Logik
Vorlesung 7: Grundlagen Prädikatenlogik

Andreas Maletti

5. Dezember 2014

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Modellierung in Prädikatenlogik
2. Syntax der Prädikatenlogik
3. Semantik der Prädikatenlogik

Bitte Fragen direkt stellen!

Einführung

Inhalt

Prädikatenlogik — Motivation

Beispiele

- *"Wer A sagt, muss auch B sagen"*
  $\forall x \Big(\mathrm{Sagen}(x, A) \rightarrow \mathrm{Sagen}(x, B)\Big)$

  Äußerung von der selben Person

Prädikatenlogik — Motivation

Beispiele

- *"Wer A sagt, muss auch B sagen"*
  $\forall x \Big(\mathrm{Sagen}(x, A) \rightarrow \mathrm{Sagen}(x, B) \Big)$
  Äußerung von der selben Person

- *"Schlachtet der Bauer eine Henne,*
  so ist die Henne krank oder der Bauer."
  Prädikate: Schlachten, Krank

Prädikatenlogik — Motivation

Beispiele

- *"Wer A sagt, muss auch B sagen"*
  $\forall x \Big(\text{Sagen}(x, A) \rightarrow \text{Sagen}(x, B)\Big)$

  Äußerung von der selben Person

- *"Schlachtet der Bauer eine Henne,*
  so ist die Henne krank oder der Bauer."
  Prädikate: Schlachten, Krank

$$\forall b \forall h \Big(\text{Schlachten}(b, h) \rightarrow \big(\text{Krank}(h) \vee \text{Krank}(b)\big)\Big)$$

Prädikatenlogik — Motivation

Beispiele

- *"Wer A sagt, muss auch B sagen"*
  $\forall x \Big(\mathrm{Sagen}(x, A) \to \mathrm{Sagen}(x, B)\Big)$

  Äußerung von der selben Person

- *"Schlachtet der Bauer eine Henne,*
  so ist die Henne krank oder der Bauer."
  Prädikate: Schlachten, Krank

$$\forall b \forall h \Big(\mathrm{Schlachten}(b, h) \to \big(\mathrm{Krank}(h) \vee \mathrm{Krank}(b)\big)\Big)$$

genau der Bauer, der geschlachtet hat,
oder die geschlachtete Henne ist krank

Prädikatenlogik — Motivation

Intuition

- eine Aussagenschablone ist ein Satz, der Variablen verwendet, so dass für jede Belegung der Variablen eine Aussage entsteht
- Quantoren verlangen Wahrheit der Aussagen, die man durch best. Instanziierungen einer Aussagenschablone erhält

Prädikatenlogik — Motivation

Intuition

- eine Aussagenschablone ist ein Satz, der Variablen verwendet, so dass für jede Belegung der Variablen eine Aussage entsteht
- Quantoren verlangen Wahrheit der Aussagen, die man durch best. Instanziierungen einer Aussagenschablone erhält

Beispiel

"Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer."

- Bauer(x) ist Aussagenschablone
  (für jedes geg. x wahr oder falsch)
- Bauer(Herbert) ist eine Aussage
  Instanziierung für x = Herbert

Prädikatenlogik — Grundbegriffe

Begriffe

- Variablen (üblicherweise kleingeschrieben)
  stehen für Elemente des Universums
  (formal: nur x_i mit $i \in \mathbb{N}$)
- Prädikat k-stellige Relation (auf dem Universum)

Notizen

- alle Junktoren können weiterhin verwendet werden
  (auch zur Verknüpfung von Aussagenschablonen)
- die Wahrheit einer Aussagenschablone läßt sich erst bei Kenntnis der Belegung der Variablen bestimmen

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist

  $\forall$ = für Alle
  Allquantor

Prädikatenlogik — Quantoren

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist

A = für Alle

Allquantor

Prädikatenlogik — Quantoren

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist — $\forall$ = für Alle — Allquantor
- $\exists x F$ ist genau dann wahr, wenn $x \in U$ existiert, so dass F für dieses x wahr ist — $\exists$ = Existiert ein — Existenzquantor

Prädikatenlogik — Quantoren

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist — $\forall$ = für Alle — Allquantor
- $\exists x F$ ist genau dann wahr, wenn $x \in U$ existiert, so dass F für dieses x wahr ist — E = Existiert ein — Existenzquantor

Prädikatenlogik — Quantoren

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist — $\forall$ = für Alle — Allquantor
- $\exists x F$ ist genau dann wahr, wenn $x \in U$ existiert, so dass F für dieses x wahr ist — $\exists$ = Existiert ein — Existenzquantor

Beispiele

Sei U die Menge aller Menschen.

