

Logik

Vorlesung 9: Normalformen

Andreas Maletti

19. Dezember 2014

Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 Aussagenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- 3 **Prädikatenlogik**
 - Syntax und Semantik
 - **Äquivalenz und Normalformen**
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

heutige Vorlesung

- 1 Ersetzungstheorem
- 2 Negationsnormalform
- 3 Bereinigung von Formeln
- 4 Pränexnormalform
- 5 Skolemform

Bitte Fragen direkt stellen!

Organisation

Ankündigungen

- Punkteübersicht (Hausaufgaben) auf Webseite verfügbar
- Bonuspunkte:
 - 1 Bonuspunkt ab 36 Punkten
 - 2 Bonuspunkte ab 45 Punkten
 - 3 Bonuspunkte ab 54 Punkten

Ankündigungen

- Punkteübersicht (Hausaufgaben) auf Webseite verfügbar
- Bonuspunkte:
 - 1 Bonuspunkt ab 36 Punkten
 - 2 Bonuspunkte ab 45 Punkten
 - 3 Bonuspunkte ab 54 Punkten

Frage

- Tutorium gewünscht?
- Wenn ja, wann?



Wiederholung: Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$



Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$



Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✗

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✓

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✓
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall z \exists y \forall x F$

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✓
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall z \exists y \forall x F$ ✗

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✓
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall z \exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall x \forall z \exists y F$ ✗

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiele

Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig. Sind die folgenden Formeln äquivalent?

- $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y F$ und $\exists x \forall y F$ ✗
- $\forall x \forall x F$ und $\forall x F$ ✓
- $\forall x \exists x F$ und $\forall x F$ ✗
- $\forall x \exists x F$ und $\exists x F$ ✓
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall z \exists y \forall x F$ ✗
- $\forall x \exists y \forall z F$ und $\forall x \forall z \exists y F$ ✗

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\forall xF$	$\exists x\neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \forall
$\neg\exists xF$	$\forall x\neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \exists
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \wedge \forall xG$	Distributivität \forall über \wedge
$\exists x(F \vee G)$	$\exists xF \vee \exists xG$	Distributivität \exists über \vee
$\forall x\forall yF$	$\forall y\forall xF$	Kommutativität von \forall
$\exists x\exists yF$	$\exists y\exists xF$	Kommutativität von \exists
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$

alle klassischen Äquivalenzen der Aussagenlogik

Theorem (Ersetzungstheorem — Prädikatenlogik)

Sei F eine Formel und F' eine Teilformel von F .

Des Weiteren sei G' eine Formel, die äquivalent zu F' ist.

Dann ist F äquivalent zu der Formel, die man aus F erhält, indem man ein Vorkommen der Teilformel F' durch G' ersetzt.

Theorem (Ersetzungstheorem — Prädikatenlogik)

Sei F eine Formel und F' eine Teilformel von F .

Des Weiteren sei G' eine Formel, die äquivalent zu F' ist.

Dann ist F äquivalent zu der Formel, die man aus F erhält, indem man ein Vorkommen der Teilformel F' durch G' ersetzt.

Notizen

- gleicher Wortlaut wie in der Aussagenlogik
- Teilformeln einer Formel der Bauart $F = Qx_i G$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathcal{F}$ sind F selbst und alle Teilformeln von G

Beweis (1/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- 1 Sei $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.

Beweis (1/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ① Sei $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.
- ② Sei $F = \neg F_1$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①

Beweis (1/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- 1 Sei $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.
- 2 Sei $F = \neg F_1$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
 - Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = \neg G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$F^J = (\neg F_1)^J = 1 - F_1^J = 1 - G_1^J = (\neg G_1)^J = G^J$$

und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.

Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Beweis (2/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ③ Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①

Beweis (2/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ③ Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
 - Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$\begin{aligned}F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J\end{aligned}$$

und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.

Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Beweis (2/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

③ Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.

- Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
- Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$\begin{aligned} F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J \end{aligned}$$

und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.

Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

- Das Vorkommen von F' liegt in F_2 . Analog.

Beweis (2/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

③ Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.

- Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
- Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$\begin{aligned}F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J\end{aligned}$$

und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.

Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

- Das Vorkommen von F' liegt in F_2 . Analog.

④ Sei $F = (F_1 \vee F_2)$. Analog zu ③

Beweis (3/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ⑤ Sei $F = \forall x_j F_1$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①

Beweis (3/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ⑤ Sei $F = \forall x_j F_1$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
 - Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = \forall x_j G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei $J = (U, \cdot^J)$ eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$(\forall x_j F_1)^J = 1$$

$$\text{gdw. } F_1^{J[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ für alle } u \in U$$

$$\text{gdw. } G_1^{J[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ für alle } u \in U$$

$$\text{gdw. } (\forall x_j G_1)^J = 1$$

womit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$. Damit ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Beweis (3/3).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ⑤ Sei $F = \forall x_j F_1$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
 - Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = \forall x_j G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei $J = (U, \cdot^J)$ eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$(\forall x_j F_1)^J = 1$$

$$\text{gdw. } F_1^{J[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ für alle } u \in U$$

$$\text{gdw. } G_1^{J[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ für alle } u \in U$$

$$\text{gdw. } (\forall x_j G_1)^J = 1$$

womit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$. Damit ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

- ⑥ Sei $F = \exists x_j F_1$. Analog zu ⑤



Notizen

- wir können also wieder äquivalente Formeln füreinander substituieren
- äquivalente Formeln sind semantisch ununterscheidbar
- äquivalente Formeln haben die gleichen Modelle

Beispiele

Entwickeln Sie eine Formel,

- deren **Modelle mind. 2 Elemente** im Universum haben.
(die Formel muss also Universen mit 1 Element ausschließen)

Beispiele

Entwickeln Sie eine Formel,

- deren **Modelle mind. 2 Elemente** im Universum haben.
(die Formel muss also Universen mit 1 Element ausschließen)

$$P(x) \wedge \neg P(y)$$

Für jedes Modell $I = (U, \cdot^I)$ muss gelten $x^I \in P^I$ und $y^I \notin P^I$. Also $x^I \neq y^I$ und da $x^I \in U$ und $y^I \in U$, hat U mind. 2 Elemente.

Beispiele

Entwickeln Sie eine Formel,

- deren **Modelle mind. 2 Elemente** im Universum haben.
(die Formel muss also Universen mit 1 Element ausschließen)

$$P(x) \wedge \neg P(y)$$

Für jedes Modell $I = (U, \cdot^I)$ muss gelten $x^I \in P^I$ und $y^I \notin P^I$. Also $x^I \neq y^I$ und da $x^I \in U$ und $y^I \in U$, hat U mind. 2 Elemente.

- deren **Modelle höchstens 2 Elemente** im Universum haben.
(die Formel muss größere Universen ausschließen)

Antwort:

- **clever:** $P(a) \wedge \neg P(a)$ unerfüllbar und damit haben alle Modelle höchstens zwei Elemente
- Gibt es auch eine erfüllbare Formel? (siehe Übung)

Definition (Termsubstitution)

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathcal{T}$, definieren wir $\cdot[x_\ell \mapsto t]: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ durch

- $x_\ell[x_\ell \mapsto t] = t$
- $x_i[x_\ell \mapsto t] = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq \ell$
- $f_i^k(t_1, \dots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = f_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \dots, t_k[x_\ell \mapsto t])$
für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

Notizen

- Ersetzung aller (Vorkommen von) x_ℓ durch t
- Beispiel demnächst

Definition (Formelsubstitution)

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathcal{T}$, definieren wir $\cdot[x_\ell \mapsto t]: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ durch

- $R_i^k(t_1, \dots, t_k)[x_\ell \mapsto t] = R_i^k(t_1[x_\ell \mapsto t], \dots, t_k[x_\ell \mapsto t])$
für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $(\neg F)[x_\ell \mapsto t] = \neg(F[x_\ell \mapsto t])$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $(F_1 \circ F_2)[x_\ell \mapsto t] = (F_1[x_\ell \mapsto t] \circ F_2[x_\ell \mapsto t])$
für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $(Qx_\ell F)[x_\ell \mapsto t] = Qx_\ell F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$
(keine Substitution in gebundene Variablen)
- $(Qx_i F)[x_\ell \mapsto t] = Qx_i(F[x_\ell \mapsto t])$
für alle $F \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ mit $i \neq \ell$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Notizen

