

Logik  
Vorlesung 8: Modelle und Äquivalenz

Andreas Maletti

12. Dezember 2014

## Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Äquivalenz und Normalformen
  - Weitere Eigenschaften
  - Resolution
- 3 Prädikatenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Äquivalenz und Normalformen
  - HERBRAND-Theorie
  - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

## heutige Vorlesung

- 1 Tautologien und Erfüllbarkeit
- 2 Modellkonstruktion
- 3 Äquivalenz und klassische Äquivalenzen

Bitte Fragen direkt stellen!

Organisation

## Prüfung

- am **17.02.2015** um 13 Uhr im HS 3
- Abmeldung noch bis 25.01.2015 über TOOL möglich
- einmaliges Tutorium gewünscht?

Wiederholung: Syntax und Semantik

## Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Äquivalenz und Normalformen
  - Weitere Eigenschaften
  - Resolution
- 3 **Prädikatenlogik**
  - **Syntax und Semantik**
  - Äquivalenz und Normalformen
  - HERBRAND-Theorie
  - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

## Definition (Terme)

Menge  $\mathcal{T}$  der **Terme** ist kleinste Menge, so dass

- $x_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  (alle Variablen sind Terme)
- $f_i^k(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}$  für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$   
(Funktionssymbol angewandt auf Terme liefert Term)

## Definition (Formeln)

Menge  $\mathcal{F}$  der **Formeln** ist kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{F}$  für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$   
(Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
- $\{\neg F_1, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2)\} \subseteq \mathcal{F}$  für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$   
(Negation, Konjunktion und Disjunktion)
- $\forall x_i F \in \mathcal{F}$  und  $\exists x_i F \in \mathcal{F}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und  $F \in \mathcal{F}$   
(All- und Existenzquantifikation von  $x_i$  in Formel ist Formel)

## Anmerkungen

- Statt  $I(F)$  mit  $F \in \mathcal{F}$  schreiben wir wieder  $F'$

## Anmerkungen

- Statt  $I(F)$  mit  $F \in \mathcal{F}$  schreiben wir wieder  $F^I$
- Interpretation einer Formel liefert Wahrheitswert  
(vgl. Interpretation eines Terms ist Element des Universums)
- neue Fälle: Relation und Quantoren

## Definition (Interpretation)

**Interpretation** ist Struktur  $(U, \cdot^I)$ , so dass

- $U \neq \emptyset$  (Universum nicht leer)
- $(x_i)^I \in U$  für alle  $i \in \mathbb{N}$
- $(f_i^k)^I: U^k \rightarrow U$  für alle  $i, k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I \subseteq U^k$  für alle  $i, k \in \mathbb{N}$

## Definition (Termininterpretation)

Seien  $t \in \mathcal{T}$  ein Term und  $I = (U, \cdot^I)$  eine Interpretation

- $(x_i)^I = x_i^I$  für alle  $i \in \mathbb{N}$   
(der Term  $x_i$  wird mit dem Wert der Variablen  $x_i$  belegt)
- $(f_i^k(t_1, \dots, t_k))^I = (f_i^k)^I(t_1^I, \dots, t_k^I)$   
für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

## Definition (Formelinterpretation)

Seien  $F \in \mathcal{F}$  eine Formel und  $I = (U, \cdot^I)$  eine Interpretation

- $(R_i^k(t_1, \dots, t_k))^I = 1$  gdw.  $(t_1^I, \dots, t_k^I) \in (R_i^k)^I$   
für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $(\neg F)^I = 1 - F^I$  für alle Formeln  $F \in \mathcal{F}$
- $(F_1 \wedge F_2)^I = \min(F_1^I, F_2^I)$  für alle Formeln  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $(F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I)$  für alle Formeln  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $(\forall x_i F)^I = \min_{u \in U} F^I[x_i \mapsto u]$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und Formeln  $F \in \mathcal{F}$
- $(\exists x_i F)^I = \max_{u \in U} F^I[x_i \mapsto u]$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und Formeln  $F \in \mathcal{F}$

## Interpretation

$$F = \left( R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- Interpretation  $(\mathbb{N}, \cdot')$  mit  $x_0' = 7$
- $(R_0^1)' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ prim}\}$  und  $(R_0^2)' = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid k < m\}$

## Interpretation

$$F = \left( R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- Interpretation  $(\mathbb{N}, \cdot')$  mit  $x_0' = 7$
- $(R_0^1)' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ prim}\}$  und  $(R_0^2)' = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid k < m\}$

## Berechnung

$F' = 1$  gdw.