- $\forall x \Big(\mathrm{Sagen}(x, A) \rightarrow \mathrm{Sagen}(x, B)\Big)$
  ist wahr, falls alle Menschen, die A-sagen, auch B-sagen

Prädikatenlogik — Quantoren

Quantoren

Sei U das Universum.

- $\forall x F$ ist genau dann wahr, wenn F für alle $x \in U$ wahr ist — $\forall$ = für Alle — **Allquantor**
- $\exists x F$ ist genau dann wahr, wenn $x \in U$ existiert, so dass F für dieses x wahr ist — $\exists$ = Existiert ein — **Existenzquantor**

Beispiele

Sei U die Menge aller Menschen.

- $\forall x \Big(\text{Sagen}(x, A) \rightarrow \text{Sagen}(x, B)\Big)$
  ist wahr, falls alle Menschen, die A-sagen, auch B-sagen
- $\exists x \Big(\text{Sagen}(x, A) \rightarrow \text{Sagen}(x, B)\Big)$
  ist wahr, falls einer existiert, der wenn er A-sagt auch B-sagt

Prädikatenlogik

Modellierung

Prädikatenlogik — Modellierung

Beispiele

- Jede ganze Zahl ist größer (oder gleich) 0

$$\forall x\Big((x \in \mathbb{Z}) \to (x \geq 0)\Big)$$

Beispiele

- Jede ganze Zahl ist größer (oder gleich) 0

$$\forall x \Big((x \in \mathbb{Z}) \rightarrow (x \geq 0) \Big)$$

- Es gibt eine natürliche Zahl,
  die nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist

$$\exists x \Big((x \in \mathbb{N}) \wedge \forall y ((y \in \mathbb{N}) \rightarrow (x \neq y + 1)) \Big)$$

Totschlag — StGB 16, §212 [editiert]

Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.

Prädikatenlogik — Modellierung

Totschlag — StGB 16, §212 [editiert]

Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.

Formalisierung

Prädikate: Person($\cdot$), Tötet($\cdot, \cdot$), Mörder($\cdot$), Totschläger($\cdot$)

Prädikatenlogik — Modellierung

Totschlag — StGB 16, §212 [editiert]

Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.

Formalisierung

Prädikate: Person$(\cdot)$, Tötet$(\cdot,\cdot)$, Mörder$(\cdot)$, Totschläger$(\cdot)$

$$\forall m \Big(\Big(\mathrm{Person}(m) \wedge \exists o \big(\mathrm{Person}(o) \wedge \mathrm{Tötet}(m,o)\big) \wedge \neg \mathrm{Mörder}(m) \Big) \to \mathrm{Totschläger}(m) \Big)$$

Prädikatenlogik — Modellierung

Diebstahl — StGB 19, §242 [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Prädikatenlogik — Modellierung

Diebstahl — StGB 19, §242 [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Formalisierung

Prädikate: BewSache$(\cdot)$, Aneignen$(\cdot,\cdot)$, Besitzer$(\cdot,\cdot)$, Dieb$(\cdot)$, $\cdot = \cdot$

Prädikatenlogik — Modellierung

Diebstahl — StGB 19, §242 [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Formalisierung

Prädikate: BewSache$(\cdot)$, Aneignen$(\cdot,\cdot)$, Besitzer$(\cdot,\cdot)$, Dieb$(\cdot)$, $\cdot = \cdot$

$$\forall d \Big(\Big(\exists s \big(\mathrm{BewSache}(s) \wedge \exists p \big(\mathrm{Besitzer}(s,p) \wedge \neg(d = p) \wedge (\mathrm{Aneignen}(s,d) \vee \exists q(\neg(q = p) \wedge \neg(q = d) \wedge \mathrm{Aneignen}(s,q))))) \Big) \rightarrow \mathrm{Dieb}(d) \Big)$$

Prädikatenlogik — Modellierung

Halten und Parken — StVO I, § 12(2) [editiert]

2. Wer sein Fahrzeug verlässt oder länger als drei Minuten hält, der parkt.

Prädikatenlogik — Modellierung

Halten und Parken — StVO I, § 12(2) [editiert]

2. Wer sein Fahrzeug verlässt oder länger als drei Minuten hält, der parkt.

Formalisierung

Prädikate: ??

