

Logik
Vorlesung 7: Grundlagen Prädikatenlogik

Andreas Maletti

5. Dezember 2014

Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 Aussagenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- 3 Prädikatenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

heutige Vorlesung

- 1 Modellierung in Prädikatenlogik
- 2 Syntax der Prädikatenlogik
- 3 Semantik der Prädikatenlogik

Bitte Fragen direkt stellen!

Einführung

Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 Aussagenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- 3 **Prädikatenlogik**
 - **Syntax und Semantik**
 - Äquivalenz und Normalformen
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

Beispiele

- *“Wer A sagt, muss auch B sagen”*

$$\forall x \left(\text{Sagen}(x, A) \rightarrow \text{Sagen}(x, B) \right)$$

Äußerung von der selben Person

- *“Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer.”*

Prädikate: Schlachten, Krank

$$\forall b \forall h \left(\text{Schlachten}(b, h) \rightarrow (\text{Krank}(h) \vee \text{Krank}(b)) \right)$$

genau der Bauer, der geschlachtet hat,
oder die geschlachtete Henne ist krank

Intuition

- eine **Aussagenschablone** ist ein Satz, der Variablen verwendet, so dass für jede Belegung der Variablen eine Aussage entsteht
- **Quantoren** verlangen Wahrheit der Aussagen, die man durch best. Instanziierungen einer Aussagenschablone erhält

Beispiel

“Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer.”

- **Bauer(x)** ist Aussagenschablone
(für jedes geg. x wahr oder falsch)
- **Bauer(Herbert)** ist eine Aussage
Instanziierung für $x = \text{Herbert}$

Begriffe

- **Variablen** (üblicherweise kleingeschrieben)
stehen für Elemente des Universums
(formal: nur x_i mit $i \in \mathbb{N}$)
- **Prädikat** k -stellige Relation (auf dem Universum)

Notizen

- alle Junktoren können weiterhin verwendet werden
(auch zur Verknüpfung von Aussagenschablonen)
- die Wahrheit einer Aussagenschablone läßt sich erst bei Kenntnis der Belegung der Variablen bestimmen

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist \forall = für Alle
Allquantor
- $\exists x F$ ist genau dann wahr, wenn $x \in U$ existiert, so dass F für dieses x wahr ist \exists = Existiert ein
Existenzquantor

Beispiele

Sei U die Menge aller Menschen.

- $\forall x \left(\text{Sagen}(x, A) \rightarrow \text{Sagen}(x, B) \right)$
ist wahr, falls alle Menschen, die A -sagen, auch B -sagen
- $\exists x \left(\text{Sagen}(x, A) \rightarrow \text{Sagen}(x, B) \right)$
ist wahr, falls einer existiert, der wenn er A -sagt auch B -sagt

Modellierung

Beispiele

- Jede ganze Zahl ist größer (oder gleich) 0

$$\forall x \left((x \in \mathbb{Z}) \rightarrow (x \geq 0) \right)$$

- Es gibt eine natürliche Zahl,
die nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist

$$\exists x \left((x \in \mathbb{N}) \wedge \forall y \left((y \in \mathbb{N}) \rightarrow (x \neq y + 1) \right) \right)$$

Totschlag — StGB 16, §212 [editiert]

*Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.*

Formalisierung

Prädikate: Person(\cdot), Tötet(\cdot, \cdot), Mörder(\cdot), Totschläger(\cdot)

$$\forall m \left(\left(\text{Person}(m) \wedge \exists o (\text{Person}(o) \wedge \text{Tötet}(m, o)) \wedge \neg \text{Mörder}(m) \right) \rightarrow \text{Totschläger}(m) \right)$$

Diebstahl — StGB 19, §242 [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Formalisierung

Prädikate: BewSache(\cdot), Aneignen(\cdot , \cdot), Besitzer(\cdot , \cdot), Dieb(\cdot), $\cdot = \cdot$

$$\forall d \left(\left(\exists s (\text{BewSache}(s) \wedge \exists p (\text{Besitzer}(s, p) \wedge \neg(d = p) \wedge (\text{Aneignen}(s, d) \vee \exists q (\neg(q = p) \wedge \neg(q = d) \wedge \text{Aneignen}(s, q)))))) \right) \rightarrow \text{Dieb}(d) \right)$$

Halten und Parken — StVO I, § 12(2) [editiert]

- ② Wer sein Fahrzeug verlässt oder länger als drei Minuten hält, der parkt.