- Ersetzung aller freien Vorkommen von x_ℓ durch t
- keine Änderung an gebundenen Variablen

Beispiel

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$F = \left(\exists x_0 \neg \underbrace{(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

Beispiel

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$F = \left(\exists x_0 \neg \underbrace{(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

Also ist $F[x_1 \mapsto f_0^1(f_0^0)]$ gleich

$$F = \left(\exists x_0 \neg \underbrace{(R_0^2(x_0, f_0^1(f_0^0)) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

Beispiel

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$F = \left(\exists x_0 \underbrace{\neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

Also ist $F[x_1 \mapsto f_0^1(f_0^0)]$ gleich

$$F = \left(\exists x_0 \underbrace{\neg (R_0^2(x_0, f_0^1(f_0^0)) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

Notizen

- $F[x_i \mapsto t]$ = Substitution in einer Formel **Syntax**
- $I[x_i \mapsto u]$ = Substitution in einer Interpretation **Semantik**

Theorem

Sei $Qx_i F$ eine Formel mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$. Weiterhin sei $j \in \mathbb{N}$, so dass x_j nicht in F vorkommt.

Dann sind $Qx_i F$ und $Qx_j(F[x_i \mapsto x_j])$ äquivalent.

Theorem

Sei $Qx_i F$ eine Formel mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$. Weiterhin sei $j \in \mathbb{N}$, so dass x_j nicht in F vorkommt.

Dann sind $Qx_i F$ und $Qx_j(F[x_i \mapsto x_j])$ äquivalent.

Beweis.

in der Übung □

Theorem

Sei $Qx_i F$ eine Formel mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$. Weiterhin sei $j \in \mathbb{N}$, so dass x_j nicht in F vorkommt.

Dann sind $Qx_i F$ und $Qx_j(F[x_i \mapsto x_j])$ äquivalent.

Beweis.

in der Übung □

Notizen

- gestattet Umbenennung gebundener Variablenvorkommen (zusammen mit Ersetzungstheorem)
- wir können “Mehrfachbelegungen” von Variablen vermeiden

Normalformen

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein **Literal** gdw.

- ① $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$ ist oder positives Literal
- ② $F = \neg R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$ ist negatives Literal

Literale der Form ① bzw. ② heißen **positiv** bzw. **negativ**

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein **Literal** gdw.

- ① $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$ ist oder positives Literal
- ② $F = \neg R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ für $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$ ist negatives Literal

Literale der Form ① bzw. ② heißen **positiv** bzw. **negativ**

Notizen

- entspricht der Def. in der Aussagenlogik
- Literale = Atome und negierte Atome

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in **Negationsnormalform** falls Negationen (\neg) nur in Literalen vorkommen.

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in **Negationsnormalform** falls Negationen (\neg) nur in Literalen vorkommen.

Beispiele

- $\exists x \forall y (R(x) \wedge \neg S(x, y)) \wedge \forall z \neg S(z, b)$
ist in Negationsnormalform
- $\neg \forall x S(x)$ und $\exists x (R(x) \wedge S(a)) \rightarrow S(b)$
sind **nicht** in Negationsnormalform

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Beweis.

- 1 Auflösen der Abkürzungen \rightarrow und \leftrightarrow
- 2 Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\neg F$	F	Involution \neg
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für \wedge
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für \vee
$\neg\forall x F$	$\exists x \neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \forall
$\neg\exists x F$	$\forall x \neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \exists

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Beweis.