Halten und Parken — StVO I, § 12(2) [editiert]

2. Wer sein Fahrzeug verlässt oder länger als drei Minuten hält, der parkt.

Formalisierung

Prädikate: ??

$$\forall x \Big(\Big(\mathrm{Fahrzeug}(x) \land \big(\mathrm{Verlassen}(x) \lor \exists n((n > 3) \land \mathrm{Hält}(x, n))\big)\Big) \rightarrow \mathrm{Parkt}(x) \Big)$$

Prädikatenlogik

$\boxed{\text{Syntax}}$

Notation

- Sei $\mathcal{V} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Variablen
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{S}^k = \{f_i^k \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der k-stelligen Funktionssymbole
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{R}^k = \{R_i^k \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der k-stelligen Relationssymbole

Prädikatenlogik — Syntax

Notation

- Sei $\mathcal{V} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Variablen
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{S}^k = \{f_i^k \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der k-stelligen Funktionssymbole
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{R}^k = \{R_i^k \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der k-stelligen Relationssymbole

Notizen

- formal gibt es wieder nur diese Symbole
  vgl. aussagenlogische Atome $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- natürlich werden wir oft beschreibendere Symbole verwenden

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Terme)

Die Menge $\mathcal{T}$ der (prädikatenlogischen) Terme
ist die kleinste Menge, so dass

- $x_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

  (alle Variablen sind Terme)
- $f_i^0 \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

  (alle Konstanten sind Terme)
- $f_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{T}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

  (Funktionssymbol angewandt auf Terme liefert Term)

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Terme)

Die Menge $\mathcal{T}$ der (prädikatenlogischen) Terme
ist die kleinste Menge, so dass

- $x_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

  (alle Variablen sind Terme)

- $f_i^0 \in \mathcal{T}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

  (alle Konstanten sind Terme)

- $f_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{T}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

  (Funktionssymbol angewandt auf Terme liefert Term)

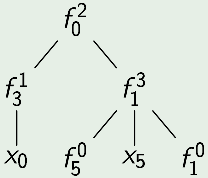
Beispiele

- $f_0^2(f_3^1(x_0), f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0)) \in \mathcal{T}$ ist ein Term
- $f_7^0(f_9^2(f_{13}^1), f_0^3) \notin \mathcal{T}$ ist kein Term

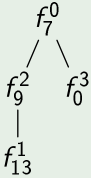
Prädikatenlogik — Syntax

Illustration

- Baumdarstellung des Terms



- Baumdarstellung des Nichtterms

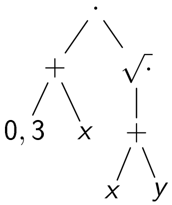


Prädikatenlogik — Syntax

Notizen

- Funktionssymbole der Stelligkeit 0 heißen auch Konstanten
- Terme bestehen aus Variablen und Funktionssymbolen, die gemäß ihrer Stelligkeit verwendet werden
- vgl. arithmetische Ausdrücke

$(0,3 + x) \cdot \sqrt{x + y}$



Definition (Formeln)

Die Menge $\mathcal{F}$ der (prädikatenlogischen) Formeln ist die kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
  (Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
  — dies sind die Atome

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Formeln)

Die Menge $\mathcal{F}$ der (prädikatenlogischen) Formeln ist die kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

  (Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)

  — dies sind die Atome

- $\neg F \in \mathcal{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$

  (Negation einer Formel ist Formel)

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Formeln)

Die Menge $\mathcal{F}$ der (prädikatenlogischen) Formeln ist die kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
  (Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
  — dies sind die Atome
- $\neg F \in \mathcal{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$
  (Negation einer Formel ist Formel)
- $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{F}$ und $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{F}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
  (Konjunktion und Disjunktion zweier Formeln ist Formel)

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Formeln)

Die Menge $\mathcal{F}$ der (prädikatenlogischen) Formeln ist die kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
  (Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
  — dies sind die Atome
- $\neg F \in \mathcal{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$
  (Negation einer Formel ist Formel)
- $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{F}$ und $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{F}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
  (Konjunktion und Disjunktion zweier Formeln ist Formel)
- $\forall x_i F \in \mathcal{F}$ und $\exists x_i F \in \mathcal{F}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$
  (All- und Existenzquantifikation von x_i in Formel ist Formel)

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Formeln)

Die Menge $\mathcal{F}$ der (prädikatenlogischen) Formeln ist die kleinste Menge, so dass