- $(R_0^1(x_0))' = 1$  gdw.  $x_0' \in (R_0^1)'$  gdw. 7 prim ist und 

## Interpretation

$$F = \left( R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- Interpretation  $(\mathbb{N}, \cdot')$  mit  $x_0' = 7$
- $(R_0^1)' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ prim}\}$  und  $(R_0^2)' = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid k < m\}$

## Berechnung

$F' = 1$  gdw.

- $(R_0^1(x_0))' = 1$  gdw.  $x_0' \in (R_0^1)'$  gdw. 7 prim ist und ✓
- $(\exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)))' = 1$  gdw.  
 $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))'^{[x_1 \mapsto n]} = 1$  gdw.

## Interpretation

$$F = \left( R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- Interpretation  $(\mathbb{N}, \cdot')$  mit  $x_0' = 7$
- $(R_0^1)' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ prim}\}$  und  $(R_0^2)' = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid k < m\}$

## Berechnung

$F' = 1$  gdw.

- $(R_0^1(x_0))' = 1$  gdw.  $x_0' \in (R_0^1)'$  gdw. 7 prim ist und ✓
- $(\exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)))' = 1$  gdw.  
 $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))'^{[x_1 \mapsto n]} = 1$  gdw.
  - $(R_0^1(x_1))'^{[x_1 \mapsto n]} = 1$  gdw.  $x_1'^{[x_1 \mapsto n]} \in (R_0^1)'^{[x_1 \mapsto n]}$  gdw.  $n$  prim  
 $(x_1'^{[x_1 \mapsto n]} = n)$  z.B. wahr für  $n = 2$  ✓

## Interpretation

$$F = \left( R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- Interpretation  $(\mathbb{N}, \cdot')$  mit  $x_0' = 7$
- $(R_0^1)' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ prim}\}$  und  $(R_0^2)' = \{(k, m) \in \mathbb{N}^2 \mid k < m\}$

## Berechnung

$F' = 1$  gdw.

- $(R_0^1(x_0))' = 1$  gdw.  $x_0' \in (R_0^1)'$  gdw. 7 prim ist und ✓
- $(\exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)))' = 1$  gdw.

$n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))'^{[x_1 \mapsto n]} = 1$  gdw.

- $(R_0^1(x_1))'^{[x_1 \mapsto n]} = 1$  gdw.  $x_1'^{[x_1 \mapsto n]} \in (R_0^1)'^{[x_1 \mapsto n]}$  gdw.  $n$  prim  
 $(x_1'^{[x_1 \mapsto n]} = n)$  z.B. wahr für  $n = 2$  ✓
- $(R_0^2(x_1, x_0))'^{[x_1 \mapsto n]} = 1$  gdw.  $(x_1'^{[x_1 \mapsto n]}, x_0'^{[x_1 \mapsto n]}) \in (R_0^2)'^{[x_1 \mapsto n]}$   
 $(x_1'^{[x_1 \mapsto n]}, x_0'^{[x_1 \mapsto n]}) = (n, 7) \in (R_0^2)'$  z.B. wahr für  $n = 2$  ✓

Modelle und Erfüllbarkeit

## Notizen

- Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist unter einer Interpretation  $I = (U, \cdot^I)$  entweder **wahr** ( $F^I = 1$ ) oder **falsch** ( $F^I = 0$ )
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus
  - Belegung der Variablen
  - Interpretation der Funktions- und Relationssymbole

## Notizen

- Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist unter einer Interpretation  $I = (U, \cdot^I)$  entweder **wahr** ( $F^I = 1$ ) oder **falsch** ( $F^I = 0$ )
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus
  - Belegung der Variablen
  - Interpretation der Funktions- und Relationssymbole