- 1 Auflösen der Abkürzungen \rightarrow und \leftrightarrow
- 2 Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\neg F$	F	Involution \neg
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für \wedge
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für \vee
$\neg\forall x F$	$\exists x \neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \forall
$\neg\exists x F$	$\forall x \neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \exists

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Dies terminiert (Argument wie bisher) und nach Ersetzungstheorem ist die erhaltene Formel äquivalent zu F □

Beispiel

äquivalent zu $\exists x(R(x) \wedge S(a)) \rightarrow S(b)$
 $\neg \exists x(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

Beispiel

$$\exists x(R(x) \wedge S(a)) \rightarrow S(b)$$

äquivalent zu $\neg\exists x(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

äquivalent zu $\forall x\neg(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

Beispiel

$$\exists x(R(x) \wedge S(a)) \rightarrow S(b)$$

äquivalent zu $\neg\exists x(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

äquivalent zu $\forall x\neg(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

äquivalent zu $\forall x(\neg R(x) \vee \neg S(a)) \vee S(b)$

Beispiel

$$\exists x(R(x) \wedge S(a)) \rightarrow S(b)$$

äquivalent zu $\neg\exists x(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

äquivalent zu $\forall x\neg(R(x) \wedge S(a)) \vee S(b)$

äquivalent zu $\forall x(\neg R(x) \vee \neg S(a)) \vee S(b)$

und dies ist in Negationsnormalform

Definition

Wir definieren die Funktion $GV: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{V})$ durch
(gebundene Variablen in Formel)

- $GV(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $GV(\neg F) = GV(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $GV(F_1 \circ F_2) = GV(F_1) \cup GV(F_2)$
für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $GV(Qx_i F) = \{x_i\} \cup GV(F)$
für alle $F \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Definition

Wir definieren die Funktion $GV: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{V})$ durch
(gebundene Variablen in Formel)

- $GV(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $GV(\neg F) = GV(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $GV(F_1 \circ F_2) = GV(F_1) \cup GV(F_2)$
für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $GV(Qx_i F) = \{x_i\} \cup GV(F)$
für alle $F \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Notizen

- liefert alle Variablen, die (irgendwo) gebunden werden
- eine Variable kann gleichzeitig gebunden und frei vorkommen

Beispiele

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$F = \left(\exists x_0 \neg \underbrace{(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \underbrace{\left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)}_{x_1}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{x_0}$$

Beispiele

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$F = \left(\exists x_0 \neg \underbrace{(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \underbrace{\left(\underbrace{R_0^2(x_0, x_1)}_{x_1} \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)}_{x_0}$$

- $FV(F) = \{x_0, x_1\}$ und $GV(F) = \{x_0, x_1\}$

Beispiele

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$F = \left(\exists x_0 \underbrace{\neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \underbrace{\left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)}_{x_1}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{x_0}$

- $FV(F) = \{x_0, x_1\}$ und $GV(F) = \{x_0, x_1\}$
- $FV(G) = \emptyset$ und $GV(G) = \{x_0, x_1\}$

Definition

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt **bereinigt**, gdw.

- keine Variable gleichzeitig frei und gebunden in F vorkommt
$$FV(F) \cap GV(F) = \emptyset$$
- und alle Quantoren verschiedene Variablen binden
(hinter verschiedenen Vorkommen der Quantoren $\{\forall, \exists\}$ stehen verschiedene Variablen)

Definition

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt **bereinigt**, gdw.

- keine Variable gleichzeitig frei und gebunden in F vorkommt
$$FV(F) \cap GV(F) = \emptyset$$
- und alle Quantoren verschiedene Variablen binden
(hinter verschiedenen Vorkommen der Quantoren $\{\forall, \exists\}$
stehen verschiedene Variablen)

Beispiele

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

Definition

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt **bereinigt**, gdw.

- keine Variable gleichzeitig frei und gebunden in F vorkommt
$$FV(F) \cap GV(F) = \emptyset$$
- und alle Quantoren verschiedene Variablen binden
(hinter verschiedenen Vorkommen der Quantoren $\{\forall, \exists\}$
stehen verschiedene Variablen)

Beispiele

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

- F ist **nicht** bereinigt denn $FV(F) \cap GV(F) = \{x_0, x_1\}$

Definition

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt **bereinigt**, gdw.