- $R_i^k(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{F}$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$
  (Relationssymbol angewandt auf Terme ist Formel)
  — dies sind die Atome
- $\neg F \in \mathcal{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$
  (Negation einer Formel ist Formel)
- $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{F}$ und $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{F}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
  (Konjunktion und Disjunktion zweier Formeln ist Formel)
- $\forall x_i F \in \mathcal{F}$ und $\exists x_i F \in \mathcal{F}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}$
  (All- und Existenzquantifikation von x_i in Formel ist Formel)

Notizen

Wir nutzen die üblichen Abkürzungen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

Prädikatenlogik — Syntax

Beispiele

- A-Sagen-Formel

$$\forall x_0 \Big(R_0^2(x_0, f_0^0) \to R_0^2(x_0, f_1^0) \Big)$$

$R_0^2 = \text{Sagen} \qquad f_0^0 = A \qquad f_1^0 = B$

Prädikatenlogik — Syntax

Beispiele

- A-Sagen-Formel

$$\forall x_0 \Big(R_0^2(x_0, f_0^0) \to R_0^2(x_0, f_1^0) \Big)$$

$R_0^2 = \text{Sagen} \qquad f_0^0 = A \qquad f_1^0 = B$

- Bauer-Formel

$$\forall x_0 \forall x_1 \Big(R_0^2(x_0, x_1) \to \big(R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)\big) \Big)$$

$R_0^2 = \text{Schlachten} \qquad R_0^1 = \text{Krank}$

Prädikatenlogik — Syntax

Beispiele

- A-Sagen-Formel

$$\forall x_0 \Big(R_0^2(x_0, f_0^0) \to R_0^2(x_0, f_1^0) \Big)$$

$R_0^2 = \text{Sagen} \qquad f_0^0 = A \qquad f_1^0 = B$

- Bauer-Formel

$$\forall x_0 \forall x_1 \Big(R_0^2(x_0, x_1) \to \big(R_0^1(x_1) \lor R_0^1(x_0) \big) \Big)$$

$R_0^2 = \text{Schlachten} \qquad R_0^1 = \text{Krank}$

- Nachfolger-Formel

$$\exists x_0 \Big(R_0^1(x_0) \land \forall x_1 \big(R_0^1(x_1) \to \neg R_0^2(x_0, f_0^1(x_1)) \big) \Big)$$

$R_0^1 = (\cdot \in \mathbb{N}) \qquad R_0^2 = (\cdot = \cdot) \qquad f_0^1(x) = x + 1$

Prädikatenlogik — Syntax

Notizen

- entspr. dieser Definitionen können wir Funktionen definieren bzw. Beweise induktiv führen
- müssen aber Terme und Formeln separat behandeln, denn kein Term ist eine Formel und keine Formel ist ein Term

Definition

Wir definieren die Funktion $\mathrm{Var}\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Pow}(\mathcal{V})$ durch

(Variablen im Term)

- $\mathrm{Var}(x_i) = \{x_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $\mathrm{Var}(f_i^0) = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $\mathrm{Var}(f_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = \bigcup_{1 \leq j \leq k} \mathrm{Var}(t_j)$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

Beispiele

- schrittweise Auswertung

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Var}\big(f_0^2(f_3^1(x_0), f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0))\big) \\
= {} & \mathrm{Var}\big(f_3^1(x_0)\big) \cup \mathrm{Var}\big(f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0)\big) \\
= {} & \mathrm{Var}\big(x_0\big) \cup \mathrm{Var}\big(f_5^0\big) \cup \mathrm{Var}\big(x_5\big) \cup \mathrm{Var}\big(f_1^0\big) \\
= {} & \{x_0\} \cup \emptyset \cup \{x_5\} \cup \emptyset \\
= {} & \{x_0,\ x_5\}
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik — Syntax

Beispiele

- schrittweise Auswertung

$$\begin{aligned} & \mathrm{Var}\big(f_0^2(f_3^1(x_0), f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0))\big) \\ = {} & \mathrm{Var}\big(f_3^1(x_0)\big) \cup \mathrm{Var}\big(f_1^3(f_5^0, x_5, f_1^0)\big) \\ = {} & \mathrm{Var}\big(x_0\big) \cup \mathrm{Var}\big(f_5^0\big) \cup \mathrm{Var}\big(x_5\big) \cup \mathrm{Var}\big(f_1^0\big) \\ = {} & \{x_0\} \cup \emptyset \cup \{x_5\} \cup \emptyset \\ = {} & \{x_0,\ x_5\} \end{aligned}$$