## Definition (Modell, Widerlegung)

Sei  $F$  eine Formel und  $I = (U, \cdot^I)$  eine Interpretation

- $I$  ist ein **Modell** für  $F$  gdw.  $F^I = 1$  kurz:  $I \models F$

## Notizen

- Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist unter einer Interpretation  $I = (U, \cdot^I)$  entweder **wahr** ( $F^I = 1$ ) oder **falsch** ( $F^I = 0$ )
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus
  - Belegung der Variablen
  - Interpretation der Funktions- und Relationssymbole

## Definition (Modell, Widerlegung)

Sei  $F$  eine Formel und  $I = (U, \cdot^I)$  eine Interpretation

- $I$  ist ein **Modell** für  $F$  gdw.  $F^I = 1$  kurz:  $I \models F$
- $I$  ist eine **Widerlegung** für  $F$  gdw.  $F^I = 0$  kurz:  $I \not\models F$

## Definition

Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,  
gdw.  $I \models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer wahr; unabh. von Interpretation der Symbole)

## Definition

Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,  
gdw.  $I \models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer wahr; unabh. von Interpretation der Symbole)
- **unerfüllbar**, gdw.  $I \not\models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Symbole)

## Definition

Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,  
gdw.  $I \models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer wahr; unabh. von Interpretation der Symbole)
- **unerfüllbar**, gdw.  $I \not\models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Symbole)
- **erfüllbar**, gdw.  $I \models F$  für eine Interpretation  $I = (U, \cdot^I)$

## Definition

Eine Formel  $F \in \mathcal{F}$  ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,  
gdw.  $I \models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer wahr; unabh. von Interpretation der Symbole)
- **unerfüllbar**, gdw.  $I \not\models F$  für alle Interpretationen  $I = (U, \cdot^I)$   
(d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Symbole)
- **erfüllbar**, gdw.  $I \models F$  für eine Interpretation  $I = (U, \cdot^I)$
- **widerlegbar**, gdw.  $I \not\models F$  für eine Interpretation  $I = (U, \cdot^I)$

## Problem

- Wie führt man den Tautologie-Nachweis?
- es wären wieder unendlich viele Interpretationen zu prüfen

## Problem

- Wie führt man den Tautologie-Nachweis?
- es wären wieder unendlich viele Interpretationen zu prüfen
- funktioniert eine Reduktion wie in der Aussagenlogik?
- wir sammeln zunächst die verwendeten Symbole auf

## Problem

- Wie führt man den Tautologie-Nachweis?
- er wären wieder unendlich viele Interpretationen zu prüfen
- funktioniert eine Reduktion wie in der Aussagenlogik?
- wir sammeln zunächst die verwendeten Symbole auf

## Definition

Wir definieren  $\text{Funk}: \mathcal{T} \rightarrow \text{Pow}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k)$  durch  
(in Termen vorkommende Funktionssymbole)

- $\text{Funk}(x_i) = \emptyset$  für alle  $i \in \mathbb{N}$
- $\text{Funk}(f_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \{f_i^k\} \cup \text{Funk}(t_1) \cup \dots \cup \text{Funk}(t_k)$   
für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

## Definition

Wir definieren **Symbole**:  $\mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^k \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k \cup \mathcal{V})$   
durch (in Formeln vorkommende Symbole)

- für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

$$\text{Symbole}(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \{R_i^k\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\text{Funk}(t_i) \cup \text{Var}(t_i))$$

## Definition

Wir definieren **Symbole**:  $\mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^k \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k \cup \mathcal{V})$   
durch (in Formeln vorkommende Symbole)

- für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

$$\text{Symbole}(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \{R_i^k\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\text{Funk}(t_i) \cup \text{Var}(t_i))$$

- $\text{Symbole}(\neg F) = \text{Symbole}(F)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$
- $\text{Symbole}(F_1 \circ F_2) = \text{Symbole}(F_1) \cup \text{Symbole}(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  und  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$

## Definition

Wir definieren **Symbole**:  $\mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^k \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k \cup \mathcal{V})$   
durch (in Formeln vorkommende Symbole)

