# Logik
# Vorlesung 8: Modelle und Äquivalenz

Andreas Maletti

12. Dezember 2014

# Überblick

## Inhalt

# Vorlesungsziele

**heutige Vorlesung**

1. Tautologien und Erfüllbarkeit
2. Modellkonstruktion
3. Äquivalenz und klassische Äquivalenzen

Bitte Fragen direkt stellen!

# Überblick

Organisation

# Organisation

## Prüfung

- am **17.02.2015** um 13 Uhr im HS 3
- Abmeldung noch bis 25.01.2015 über TOOL möglich
- einmaliges Tutorium gewünscht?

Wiederholung: Syntax und Semantik

## Inhalt

# Prädikatenlogik — Wiederholung

## Definition (Terme)

Menge $\mathcal{T}$ der Terme ist kleinste Menge, so dass

- $x_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (alle Variablen sind Terme)
- $f_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{T}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
  (Funktionssymbol angewandt auf Terme liefert Term)

## Definition (Formeln)

Menge $\mathcal{F}$ der Formeln ist kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
  (Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
- $\{\neg F_1, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2)\} \subseteq \mathcal{F}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
  (Negation, Konjunktion und Disjunktion)
- $\forall x_i F \in \mathcal{F}$ und $\exists x_i F \in \mathcal{F}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$
  (All- und Existenzquantifikation von $x_i$ in Formel ist Formel)

### Anmerkungen

- Statt $I(F)$ mit $F \in \mathcal{F}$ schreiben wir wieder $F^I$
- Interpretation einer Formel liefert Wahrheitswert
  (vgl. Interpretation eines Terms ist Element des Universums)
- neue Fälle: Relation und Quantoren

# Prädikatenlogik — Wiederholung

## Definition (Interpretation)

Interpretation ist Struktur $(U, \cdot^I)$, so dass

- $U \neq \emptyset$ (Universum nicht leer)
- $(x_i)^I \in U$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $(f_i^k)^I \colon U^k \to U$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I \subseteq U^k$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$

## Definition (Terminterpretation)

Seien $t \in \mathcal{T}$ ein Term und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation

- $(x_i)^I = x_i^I$ für alle $i \in \mathbb{N}$
  (der Term $x_i$ wird mit dem Wert der Variablen $x_i$ belegt)
- $(f_i^k(t_1, \ldots, t_k))^I = (f_i^k)^I(t_1^I, \ldots, t_k^I)$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

# Prädikatenlogik — Wiederholung

## Definition (Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation

- $\left(R_i^k(t_1, \ldots, t_k)\right)^I = 1$ gdw. $(t_1^I, \ldots, t_k^I) \in (R_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
- $(\neg F)^I = 1 - F^I$ für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$
- $(F_1 \wedge F_2)^I = \min(F_1^I, F_2^I)$ für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $(F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I)$ für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $(\forall x_i F)^I = \min_{u \in U} F^{I[x_i \mapsto u]}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$
- $(\exists x_i F)^I = \max_{u \in U} F^{I[x_i \mapsto u]}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$

# Prädikatenlogik — Wiederholung

## Interpretation

$$F = \Big(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

- Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid k < m\}$

## Berechnung

$F^I = 1$ gdw.

- $\big(R_0^1(x_0)\big)^I = 1$ gdw. $x_0^I \in (R_0^1)^I$ gdw. 7 prim ist und ✓
- $\big(\exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\big)^I = 1$ gdw.
  $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw.
  - $\big(R_0^1(x_1)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $x_1^{I[x_1 \mapsto n]} \in (R_0^1)^{I[x_1 \mapsto n]}$ gdw. $n$ prim
    $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]} = n)$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓
  - $\big(R_0^2(x_1, x_0)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}, x_0^{I[x_1 \mapsto n]}) \in (R_0^2)^{I[x_1 \mapsto n]}$
    $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}, x_0^{I[x_1 \mapsto n]}) = (n, 7) \in (R_0^2)^I$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓

Modelle und Erfüllbarkeit

# Prädikatenlogik — Modelle

## Notizen

- Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ ist unter einer Interpretation $I = (U, \cdot^I)$ entweder wahr ($F^I = 1$) oder falsch ($F^I = 0$)
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus
  - Belegung der Variablen
  - Interpretation der Funktions- und Relationssymbole

## Definition (Modell, Widerlegung)

Sei $F$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation

- $I$ ist ein Modell für $F$ gdw. $F^I = 1$ kurz: $I \models F$
- $I$ ist eine Widerlegung für $F$ gdw. $F^I = 0$ kurz: $I \not\models F$