- $\mathrm{Var}\big(f_7^2(f_9^1(f_{13}^0), f_0^0)\big) = \emptyset$

Prädikatenlogik — Syntax

Notizen

- in Formeln unterscheiden wir freie und gebundene Vorkommen von Variablen
- ein Variablenvorkommen ist gebunden, wenn es im Einflussbereich eines gleichlautenden Quantors liegt
- andernfalls ist es frei

Prädikatenlogik — Syntax

Notizen

- in Formeln unterscheiden wir freie und gebundene Vorkommen von Variablen
- ein Variablenvorkommen ist gebunden, wenn es im Einflussbereich eines gleichlautenden Quantors liegt
- andernfalls ist es frei

Beispiele

gebundene Vorkommen in rot und freie Vorkommen in grün

$$\Big(\exists x_0 \underbrace{\neg\big(R_0^2(x_0, x_1) \vee R_0^0\big)}_{x_0} \to \forall x_1 \underbrace{\big(R_1^2(x_1, x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)}_{x_1}\Big)$$

$$\underbrace{\forall x_0\, \forall x_1 \underbrace{\Big(R_0^2(x_0, x_1) \to \big(R_0^1(x_1) \vee R_0^1(x_0)\big)\Big)}_{x_1}}_{x_0}$$

Definition (Aussage)

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt Aussage (oder: geschlossen) gdw. sie keine freien Vorkommen von Variablen hat

Prädikatenlogik — Syntax

Definition (Aussage)

Eine Formel $F \in \mathcal{F}$ heißt Aussage (oder: geschlossen) gdw. sie keine freien Vorkommen von Variablen hat

Beispiele

- dies ist eine Aussage

$$\underbrace{\forall x_0 \, \underbrace{\forall x_1 \left(R_0^2(x_0, x_1) \to (R_0^1(x_1) \lor R_0^1(x_0)) \right)}_{x_1}}_{x_0}$$

- diese Formel ist keine Aussage (grün = frei)

$$\left(\exists x_0 \, \underbrace{\neg(R_0^2(x_0, x_1) \lor R_0^0)}_{x_0} \to \forall x_1 \, \underbrace{(R_1^2(x_1, x_1) \land R_0^2(x_1, x_0))}_{x_1} \right)$$

Definition

Wir definieren die Menge der freien Variablen einer Formel:

- $\mathrm{FV}(R_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = \bigcup_{1 \leq j \leq k} \mathrm{Var}(t_j)$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$
- $\mathrm{FV}(\neg F) = \mathrm{FV}(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $\mathrm{FV}(F_1 \circ F_2) = \mathrm{FV}(F_1) \cup \mathrm{FV}(F_2)$
  für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$
- $\mathrm{FV}(Q x_i F) = \mathrm{FV}(F) \setminus \{x_i\}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg\big(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1)\big)$

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg \big(R_0^2(x_0, f_2^2) \land f_3^2(x_0, x_1) \big)$

  keine Formel

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1))$

  keine Formel

- $(\forall x_0 \neg R_0^0 \rightarrow \exists x_1 \neg(R_0^2(x_0, x_1)))$

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg\big(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1)\big)$

  keine Formel

- $\big(\forall x_0 \neg R_0^0 \to \exists x_1 \neg(R_0^2(x_0, x_1))\big)$

  Formel; keine Aussage

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg\big(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1)\big)$

  keine Formel

- $\big(\forall x_0 \neg R_0^0 \rightarrow \exists x_1 \neg(R_0^2(x_0, x_1))\big)$

  Formel; keine Aussage

- $\big(\exists i \neg R_i^0(f_0^0, f_1^0) \vee R_0^1(f_1^1(R_0^0))\big)$

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1))$

  keine Formel

- $(\forall x_0 \neg R_0^0 \to \exists x_1 \neg(R_0^2(x_0, x_1)))$

  Formel; keine Aussage

- $(\exists i \neg R_i^0(f_0^0, f_1^0) \vee R_0^1(f_1^1(R_0^0)))$

  keine Formel

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1))$

  keine Formel

- $(\forall x_0 \neg R_0^0 \rightarrow \exists x_1 \neg(R_0^2(x_0, x_1)))$

  Formel; keine Aussage

- $(\exists i \neg R_i^0(f_0^0, f_1^0) \vee R_0^1(f_1^1(R_0^0)))$

  keine Formel

- $\forall x_0 \forall x_1 (R_0^2(x_0, x_1) \rightarrow R_0^2(x_1, x_0))$

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x_0 \exists x_0 \neg\neg\neg(R_0^2(x_0, f_2^2) \wedge f_3^2(x_0, x_1))$

  keine Formel

- $(\forall x_0 \neg R_0^0 \to \exists x_1 \neg(R_0^2(x_0, x_1)))$

  Formel; keine Aussage

- $(\exists i \neg R_i^0(f_0^0, f_1^0) \vee R_0^1(f_1^1(R_0^0)))$

  keine Formel

- $\forall x_0 \forall x_1 (R_0^2(x_0, x_1) \to R_0^2(x_1, x_0))$

  (Symmetrie von R_0^2)

