sei $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} \exists x_i G$ für G in bereinigter Pränexform und $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0$ zulässig und G kann Quantoren enthalten)
3. sei $f_j^n \notin \text{Symbole}(F)$ ein neues n-stelliges Funktionssymbol
4. setze $F \leftarrow \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G[x_i \mapsto f_j^n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})]$ und zu 1
   (entferne Existenzquantor und ersetze x_i durch $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$)

Terminiert und jedes Resultat heißt Skolemform von F.

Thoralf Albert Skolem (* 1887; † 1963)

- norw. Mathematiker und Logiker
- Doktorvater (Axel Thue) bei Einreichung der Dissertation schon 4 Jahre tot
- lehnte überabzählbare Mengen ab

Prädikatenlogik — Skolemform

Beispiel

- Formel in bereinigter Pränexform

$$\forall x \exists y \exists z \Big(P\big(x, f(y,y), z\big) \wedge \neg R\big(y, g(x)\big) \Big)$$

- nach 1. Schleifendurchlauf

$$\forall x \exists z \Big(P\big(x, f(g'(x), g'(x)), z\big) \wedge \neg R\big(g'(x), g(x)\big) \Big)$$

- nach 2. Schleifendurchlauf

$$\forall x \Big(P\big(x, f(g'(x), g'(x)), g''(x)\big) \wedge \neg R\big(g'(x), g(x)\big) \Big)$$

Prädikatenlogik — Skolemform

Beispiel

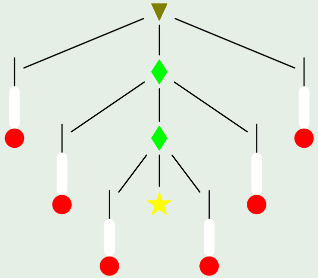
- Ausgangsformel in bereinigter Pränexform:

$$\forall \bullet \exists \dagger \; \blacktriangledown(\dagger, \blacklozenge(\dagger, \blacklozenge(\dagger, \bigstar, \dagger), \dagger), \dagger)$$

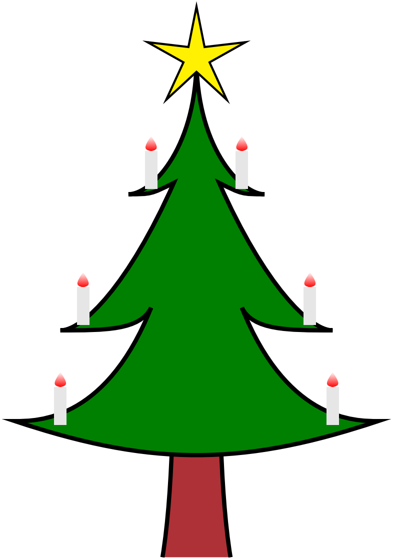
- Skolemform:

$$\forall \bullet \; \blacktriangledown(|(\bullet), \blacklozenge(|(\bullet), \blacklozenge(|(\bullet), \bigstar, |(\bullet)), |(\bullet)), |(\bullet))$$

- Illustration:



Frohe Weihnachten!



Zusammenfassung

- Ersetzungstheorem
- Negationsnormalform
- Bereinigung von Formeln
- Pränexnormalform
- Skolemform

Fünfte Übungsserie ist bereits verfügbar.