# Prädikatenlogik — Tautologien

**Definition**

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ ist

- eine Tautologie oder allgemeingültig,
  gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen $I = (U, \cdot^I)$
  (d.h. immer wahr; unabh. von Interpretation der Symbole)
- unerfüllbar, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen $I = (U, \cdot^I)$
  (d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Symbole)
- erfüllbar, gdw. $I \models F$ für eine Interpretation $I = (U, \cdot^I)$
- widerlegbar, gdw. $I \not\models F$ für eine Interpretation $I = (U, \cdot^I)$

# Prädikatenlogik — Tautologien

## Problem

- Wie führt man den Tautologie-Nachweis?
- er wären wieder unendlich viele Interpretationen zu prüfen
- funktioniert eine Reduktion wie in der Aussagenlogik?
- wir sammeln zunächst die verwendeten Symbole auf

## Definition

Wir definieren $\mathrm{Funk}\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Pow}\big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k\big)$ durch

(in Termen vorkommende Funktionssymbole)

- $\mathrm{Funk}(x_i) = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $\mathrm{Funk}(f_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \{f_i^k\} \cup \mathrm{Funk}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{Funk}(t_k)$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

# Prädikatenlogik — Tautologien

## Definition

Wir definieren Symbole: $\mathcal{F} \to \mathrm{Pow}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^k \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}^k \cup \mathcal{V}\right)$ durch (in Formeln vorkommende Symbole)

- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

  $$\mathrm{Symbole}(R_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = \{R_i^k\} \cup \bigcup_{1\le i\le k} \Big(\mathrm{Funk}(t_i) \cup \mathrm{Var}(t_i)\Big)$$

- $\mathrm{Symbole}(\neg F) = \mathrm{Symbole}(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $\mathrm{Symbole}(F_1 \circ F_2) = \mathrm{Symbole}(F_1) \cup \mathrm{Symbole}(F_2)$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $\mathrm{Symbole}(Qx_i F) = \mathrm{Symbole}(F) \setminus \{x_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{F}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

# Prädikatenlogik — Tautologien

## Beispiele

- Symbole$(F_1) = \{R_0^2,\ f_0^0,\ f_1^0\}$ (enthält $x_0$ nicht)

$$F_1 = \forall x_0 \Big( R_0^2(x_0, f_0^0) \rightarrow R_0^2(x_0, f_1^0) \Big)$$

- Symbole$(F_2) = \{R_0^2,\ R_0^1\}$ (enthält weder $x_0$ noch $x_1$)

$$F_2 = \forall x_0 \forall x_1 \Big( R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow \big(R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)\big) \Big)$$

- Symbole$(F_3) = \{R_0^1,\ x_0,\ R_0^2,\ f_0^1\}$ (enthält $x_0$)

$$F_3 = \Big( R_0^1(x_0) \wedge \forall x_1 \big(R_0^1(x_1) \rightarrow \neg R_0^2(x_0, f_0^1(x_1))\big) \Big)$$

# Prädikatenlogik — Tautologien

## Theorem

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ und $J = (U, \cdot^J)$ Interpretationen, so dass $s^I = s^J$ für alle $s \in \text{Symbole}(F)$.
Dann gilt $F^I = F^J$.

## Beweis.

in der Übung $\square$

## Notizen

- Interpretationen mit gleichem Universum, die auf allen Formel-relevanten Symbolen übereinstimmen, liefern gleichen Wahrheitswert
- immer noch unendlich viele verschiedene Universen möglich (auch unendliche Universen)
- ein Modell liefert hiermit kein endliches Modell

# Prädikatenlogik — Tautologien

## Notizen

- Finden von Modellen / Widerlegungen schwieriger
- keine Allzweckwaffe wie Wahrheitswertetabelle

## Beispiel

- $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \leftrightarrow \big(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\big)$ ist widerlegbar
  - $I = (\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit
  - $P^I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ gerade}\}$ und
  - $Q^I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ ungerade}\}$

  Dann $\Big(\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)\Big)^I = 0$, aber $\big(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\big)^I = 1$
- $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \leftrightarrow \big(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\big)$ ist Tautologie
  Beweis: Sei $I = (U, \cdot^I)$ Interpretation. Wenn $\Big(\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)\Big)^I$ wahr ist, dann ist $u \in P^I$ und $u \in Q^I$ für alle $u \in U$. Also ist dann auch $\big(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\big)^I$ wahr.
  Umgekehrt gilt dies auch $\rightarrow$ Tautologie

Modellkonstruktion

# Prädikatenlogik — Modelle

## Watson-Supercomputer

- spielte 2011 gegen die Jeopardy!-Großmeister und gewann
- Finalantwort der Kategorie "Städte der USA":

  *Ihr größter Flughafen ist nach einem Helden des 2. Weltkriegs benannt; ihr zweitgrößter nach einem Gefecht des 2. Weltkriegs.*
- Watson antwortete "Was ist Toronto?"
  (Pearson Int. Airport; Region of Waterloo Int. Airport)
- richtig war: "Was ist Chicago?"
  (O'Hare Int. Airport; Midway Int. Airport)