  Aussage

Prädikatenlogik — Syntax

Konventionen

- Variablen bezeichnet durch Kleinbuchstaben vom Ende des Alphabets (x, y, z, z_1)
- Konstanten (nullstellige Funktionssymbole) bezeichnet durch Kleinbuchstaben vom Anfang des Alphabets (a, b, c)
- nicht-nullstellige Funktionssymbole bezeichnet durch Kleinbuchstaben f, g, h (f, g, h, f_1)

$\rightarrow$ Terme bestehen aus Kleinbuchstaben

Konventionen

- Variablen bezeichnet durch Kleinbuchstaben vom Ende des Alphabets (x, y, z, z_1)
- Konstanten (nullstellige Funktionssymbole) bezeichnet durch Kleinbuchstaben vom Anfang des Alphabets (a, b, c)
- nicht-nullstellige Funktionssymbole bezeichnet durch Kleinbuchstaben f, g, h (f, g, h, f_1)

$\rightarrow$ Terme bestehen aus Kleinbuchstaben

- Relationssymbole bezeichnet durch Großbuchstaben (A, P, R, Q)

Prädikatenlogik — Syntax

Konventionen

- Variablen bezeichnet durch Kleinbuchstaben vom Ende des Alphabets (x, y, z, z_1)
- Konstanten (nullstellige Funktionssymbole) bezeichnet durch Kleinbuchstaben vom Anfang des Alphabets (a, b, c)
- nicht-nullstellige Funktionssymbole bezeichnet durch Kleinbuchstaben f, g, h (f, g, h, f_1)

$\rightarrow$ Terme bestehen aus Kleinbuchstaben

- Relationssymbole bezeichnet durch Großbuchstaben (A, P, R, Q)

Anmerkung

Wir identifizieren $f_0^0()$ und f_0^0 (Konstante vs. nullstellige Funktion)

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x\big(P(y) \to \exists y R(x, y)\big)$

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x\big(P(y) \to \exists y R(x, y)\big)$

Formel, keine Aussage

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x \big(P(y) \to \exists y R(x, y)\big)$

  Formel, keine Aussage

- $\big(\forall x \exists y \forall z S(x, f(z), f(a)) \to P(a)\big)$

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x \big(P(y) \rightarrow \exists y R(x, y) \big)$

  Formel, keine Aussage

- $\big(\forall x \exists y \forall z S(x, f(z), f(a)) \rightarrow P(a) \big)$

  Aussage

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x(P(y) \to \exists y R(x, y))$

  Formel, keine Aussage

- $(\forall x \exists y \forall z S(x, f(z), f(a)) \to P(a))$

  Aussage

- $(\forall y \exists x R(x \to y) \land \exists z T(x, y, f(z, a)))$

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x(P(y) \to \exists y R(x,y))$

  Formel, keine Aussage

- $(\forall x \exists y \forall z S(x, f(z), f(a)) \to P(a))$

  Aussage

- $(\forall y \exists x R(x \to y) \land \exists z T(x, y, f(z, a)))$

  keine Formel

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x \big(P(y) \to \exists y R(x, y)\big)$

  Formel, keine Aussage

- $\big(\forall x \exists y \forall z S(x, f(z), f(a)) \to P(a)\big)$

  Aussage

- $\big(\forall y \exists x R(x \to y) \land \exists z T(x, y, f(z, a))\big)$

  keine Formel

- $\forall x \forall y \forall z \big((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z)\big)$

Prädikatenlogik — Syntax

Frage

Welche der folgenden Sequenzen sind Formeln? Welche Aussagen?