Formalisierung

Prädikate: ??

$$\forall x \left(\left(\text{Fahrzeug}(x) \wedge (\text{Verlassen}(x) \vee \exists n((n > 3) \wedge \text{Hält}(x, n))) \right) \rightarrow \text{Parkt}(x) \right)$$

Syntax

Notation

- Sei $\mathcal{V} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der **Variablen**
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{S}^k = \{f_i^k \mid i \in \mathbb{N}\}$
die Menge der **k -stelligen Funktionssymbole**
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{R}^k = \{R_i^k \mid i \in \mathbb{N}\}$
die Menge der **k -stelligen Relationssymbole**

Notizen

- formal gibt es wieder nur diese Symbole
vgl. aussagenlogische Atome $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- natürlich werden wir oft beschreibendere Symbole verwenden

Definition (Terme)

Die Menge \mathcal{T} der (prädikatenlogischen) Terme ist die kleinste Menge, so dass

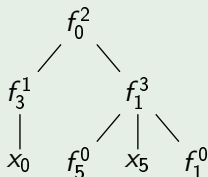
- $x_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
(alle Variablen sind Terme)
- $f_i^0 \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
(alle Konstanten sind Terme)
- $f_i^k(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
(Funktionssymbol angewandt auf Terme liefert Term)

Beispiele

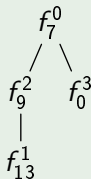
- $f_0^2(f_3^1(x_0), f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0)) \in \mathcal{T}$ ist ein Term
- $f_7^0(f_9^2(f_{13}^1), f_0^3) \notin \mathcal{T}$ ist **kein** Term

Illustration

- Baumdarstellung des Terms



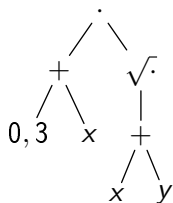
- Baumdarstellung des **Nichtterms**



Notizen

- Funktionssymbole der Stelligkeit 0 heißen auch **Konstanten**
- Terme bestehen aus Variablen und Funktionssymbolen, die gemäß ihrer Stelligkeit verwendet werden
- vgl. arithmetische Ausdrücke

$$(0, 3 + x) \cdot \sqrt{x + y}$$



Definition (Formeln)

Die Menge \mathcal{F} der (**prädikatenlogischen**) **Formeln** ist die kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
(Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
— dies sind die **Atome**
- $\neg F \in \mathcal{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$
(Negation einer Formel ist Formel)
- $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{F}$ und $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{F}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
(Konjunktion und Disjunktion zweier Formeln ist Formel)
- $\forall x_i F \in \mathcal{F}$ und $\exists x_i F \in \mathcal{F}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$
(All- und Existenzquantifikation von x_i in Formel ist Formel)

Notizen

Wir nutzen die üblichen Abkürzungen \rightarrow und \leftrightarrow

Beispiele

- A-Sagen-Formel

$$\forall x_0 \left(R_0^2(x_0, f_0^0) \rightarrow R_0^2(x_0, f_1^0) \right)$$

$$R_0^2 = \text{Sagen} \quad f_0^0 = A \quad f_1^0 = B$$

- Bauer-Formel

$$\forall x_0 \forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)$$

$$R_0^2 = \text{Schlachten} \quad R_0^1 = \text{Krank}$$

- Nachfolger-Formel

$$\exists x_0 \left(R_0^1(x_0) \wedge \forall x_1 \left(R_0^1(x_1) \rightarrow \neg R_0^2(x_0, f_0^1(x_1)) \right) \right)$$

$$R_0^1 = (\cdot \in \mathbb{N}) \quad R_0^2 = (\cdot = \cdot) \quad f_0^1(x) = x + 1$$

Notizen

- entspr. dieser Definitionen können wir Funktionen definieren bzw. Beweise induktiv führen
- müssen aber Terme und Formeln separat behandeln, denn **kein Term ist eine Formel** und **keine Formel ist ein Term**

Definition

Wir definieren die Funktion $\text{Var}: \mathcal{T} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{V})$ durch
(Variablen im Term)

- $\text{Var}(x_i) = \{x_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $\text{Var}(f_i^0) = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $\text{Var}(f_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \bigcup_{1 \leq j \leq k} \text{Var}(t_j)$
für alle $i, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

Beispiele

- schrittweise Auswertung

$$\begin{aligned} & \text{Var}(f_0^2(f_3^1(x_0), f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0))) \\ &= \text{Var}(f_3^1(x_0)) \cup \text{Var}(f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0)) \\ &= \text{Var}(x_0) \cup \text{Var}(f_5^0) \cup \text{Var}(x_5) \cup \text{Var}(f_1^0) \\ &= \{x_0\} \cup \emptyset \cup \{x_5\} \cup \emptyset \\ &= \{x_0, x_5\} \end{aligned}$$