## Formalisierung

$$\exists x \Big( \text{US-Stadt}(x) \land \exists y \exists z \big( \text{Flughafen}(x, 1, y) \land \text{Flughafen}(x, 2, z) \land \\ \exists u \exists v \big( \text{Benannt}(y, u) \land \text{Benannt}(z, v) \land \text{Kriegsheld}(u) \land \text{Schlacht}(v) \big) \big) \Big)$$

# Prädikatenlogik — Modelle

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists x P(a)$ — Modell gdw. $a^I \in P^I$
  erfüllbar; keine Tautologie
- $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$ — wähle $x^I = a^I$
  Tautologie
- $\exists x \big(P(a) \vee \neg P(f(x))\big)$ — Modell: $a^I \in P^I$
  erfüllbar; keine Tautologie
- $\exists x \big(P(a) \vee \neg P(x)\big)$ — wähle $x^I = a^I$
  Tautologie
- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ — wähle $x^I$ beliebig
  Tautologie
- $\forall x \neg P(x) \wedge \exists y P(f(y, y))$ — da $f(y, y)^I \in U$ und $P^I = \emptyset$
  unerfüllbar

# Prädikatenlogik — Modelle

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) hat diese Formel?

$$\begin{aligned}&\forall x R(x,x) \wedge \\ &\forall x \forall y \Big( R(x,y) \rightarrow R(y,x) \Big) \wedge \\ &\forall x \forall y \forall z \Big( (R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z) \Big) \wedge \\ &\forall x \forall y \Big( R(x,y) \vee R(y,x) \Big)\end{aligned}$$

In jedem Modell muss $R$ also eine lineare Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv, linear) sein. Gibt es lineare Äquivalenzrelationen? ✓

Erfüllbar für $R^I = U \times U$.

Äquivalenz

# Prädikatenlogik — Äquivalenz

## Definition

Zwei Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sind äquivalent gdw.
$F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

## Beispiele

- $\exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ und $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ nicht äquivalent
- $\forall x \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ und $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ äquivalent
- $P(x)$ und $P(y)$ sind nicht äquivalent

# Prädikatenlogik — Äquivalenz

| äquivalente Formeln | | Bezeichnung |
|---|---|---|
| $\neg\forall xF$ | $\exists x\neg F$ | deMorgan-Gesetz für $\forall$ |
| $\neg\exists xF$ | $\forall x\neg F$ | deMorgan-Gesetz für $\exists$ |
| $\forall x(F \wedge G)$ | $\forall xF \wedge \forall xG$ | Distributivität $\forall$ über $\wedge$ |
| $\exists x(F \vee G)$ | $\exists xF \vee \exists xG$ | Distributivität $\exists$ über $\vee$ |
| $\forall x\forall yF$ | $\forall y\forall xF$ | Kommutativität von $\forall$ |
| $\exists x\exists yF$ | $\exists y\exists xF$ | Kommutativität von $\exists$ |
| $\forall x(F \wedge G)$ | $\forall xF \wedge G$ | falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$ |
| $\forall x(F \vee G)$ | $\forall xF \vee G$ | falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$ |
| $\exists x(F \wedge G)$ | $\exists xF \wedge G$ | falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$ |
| $\exists x(F \vee G)$ | $\exists xF \vee G$ | falls $x \notin \mathrm{FV}(G)$ |
| **alle klassischen Äquivalenzen der Aussagenlogik** | | |

# Prädikatenlogik — Äquivalenz

**Theorem**

Für alle Formeln $F, G \in \mathcal{F}$ und $i \in \mathbb{N}$, so dass $x_i \notin \mathrm{FV}(G)$ sind $\exists x_i(F \wedge G)$ und $\exists x_i F \wedge G$ äquivalent

**Beweis.**

Sei $I = (U, \cdot^I)$ eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \big(\exists x_i(F \wedge G)\big)^I = 1 \\
\text{gdw. } & u \in U \text{ existiert, so dass } (F \wedge G)^{I[x_i \mapsto u]} = 1 \\
\text{gdw. } & u \in U \text{ existiert, so dass } F^{I[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ und } G^{I[x_i \mapsto u]} = 1 \\
\text{gdw. } & u \in U \text{ existiert, so dass } F^{I[x_i \mapsto u]} = 1 \text{ und } G^I = 1 \\
\text{gdw. } & (\exists x_i F)^I = 1 \text{ und } G^I = 1 \\
\text{gdw. } & \big(\exists x_i F \wedge G\big)^I = 1
\end{aligned}
$$

□

# Zusammenfassung

- Modelle und Widerlegungen
- Modellkonstruktion
- Äquivalenz und klassische Äquivalenzen

Fünfte Übungsserie ist bereits verfügbar.