- für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

$$\text{Symbole}(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \{R_i^k\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\text{Funk}(t_i) \cup \text{Var}(t_i))$$

- $\text{Symbole}(\neg F) = \text{Symbole}(F)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$
- $\text{Symbole}(F_1 \circ F_2) = \text{Symbole}(F_1) \cup \text{Symbole}(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  und  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $\text{Symbole}(Qx_i F) = \text{Symbole}(F) \setminus \{x_i\}$   
für alle  $i \in \mathbb{N}$ ,  $F \in \mathcal{F}$  und  $Q \in \{\forall, \exists\}$

## Beispiele

- $\text{Symbole}(F_1) = \{R_0^2, f_0^0, f_1^0\}$  (enthält  $x_0$  nicht)

$$F_1 = \forall x_0 \left( R_0^2(x_0, f_0^0) \rightarrow R_0^2(x_0, f_1^0) \right)$$

## Beispiele

- $\text{Symbole}(F_1) = \{R_0^2, f_0^0, f_1^0\}$  (enthält  $x_0$  nicht)

$$F_1 = \forall x_0 \left( R_0^2(x_0, f_0^0) \rightarrow R_0^2(x_0, f_1^0) \right)$$

- $\text{Symbole}(F_2) = \{R_0^2, R_0^1\}$  (enthält weder  $x_0$  noch  $x_1$ )

$$F_2 = \forall x_0 \forall x_1 \left( R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

## Beispiele

- $\text{Symbole}(F_1) = \{R_0^2, f_0^0, f_1^0\}$  (enthält  $x_0$  nicht)

$$F_1 = \forall x_0 (R_0^2(x_0, f_0^0) \rightarrow R_0^2(x_0, f_1^0))$$

- $\text{Symbole}(F_2) = \{R_0^2, R_0^1\}$  (enthält weder  $x_0$  noch  $x_1$ )

$$F_2 = \forall x_0 \forall x_1 (R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)))$$

- $\text{Symbole}(F_3) = \{R_0^1, x_0, R_0^2, f_0^1\}$  (enthält  $x_0$ )

$$F_3 = (R_0^1(x_0) \wedge \forall x_1 (R_0^1(x_1) \rightarrow \neg R_0^2(x_0, f_0^1(x_1))))$$

## Theorem

Seien  $F \in \mathcal{F}$  eine Formel und  $I = (U, \cdot^I)$  und  $J = (U, \cdot^J)$  Interpretationen, so dass  $s^I = s^J$  für alle  $s \in \text{Symbole}(F)$ .  
Dann gilt  $F^I = F^J$ .

## Theorem

Seien  $F \in \mathcal{F}$  eine Formel und  $I = (U, \cdot^I)$  und  $J = (U, \cdot^J)$  Interpretationen, so dass  $s^I = s^J$  für alle  $s \in \text{Symbole}(F)$ .  
Dann gilt  $F^I = F^J$ .

## Beweis.

in der Übung □

## Theorem

Seien  $F \in \mathcal{F}$  eine Formel und  $I = (U, \cdot^I)$  und  $J = (U, \cdot^J)$  Interpretationen, so dass  $s^I = s^J$  für alle  $s \in \text{Symbole}(F)$ .  
Dann gilt  $F^I = F^J$ .

## Beweis.

in der Übung □

## Notizen

- Interpretationen mit gleichem Universum, die auf allen Formel-relevanten Symbolen übereinstimmen, liefern gleichen Wahrheitswert
- immer noch unendlich viele verschiedene Universen möglich  
(auch unendliche Universen)
- ein Modell liefert hiermit **kein** endliches Modell

## Notizen

- Finden von Modellen / Widerlegungen schwieriger
- keine Allzweckwaffe wie Wahrheitstabelle

## Beispiel

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$  ist widerlegbar
  - $I = (\mathbb{N}, \cdot')$  mit
  - $P^I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ gerade}\}$  und
  - $Q^I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ ungerade}\}$

Dann  $(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))^I = 0$ , aber  $(\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))^I = 1$