- $\text{Var}(f_7^2(f_9^1(f_{13}^0), f_0^0)) = \emptyset$

Notizen

- in Formeln unterscheiden wir **freie** und **gebundene** Vorkommen von Variablen
- ein Variablenvorkommen ist **gebunden**, wenn es im Einflussbereich eines gleichlautenden Quantors liegt
- andernfalls ist es **frei**

Beispiele

gebundene Vorkommen in **rot** und freie Vorkommen in **grün**

$$\left(\exists x_0 \underbrace{\neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

$$\forall x_0 \forall x_1 \underbrace{\left(R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow (R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)) \right)}_{x_1}$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{x_0}$$

Definition (Aussage)

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt **Aussage** (oder: **geschlossen**) gdw. sie keine freien Vorkommen von Variablen hat

Beispiele

- dies ist eine Aussage

$$\forall x_0 \forall x_1 \left(\underbrace{R_0^2(x_0, x_1)}_{x_1} \rightarrow \underbrace{(R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0))}_{x_0} \right)$$

- diese Formel ist **keine** Aussage (grün = frei)

$$\left(\exists x_0 \underbrace{\neg (R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0)}_{x_0} \right) \rightarrow \forall x_1 \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1}$$

Definition

Wir definieren die Menge der freien Variablen einer Formel:

- $FV(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \bigcup_{1 \leq j \leq k} \text{Var}(t_j)$
für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
- $FV(\neg F) = FV(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $FV(F_1 \circ F_2) = FV(F_1) \cup FV(F_2)$
für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $FV(Qx_i F) = FV(F) \setminus \{x_i\}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg \neg \neg (R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1))$

keine Formel

- $(\forall x_0 \neg R_0^0 \rightarrow \exists x_1 \neg (R_0^2(x_0, x_1)))$

Formel; keine Aussage

- $(\exists i \neg R_i^0(f_0^0, f_1^0) \vee R_0^1(f_1^1(R_0^0)))$

keine Formel

- $\forall x_0 \forall x_1 (R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow R_0^2(x_1, x_0))$

(Symmetrie von R_0^2)

Aussage

Konventionen

- **Variablen** bezeichnet durch **Kleinbuchstaben** vom Ende des Alphabets (x, y, z, z_1)
 - **Konstanten** (nullstellige Funktionssymbole) bezeichnet durch **Kleinbuchstaben** vom Anfang des Alphabets (a, b, c)
 - nicht-nullstellige **Funktionssymbole** bezeichnet durch **Kleinbuchstaben** f, g, h (f, g, h, f_1)
- Terme bestehen aus Kleinbuchstaben
- **Relationssymbole** bezeichnet durch Großbuchstaben (A, P, R, Q)

Anmerkung

Wir identifizieren $f_0^0()$ und f_0^0 (Konstante vs. nullstellige Funktion)

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x(P(y) \rightarrow \exists yR(x, y))$

Formel, keine Aussage

- $(\forall x\exists y\forall zS(x, f(z), f(a)) \rightarrow P(a))$

Aussage

- $(\forall y\exists xR(x \rightarrow y) \wedge \exists zT(x, y, f(z, a)))$

keine Formel

- $\forall x\forall y\forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ (Transitivität von R)

Aussage

Semantik

Motivation

- bisher haben wir nur syntaktische Objekte (Terme, Formeln)
 - deren Bedeutung kennen wir noch nicht
 - wir brauchen noch eine Interpretation der verschiedenen Symbole (Variablen, Funktions- und Relationssymbole)
- unsere Interpretation muss jetzt mehr leisten

Interpretation

Eine (**prädikatenlogische**) **Interpretation** ist eine Struktur (U, \cdot^I) , bestehend aus **Universum** U und Symbolinterpretation \cdot^I , so dass

- $U \neq \emptyset$ (Universum nicht leer)
- $x_i^I \in U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Variablen \rightarrow Elemente in U)
- $(f_i^k)^I : U^k \rightarrow U$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
(k -stellige Funktionssymbole $\rightarrow k$ -stellige Funktionen auf U)
- $(R_i^k)^I \subseteq U^k$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
(k -stellige Relationssymbole $\rightarrow k$ -stellige Relationen auf U)

Notizen

- formal wird immer jedes Symbol interpretiert
 - für die Auswertung einer Formel F werden wieder nur die in F vorkommenden Symbole relevant sein
- \rightarrow andere Symbole können beliebig interpretiert werden