- keine Variable gleichzeitig frei und gebunden in F vorkommt
$$FV(F) \cap GV(F) = \emptyset$$
- und alle Quantoren verschiedene Variablen binden
(hinter verschiedenen Vorkommen der Quantoren $\{\forall, \exists\}$ stehen verschiedene Variablen)

Beispiele

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

- F ist **nicht** bereinigt denn $FV(F) \cap GV(F) = \{x_0, x_1\}$
- G ist bereinigt

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente bereinigte Formel

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente bereinigte Formel

Beweis.

Unter Nutzung des Umbennungs- und Ersetzungstheorems benennen wir schrittweise jedes gebundene Vorkommen einer Variable in x_i mit $x_i \notin \text{Symbole}(F) \cup \text{GV}(F)$ um.

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente bereinigte Formel

Beweis.

Unter Nutzung des Umbennungs- und Ersetzungstheorems benennen wir schrittweise jedes gebundene Vorkommen einer Variable in x_i mit $x_i \notin \text{Symbole}(F) \cup \text{GV}(F)$ um.

Aufgrund des Umbennungs- und des Ersetzungstheorems ist die so erhaltene Formel äquivalent zu F □

Beispiel

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

Beispiel

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- gebundenes x_0 kollidiert mit freiem x_0 ; Umbenennung in x_2

$$F = \left(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_2)) \right)$$

Beispiel

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- gebundenes x_0 kollidiert mit freiem x_0 ; Umbenennung in x_2

$$F = \left(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- gebundenes x_1 kollidiert mit freiem x_1 ; Umbenennung in x_3
(Umbenennung in x_2 würde x_2 doppelt binden)

$$F = \left(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_3 (R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)) \right)$$

Beispiel

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- gebundenes x_0 kollidiert mit freiem x_0 ; Umbenennung in x_2

$$F = \left(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- gebundenes x_1 kollidiert mit freiem x_1 ; Umbenennung in x_3
(Umbenennung in x_2 würde x_2 doppelt binden)

$$F = \left(\exists x_2 \neg (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_3 (R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)) \right)$$

- bereinigte Formel

Pränexform

Notizen

- Übertragung der Normalformen der Aussagenlogik
- konjunktive Normalform für Prädikatenlogik
- Quantoren “im Weg”, aber können mit

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\forall xF$	$\exists x\neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \forall
$\neg\exists xF$	$\forall x\neg F$	DEMORGAN-Gesetz für \exists
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$

vorangestellt werden

- Pränexform

Definition

Eine Formel ist in **Pränexform** gdw. $F = Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \cdots Q_n x_{i_n} G$ mit

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und
- G enthält keine Quantoren

Definition

Eine Formel ist in **Pränexform** gdw. $F = Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \cdots Q_n x_{i_n} G$ mit

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und
- G enthält keine Quantoren

Die Formel ist in **bereinigter Pränexform**

gdw. sie bereinigt und in Pränexform ist.

Definition

Eine Formel ist in **Pränexform** gdw. $F = Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \cdots Q_n x_{i_n} G$ mit

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und
- G enthält keine Quantoren

Die Formel ist in **bereinigter Pränexform**

gdw. sie bereinigt und in Pränexform ist.

Beispiele

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

Definition

Eine Formel ist in **Pränexform** gdw. $F = Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \cdots Q_n x_{i_n} G$ mit

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und
- G enthält keine Quantoren

Die Formel ist in **bereinigter Pränexform**

gdw. sie bereinigt und in Pränexform ist.

Beispiele

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

- F ist **nicht** in Pränexform

Definition

Eine Formel ist in **Pränexform** gdw. $F = Q_1x_{i_1} Q_2x_{i_2} \cdots Q_nx_{i_n} G$ mit

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ und
- G enthält keine Quantoren

Die Formel ist in **bereinigter Pränexform**

gdw. sie bereinigt und in Pränexform ist.