## Notizen

- Finden von Modellen / Widerlegungen schwieriger
- keine Allzweckwaffe wie Wahrheitstabelle

## Beispiel

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$  ist widerlegbar
  - $I = (\mathbb{N}, \cdot^I)$  mit
  - $P^I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ gerade}\}$  und
  - $Q^I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ ungerade}\}$

Dann  $(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))^I = 0$ , aber  $(\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))^I = 1$

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x))$  ist Tautologie

**Beweis:** Sei  $I = (U, \cdot^I)$  Interpretation. Wenn

$(\forall x(P(x) \wedge Q(x)))^I$  wahr ist, dann ist  $u \in P^I$  und  $u \in Q^I$  für alle  $u \in U$ . Also ist dann auch  $(\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x))^I$  wahr.

Umgekehrt gilt dies auch  $\rightarrow$  Tautologie

Modellkonstruktion

## WATSON-Supercomputer

- spielte 2011 gegen die JEOPARDY!-Großmeister und **gewann**
- Finalantwort der Kategorie “Städte der USA”:

*Ihr größter Flughafen ist nach einem Helden des 2. Weltkriegs benannt;  
ihr zweitgrößter nach einem Gefecht des 2. Weltkriegs.*

## WATSON-Supercomputer

- spielte 2011 gegen die JEOPARDY!-Großmeister und **gewann**
- Finalantwort der Kategorie “Städte der USA”:

*Ihr größter Flughafen ist nach einem Helden des 2. Weltkriegs benannt;  
ihr zweitgrößter nach einem Gefecht des 2. Weltkriegs.*

## Formalisierung

$$\exists x \left( \text{US-Stadt}(x) \wedge \exists y \exists z \left( \text{Flughafen}(x, 1, y) \wedge \text{Flughafen}(x, 2, z) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists u \exists v (\text{Benannt}(y, u) \wedge \text{Benannt}(z, v) \wedge \text{Kriegsheld}(u) \wedge \text{Schlacht}(v)) \right) \right)$$

## WATSON-Supercomputer

- spielte 2011 gegen die JEOPARDY!-Großmeister und **gewann**
- Finalantwort der Kategorie “Städte der USA”:  
*Ihr größter Flughafen ist nach einem Helden des 2. Weltkriegs benannt;  
ihr zweitgrößter nach einem Gefecht des 2. Weltkriegs.*
- WATSON antwortete “Was ist Toronto?”  
(PEARSON Int. Airport; Region of Waterloo Int. Airport)

## Formalisierung

$$\exists x \left( \text{US-Stadt}(x) \wedge \exists y \exists z \left( \text{Flughafen}(x, 1, y) \wedge \text{Flughafen}(x, 2, z) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists u \exists v (\text{Benannt}(y, u) \wedge \text{Benannt}(z, v) \wedge \text{Kriegsheld}(u) \wedge \text{Schlacht}(v)) \right) \right)$$

## WATSON-Supercomputer

- spielte 2011 gegen die JEOPARDY!-Großmeister und **gewann**
- Finalantwort der Kategorie “Städte der USA”:  
*Ihr größter Flughafen ist nach einem Helden des 2. Weltkriegs benannt;  
ihr zweitgrößter nach einem Gefecht des 2. Weltkriegs.*
- WATSON antwortete “Was ist Toronto?”  
(PEARSON Int. Airport; Region of Waterloo Int. Airport)
- richtig war: “Was ist Chicago?”  
(O’HARE Int. Airport; Midway Int. Airport)

## Formalisierung

$$\exists x \left( \text{US-Stadt}(x) \wedge \exists y \exists z \left( \text{Flughafen}(x, 1, y) \wedge \text{Flughafen}(x, 2, z) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists u \exists v (\text{Benannt}(y, u) \wedge \text{Benannt}(z, v) \wedge \text{Kriegsheld}(u) \wedge \text{Schlacht}(v)) \right) \right)$$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists x P(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x (P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $\exists x (P(a) \vee \neg P(x))$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(x))$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(x))$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(x))$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I$  beliebig  
Tautologie

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(x))$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I$  beliebig  
Tautologie

- $\forall x\neg P(x) \wedge \exists yP(f(y, y))$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) haben diese Formeln?