- $\forall x \big(P(y) \rightarrow \exists y R(x,y)\big)$

  Formel, keine Aussage

- $\big(\forall x \exists y \forall z S(x, f(z), f(a)) \rightarrow P(a)\big)$

  Aussage

- $\big(\forall y \exists x R(x \rightarrow y) \wedge \exists z T(x, y, f(z, a))\big)$

  keine Formel

- $\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\big)$ (Transitivität von R)

  Aussage

Semantik

Motivation

- bisher haben wir nur syntaktische Objekte (Terme, Formeln)
- deren Bedeutung kennen wir noch nicht
- wir brauchen noch eine Interpretation der verschiedenen Symbole (Variablen, Funktions- und Relationssymbole)

$\rightarrow$ unsere Interpretation muss jetzt mehr leisten

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

Eine (prädikatenlogische) Interpretation ist eine Struktur $(U, \cdot^I)$, bestehend aus Universum U und Symbolinterpretation $\cdot^I$, so dass

- $U \neq \emptyset$ (Universum nicht leer)
- $x_i^I \in U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Variablen $\to$ Elemente in U)
- $(f_i^k)^I : U^k \to U$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
  (k-stellige Funktionssymbole $\to$ k-stellige Funktionen auf U)
- $(R_i^k)^I \subseteq U^k$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
  (k-stellige Relationssymbole $\to$ k-stellige Relationen auf U)

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

Eine (prädikatenlogische) Interpretation ist eine Struktur $(U, \cdot^I)$, bestehend aus Universum U und Symbolinterpretation $\cdot^I$, so dass

- $U \neq \emptyset$ (Universum nicht leer)
- $x_i^I \in U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Variablen $\rightarrow$ Elemente in U)
- $(f_i^k)^I : U^k \rightarrow U$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
  (k-stellige Funktionssymbole $\rightarrow$ k-stellige Funktionen auf U)
- $(R_i^k)^I \subseteq U^k$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
  (k-stellige Relationssymbole $\rightarrow$ k-stellige Relationen auf U)

Notizen

- formal wird immer jedes Symbol interpretiert
- für die Auswertung einer Formel F werden wieder nur die in F vorkommenenden Symbole relevant sein

$\rightarrow$ andere Symbole können beliebig interpretiert werden

Beispiel

$$\forall x_0 \forall x_1 \big(R_0^2(x_0, x_1) \to R_0^2(x_1, x_0) \big)$$

sollte intuitiv von jeder Interpretation $(U, \cdot^I)$ erfüllt werden, in der $(R_0^2)^I \subseteq U \times U$ eine symmetrische Relation ist.

zum Beispiel: $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit

- $x_i^I = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $(f_i^k)^I(n_1, \dots, n_k) = 0$ für alle $i, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $(i, k) \neq (0, 2)$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 + n^2 \text{ ist prim}\}$

Prädikatenlogik — Semantik

Beispiel

$$\Big(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

wird von folgender Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ erfüllt:

- $x_0^I = 7$ und $x_i^I = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $(f_i^k)^I(n_1, \ldots, n_k) = 0$ für alle $i, k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $(i, k) \notin \{(0,1), (0,2)\}$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Prädikatenlogik — Semantik

Beispiel

$$\Big(R_0^1(x_0) \land \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

wird von folgender Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ erfüllt:

- $x_0^I = 7$ und $x_i^I = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $(f_i^k)^I(n_1, \ldots, n_k) = 0$ für alle $i, k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^I = \emptyset$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $(i, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Konvention

- da Universum nicht-leer,
  lassen sich immer Interpretationen aller Symbole finden

Prädikatenlogik — Semantik

Beispiel

$$\left(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \left(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\right)\right)$$

wird von folgender Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ erfüllt:

- $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Konvention

- da Universum nicht-leer,
  lassen sich immer Interpretationen aller Symbole finden

$\rightarrow$ wir lassen irrelevante "Interpretationen" weg

Prädikatenlogik — Semantik

Beispiel

$$\Big(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

wird von folgender Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ nicht erfüllt:

- $x_0^I = 2$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim}\}$
- $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Prädikatenlogik — Semantik

Definition (Terminterpretation)

Seien $t \in \mathcal{T}$ ein Term und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation.
Wir definieren die Funktion $I \colon \mathcal{T} \to U$ durch

- $I(x_i) = x_i^I$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $I(f_i^k(t_1, \ldots, t_k)) = (f_i^k)^I(I(t_1), \ldots, I(t_k))$
  für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

Statt $I(t)$ mit $t \in \mathcal{T}$ schreiben wir wieder t^I.