Beispiele

$$F = \left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

$$G = \forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

- F ist **nicht** in Pränexform
- G ist in **bereinigter Pränexform**

Theorem

Für jede Formel existiert eine äquivalente Formel in bereinigter Pränexform

Theorem

Für jede Formel existiert eine äquivalente Formel in bereinigter Pränexform

Ansatz

- 1 Transformation in Negationsnormalform
- 2 Bereinigung (Umbenennung der gebundenen Variablen)
- 3 Anwendung der folgenden Äquivalenzen von rechts nach links

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel G in bereinigter Pränexform

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel G in bereinigter Pränexform

Beweis (1/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ mit $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann ist $G = F$ bereits in bereinigter Pränexform.

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel G in bereinigter Pränexform

Beweis (1/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = R_i^k(t_1, \dots, t_k)$ mit $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$. Dann ist $G = F$ bereits in bereinigter Pränexform.
- Sei $F = \neg F'$ mit $F' \in \mathcal{F}$. Gemäß Induktionsannahme existiert eine Formel G' in bereinigter Pränexform, die äquivalent zu F' ist. Sei $G' = Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G''$, so dass G'' keine Quantoren mehr enthält. Also

$$\begin{aligned} F = \neg F' &\leftrightarrow \neg G' = \neg Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G'' \\ &\leftrightarrow \overline{Q_1} x_{i_1} \cdots \overline{Q_n} x_{i_n} \neg G'' = G \end{aligned}$$

und G ist in bereinigter Pränexform, wobei $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$.

Beweis (2/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = F_1 \circ F_2$ mit $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$. Dann existieren bereinigte Pränexformen $G_1, G_2 \in \mathcal{F}$, so dass F_1 und G_1 sowie F_2 und G_2 äquivalent sind.

Beweis (2/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = F_1 \circ F_2$ mit $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$. Dann existieren bereinigte Pränexformen $G_1, G_2 \in \mathcal{F}$, so dass F_1 und G_1 sowie F_2 und G_2 äquivalent sind.

Seien $G_1 = Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G'_1$ und $G_2 = Q'_1 x_{j_1} \cdots Q'_m x_{j_m} G'_2$, so dass G'_1 und G'_2 keine Quantoren mehr enthalten. Aufgrund des Umbenennungstheorems können wir annehmen, dass

$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \cap (\text{Symbole}(G_2) \cup \text{GV}(G_2)) = \emptyset$ und
 $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\} \cap (\text{Symbole}(G_1) \cup \text{GV}(G_1)) = \emptyset$. Also

$$\begin{aligned} F = F_1 \circ F_2 &\leftrightarrow G_1 \circ G_2 = (Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G'_1) \circ G_2 \\ &\leftrightarrow Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} (G'_1 \circ G_2) \\ &= Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} (G'_1 \circ (Q'_1 x_{j_1} \cdots Q'_m x_{j_m} G'_2)) \\ &\leftrightarrow Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} Q'_1 x_{j_1} \cdots Q'_m x_{j_m} (G'_1 \circ G'_2) = G \end{aligned}$$

und G ist in bereinigter Pränexform.

Beweis (3/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = Qx_i F'$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F' \in \mathcal{F}$. Dann existiert eine Formel G' in bereinigter Pränexform, die äquivalent zu F' ist.

Beweis (3/3).

Wir konstruieren G durch Induktion:

- Sei $F = Qx_i F'$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $F' \in \mathcal{F}$. Dann existiert eine Formel G' in bereinigter Pränexform, die äquivalent zu F' ist.

Sei $G' = Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G''$, so dass G'' keine Quantoren mehr enthält. Aufgrund des Umbenennungstheorems können wir annehmen, dass $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ (d.h. die Formel G' bindet x_i nicht). Also

$$F = Qx_i F' \leftrightarrow Qx_i G' = Qx_i (Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} G'') = G$$

und G ist in bereinigter Pränexform. □

Beispiel

Eingabeformel:

$$\left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

Beispiel

Eingabeformel:

$$\left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

① Negationsnormalform:

$$\left(\forall x_0 (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \vee \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

Beispiel

Eingabeformel:

$$\left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

① Negationsnormalform:

$$\left(\forall x_0 (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \vee \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

② Bereinigung (Umbenennung aller gebundenen Variablen):

$$\left(\forall x_2 (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \vee \forall x_3 (R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)) \right)$$