Beispiel

$$\forall x_0 \forall x_1 (R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow R_0^2(x_1, x_0))$$

sollte intuitiv von jeder Interpretation (U, \cdot^I) erfüllt werden, in der $(R_0^2)^I \subseteq U \times U$ eine symmetrische Relation ist.

zum Beispiel: (\mathbb{N}, \cdot^I) mit

- $x_i^I = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $(f_i^k)^I(n_1, \dots, n_k) = 0$ für alle $i, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $(i, k) \neq (0, 2)$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 + n^2 \text{ ist prim}\}$

Beispiel

$$\left(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

wird von folgender Interpretation (\mathbb{N}, \cdot^I) erfüllt:

- $x_0^I = 7$ und $x_i^I = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $(f_i^k)^I(n_1, \dots, n_k) = 0$ für alle $i, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $(i, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Konvention

- da Universum nicht-leer,
lassen sich immer Interpretationen aller Symbole finden
- wir lassen irrelevante “Interpretationen” weg

Beispiel

$$\left(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

wird von folgender Interpretation (\mathbb{N}, \cdot^I) **nicht** erfüllt:

- $x_0^I = 2$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Definition (Termininterpretation)

Seien $t \in \mathcal{T}$ ein Term und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation.
Wir definieren die Funktion $I: \mathcal{T} \rightarrow U$ durch

- $I(x_i) = x_i^I$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $I(f_i^k(t_1, \dots, t_k)) = (f_i^k)^I(I(t_1), \dots, I(t_k))$
für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

Statt $I(t)$ mit $t \in \mathcal{T}$ schreiben wir wieder t^I .

Notizen

- Interpretation eines Terms ergibt Element des Universums
- berechnet durch Einsetzen der Variablenwerte und
“Ausrechnen” (Anwendung der Funktionen)

Definition (Variablenzuweisung)

Seien $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation, $j \in \mathbb{N}$ und $u \in U$.

Dann ist $I_{[x_j \mapsto u]} = (U, \cdot^J)$, so dass

- für alle $i \in \mathbb{N}$

$$x_i^J = \begin{cases} u & \text{falls } i = j \\ x_i^I & \text{sonst} \end{cases}$$

- $(f_i^k)^J = (f_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^J = (R_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$

Notizen

- $I_{[x_j \mapsto u]}$ ist im Wesentlichen die Interpretation I
nur die Variable x_j hat in $I_{[x_j \mapsto u]}$ den Wert u
(unabhängig vom Wert, den x_j in I hat)

Definition (1/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation.
Wir definieren die Funktion $I: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ durch

- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

$$I(R_i^k(t_1, \dots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (t_1^I, \dots, t_k^I) \in (R_i^k)^I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

$$I(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F_1) = 1 \text{ und } I(F_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (2/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation.
Wir definieren die Funktion $I: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ durch

- für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

$$I(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F_1) = 1 \text{ oder } I(F_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\forall x_i F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_{[x_i \mapsto u]}(F) = 1 \text{ für alle } u \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\exists x_i F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in U \text{ existiert mit } I_{[x_i \mapsto u]}(F) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anmerkungen

- Statt $I(F)$ mit $F \in \mathcal{F}$ schreiben wir wieder F^I
- Interpretation einer Formel liefert Wahrheitswert
(vgl. Interpretation eines Terms ist Element des Universums)
- neue Fälle: Relation und Quantoren

Interpretation

$$F = \left(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)) \right)$$

- Interpretation (\mathbb{N}, \cdot^I) mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Berechnung

$F^I = 1$ gdw.

- $(R_0^1(x_0))^I = 1$ gdw. $x_0^I \in (R_0^1)^I$ gdw. 7 prim ist und ✓
- $(\exists x_1 (R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)))^I = 1$ gdw.

$n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0))^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw.

- $(R_0^1(x_1))^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $x_1^{I[x_1 \mapsto n]} \in (R_0^1)^{I[x_1 \mapsto n]}$ gdw. n prim
 $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}) = n$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓
- $(R_0^2(x_1, x_0))^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}, x_0^{I[x_1 \mapsto n]}) \in (R_0^2)^{I[x_1 \mapsto n]}$
 $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}, x_0^{I[x_1 \mapsto n]}) = (n, 7) \in (R_0^2)^I$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓

- Motivation
- Modellierung
- Syntax Prädikatenlogik
- Semantik Prädikatenlogik

Vierte Übungsserie ist bereits verfügbar.