- $\exists xP(a)$

Modell gdw.  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(f(x)))$

Modell:  $a^I \in P^I$   
erfüllbar; **keine** Tautologie

- $\exists x(P(a) \vee \neg P(x))$

wähle  $x^I = a^I$   
Tautologie

- $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

wähle  $x^I$  beliebig  
Tautologie

- $\forall x\neg P(x) \wedge \exists yP(f(y, y))$

da  $f(y, y)^I \in U$  und  $P^I = \emptyset$   
unerfüllbar

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) hat diese Formel?

$$\forall x R(x, x) \wedge$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \wedge$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) hat diese Formel?

$$\forall x R(x, x) \wedge$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \wedge$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

In jedem Modell muss  $R$  also eine lineare Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv, linear) sein. Gibt es lineare Äquivalenzrelationen?

## Fragen

Welche Eigenschaften (Tautologie, etc.) hat diese Formel?

$$\forall x R(x, x) \wedge$$

$$\forall x \forall y \left( R(x, y) \rightarrow R(y, x) \right) \wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z \left( (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z) \right) \wedge$$

$$\forall x \forall y \left( R(x, y) \vee R(y, x) \right)$$

In jedem Modell muss  $R$  also eine lineare Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv, linear) sein. Gibt es lineare Äquivalenzrelationen? 

Erfüllbar für  $R^I = U \times U$ .

Äquivalenz

## Definition

Zwei Formeln  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$  eine Tautologie ist

## Definition

Zwei Formeln  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  sind **äquivalent** gdw.

$F_1 \leftrightarrow F_2$  eine Tautologie ist

## Beispiele

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$  und  $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$  **nicht** äquivalent
- $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$  und  $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$  äquivalent
- $P(x)$  und  $P(y)$  sind **nicht** äquivalent

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\forall xF$	$\exists x\neg F$	DEMORGAN-Gesetz für $\forall$
$\neg\exists xF$	$\forall x\neg F$	DEMORGAN-Gesetz für $\exists$
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \wedge \forall xG$	Distributivität $\forall$ über $\wedge$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists xF \vee \exists xG$	Distributivität $\exists$ über $\vee$
$\forall x\forall yF$	$\forall y\forall xF$	Kommutativität von $\forall$
$\exists x\exists yF$	$\exists y\exists xF$	Kommutativität von $\exists$
$\forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\forall x(F \vee G)$	$\forall xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \wedge G)$	$\exists xF \wedge G$	falls $x \notin FV(G)$
$\exists x(F \vee G)$	$\exists xF \vee G$	falls $x \notin FV(G)$

**alle klassischen Äquivalenzen der Aussagenlogik**

## Theorem

Für alle Formeln  $F, G \in \mathcal{F}$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so dass  $x_i \notin \text{FV}(G)$  sind  
 $\exists x_i(F \wedge G)$  und  $\exists x_i F \wedge G$  äquivalent

## Theorem

Für alle Formeln  $F, G \in \mathcal{F}$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so dass  $x_i \notin \text{FV}(G)$  sind  $\exists x_i(F \wedge G)$  und  $\exists x_i F \wedge G$  äquivalent

## Beweis.

Sei  $I = (U, \cdot^I)$  eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$(\exists x_i(F \wedge G))^I = 1$$

gdw.  $u \in U$  existiert, so dass  $(F \wedge G)^{I[x_i \mapsto u]} = 1$

gdw.  $u \in U$  existiert, so dass  $F^{I[x_i \mapsto u]} = 1$  und  $G^{I[x_i \mapsto u]} = 1$

gdw.  $u \in U$  existiert, so dass  $F^{I[x_i \mapsto u]} = 1$  und  $G^I = 1$

gdw.  $(\exists x_i F)^I = 1$  und  $G^I = 1$

gdw.  $(\exists x_i F \wedge G)^I = 1$



- Modelle und Widerlegungen
- Modellkonstruktion
- Äquivalenz und klassische Äquivalenzen

Fünfte Übungsserie ist bereits verfügbar.