Beispiel

Eingabeformel:

$$\left(\exists x_0 \neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \rightarrow \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

① Negationsnormalform:

$$\left(\forall x_0 (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0) \vee \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

② Bereinigung (Umbenennung aller gebundenen Variablen):

$$\left(\forall x_2 (R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0) \vee \forall x_3 (R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)) \right)$$

③ Pränexform:

$$\forall x_2 \forall x_3 \left(R_0^2(x_2, x_1) \vee R_0^0 \vee (R_1^2(x_3, x_3) \wedge R_0^2(x_3, x_0)) \right)$$

Skolemform

Motivation

- in Pränexform sind alle Quantoren bereits am Anfang
- nun wollen wir einige Quantoren (Existenzquantoren) eliminieren

Motivation

- in Pränexform sind alle Quantoren bereits am Anfang
- nun wollen wir einige Quantoren (Existenzquantoren) eliminieren

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind **erfüllbarkeitsäquivalent** gdw.

F_1 erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar

Motivation

- in Pränexform sind alle Quantoren bereits am Anfang
- nun wollen wir einige Quantoren (Existenzquantoren) eliminieren

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind **erfüllbarkeitsäquivalent** gdw.

$$F_1 \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad F_2 \text{ erfüllbar}$$

Notizen

- gleiche Definition wie in Aussagenlogik
- $P(x)$ und $P(y)$ sind **nicht** äquivalent, aber erfüllbarkeitsäquivalent

Beobachtung

- $\exists xP(x)$ und $P(a)$ sind erfüllbarkeitsäquivalent

Beobachtung

- $\exists xP(x)$ und $P(a)$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
 - Was heißt $(\forall x\forall y\exists zP(x, y, z))' = 1$?
 - für jedes $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ existiert $u_3 \in U$,
so dass $(u_1, u_2, u_3) \in P'$
 - wir können eine Funktion nutzen,
die uns u_3 aus u_1 und u_2 berechnet
- $\forall x\forall yP(x, y, f(x, y))$

Beobachtung

- $\exists xP(x)$ und $P(a)$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
- Was heißt $(\forall x\forall y\exists zP(x,y,z))' = 1$?
 - für jedes $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ existiert $u_3 \in U$,
so dass $(u_1, u_2, u_3) \in P^I$
 - wir können eine Funktion nutzen,
die uns u_3 aus u_1 und u_2 berechnet
- $\forall x\forall yP(x,y,f(x,y))$
 - durch “richtige” Interpretation von f
ist auch diese Formel erfüllbar
- Erfüllbarkeitsäquivalenz

Beobachtung

- $\exists xP(x)$ und $P(a)$ sind erfüllbarkeitsäquivalent
- Was heißt $(\forall x\forall y\exists zP(x, y, z))' = 1$?
 - für jedes $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ existiert $u_3 \in U$,
so dass $(u_1, u_2, u_3) \in P'$
 - wir können eine Funktion nutzen,
die uns u_3 aus u_1 und u_2 berechnet
 - $\forall x\forall yP(x, y, f(x, y))$
 - durch “richtige” Interpretation von f
ist auch diese Formel erfüllbar
 - Erfüllbarkeitsäquivalenz
- $\forall x\forall y\exists zP(x, y, z)$ und $\forall x\forall yP(x, y, f(x, y))$
sind erfüllbarkeitsäquivalent

SKOLEM-Transformation

Sei F eine Formel in bereinigter Pränexform.

- 1 falls F keinen Existenzquantor enthält, **liefere** F
- 2 sei $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} \exists x_j G$ für G in bereinigter Pränexform und $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0$ zulässig und G kann Quantoren enthalten)
- 3 sei $f_j^n \notin \text{Symbole}(F)$ ein neues n -stelliges Funktionssymbol
- 4 setze $F \leftarrow \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G[x_j \mapsto f_j^n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})]$ und zu 1
(entferne Existenzquantor und ersetze x_j durch $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$)

Terminiert und jedes Resultat heißt **Skolemform von F** .

SKOLEM-Transformation

Sei F eine Formel in bereinigter Pränexform.

- 1 falls F keinen Existenzquantor enthält, **liefere** F
- 2 sei $F = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} \exists x_j G$ für G in bereinigter Pränexform und $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0$ zulässig und G kann Quantoren enthalten)
- 3 sei $f_j^n \notin \text{Symbole}(F)$ ein neues n -stelliges Funktionssymbol
- 4 setze $F \leftarrow \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} G[x_j \mapsto f_j^n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})]$ und zu 1
(entferne Existenzquantor und ersetze x_j durch $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$)

Terminiert und jedes Resultat heißt **Skolemform von F** .

THORALF ALBERT SKOLEM (* 1887; † 1963)

- norw. Mathematiker und Logiker
- Doktorvater (AXEL THUE) bei Einreichung der Dissertation schon 4 Jahre tot
- lehnte überabzählbare Mengen ab



Beispiel

- Formel in bereinigter Pränexform

$$\forall x \exists y \exists z \left(P(x, f(y, y), z) \wedge \neg R(y, g(x)) \right)$$

Beispiel

- Formel in bereinigter Pränexform

$$\forall x \exists y \exists z \left(P(x, f(y, y), z) \wedge \neg R(y, g(x)) \right)$$

- nach 1. Schleifendurchlauf

$$\forall x \exists z \left(P(x, f(g'(x), g'(x)), z) \wedge \neg R(g'(x), g(x)) \right)$$

Beispiel

- Formel in bereinigter Pränexform

$$\forall x \exists y \exists z \left(P(x, f(y, y), z) \wedge \neg R(y, g(x)) \right)$$

- nach 1. Schleifendurchlauf

$$\forall x \exists z \left(P(x, f(g'(x), g'(x)), z) \wedge \neg R(g'(x), g(x)) \right)$$

- nach 2. Schleifendurchlauf

$$\forall x \left(P(x, f(g'(x), g'(x)), g''(x)) \wedge \neg R(g'(x), g(x)) \right)$$

Beispiel

- Ausgangsformel in bereinigter Pränexform:

$$\forall x \exists y \forall z (\neg P(x, y, z) \vee Q(x, y, z, y))$$

Beispiel

- Ausgangsformel in bereinigter Pränexform:

$$\forall x \exists t \forall (t, \diamond(t, \diamond(t, \star, t), t), t)$$

- Skolemform:

$$\forall x \forall (f(x), \diamond(f(x), \diamond(f(x), \star, f(x)), f(x)), f(x))$$

Beispiel

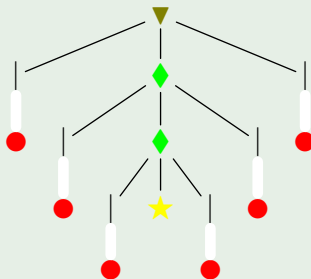
- Ausgangsformel in bereinigter Pränexform:

$$\forall x \exists t \forall (f, g(t, g(t, h(x, t), t), t))$$

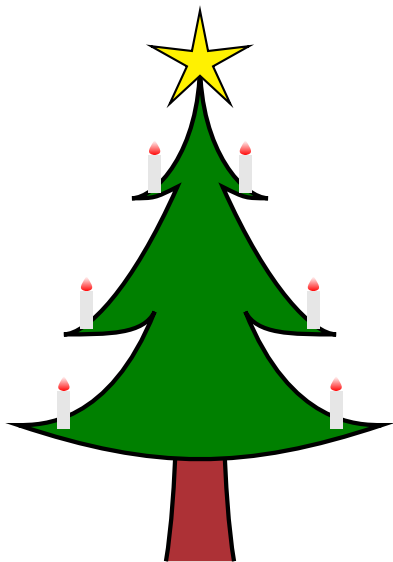
- Skolemform:

$$\forall x \forall (f(|x|), g(|x|, g(|x|, h(x, |x|), |x|), |x|))$$

- Illustration:



Frohe Weihnachten!



- Ersetzungstheorem
- Negationsnormalform
- Bereinigung von Formeln
- Pränexnormalform
- Skolemform

Fünfte Übungsserie ist bereits verfügbar.