Notizen

- Interpretation eines Terms ergibt Element des Universums
- berechnet durch Einsetzen der Variablenwerte und "Ausrechnen" (Anwendung der Funktionen)

Definition (Variablenzuweisung)

Seien $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation, $j \in \mathbb{N}$ und $u \in U$.
Dann ist $I_{[x_j \mapsto u]} = (U, \cdot^J)$, so dass

- für alle $i \in \mathbb{N}$
$$x_i^J = \begin{cases} u & \text{falls } i = j \\ x_i^I & \text{sonst} \end{cases}$$
- $(f_i^k)^J = (f_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^J = (R_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$

Prädikatenlogik — Semantik

Definition (Variablenzuweisung)

Seien $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation, $j \in \mathbb{N}$ und $u \in U$.
Dann ist $I_{[x_j \mapsto u]} = (U, \cdot^J)$, so dass

- für alle $i \in \mathbb{N}$

$$x_i^J = \begin{cases} u & \text{falls } i = j \\ x_i^I & \text{sonst} \end{cases}$$

- $(f_i^k)^J = (f_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$
- $(R_i^k)^J = (R_i^k)^I$ für alle $i, k \in \mathbb{N}$

Notizen

- $I_{[x_j \mapsto u]}$ ist im Wesentlichen die Interpretation I
  nur die Variable x_j hat in $I_{[x_j \mapsto u]}$ den Wert u
  (unabhängig vom Wert, den x_j in I hat)

Prädikatenlogik — Semantik

Definition (1/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation. Wir definieren die Funktion $I \colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ durch

- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

$$I\big(R_i^k(t_1, \ldots, t_k)\big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (t_1^I, \ldots, t_k^I) \in (R_i^k)^I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (1/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation. Wir definieren die Funktion $I \colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ durch

- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$

$$I\big(R_i^k(t_1, \ldots, t_k)\big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (t_1^I, \ldots, t_k^I) \in (R_i^k)^I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Prädikatenlogik — Semantik

Definition (1/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation. Wir definieren die Funktion $I \colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ durch

- für alle $i, k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$

$$I\big(R_i^k(t_1, \dots, t_k)\big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (t_1^I, \dots, t_k^I) \in (R_i^k)^I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

$$I(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F_1) = 1 \ \underline{\text{und}} \ I(F_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Prädikatenlogik — Semantik

Definition (2/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation.
Wir definieren die Funktion $I\colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ durch

- für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

$$I(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F_1) = 1 \text{ \underline{oder} } I(F_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (2/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation. Wir definieren die Funktion $I\colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ durch

- für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

$$I(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F_1) = 1 \text{ \underline{oder} } I(F_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\forall x_i F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_{[x_i \mapsto u]}(F) = 1 \text{ für \underline{alle} } u \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Prädikatenlogik — Semantik

Definition (2/2 — Formelinterpretation)

Seien $F \in \mathcal{F}$ eine Formel und $I = (U, \cdot^I)$ eine Interpretation.
Wir definieren die Funktion $I\colon \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ durch

- für alle Formeln $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

$$I(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(F_1) = 1 \text{ \underline{oder} } I(F_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\forall x_i F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_{[x_i \mapsto u]}(F) = 1 \text{ für \underline{alle} } u \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für alle $i \in \mathbb{N}$ und Formeln $F \in \mathcal{F}$

$$I(\exists x_i F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in U \text{ \underline{existiert} mit } I_{[x_i \mapsto u]}(F) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anmerkungen

- Statt $I(F)$ mit $F \in \mathcal{F}$ schreiben wir wieder F^I

Prädikatenlogik — Semantik

Anmerkungen

- Statt $I(F)$ mit $F \in \mathcal{F}$ schreiben wir wieder F^I
- Interpretation einer Formel liefert <u>Wahrheitswert</u>
  (vgl. Interpretation eines Terms ist Element des Universums)
- neue Fälle: Relation und Quantoren

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

$$F = \left(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \left(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\right)\right)$$

- Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

$$F = \Big(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

- Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Berechnung

$F^I = 1$ gdw.

- $\big(R_0^1(x_0)\big)^I = 1$ gdw. $x_0^I \in (R_0^1)^I$ gdw. 7 prim ist und ✓

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

$$F = \Big(R_0^1(x_0) \land \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

- Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Berechnung

$F^I = 1$ gdw.

- $\big(R_0^1(x_0)\big)^I = 1$ gdw. $x_0^I \in (R_0^1)^I$ gdw. 7 prim ist und ✓
- $\Big(\exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)^I = 1$ gdw.
  $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw.

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

$$F = \Big(R_0^1(x_0) \wedge \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

- Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Berechnung

$F^I = 1$ gdw.

- $\big(R_0^1(x_0)\big)^I = 1$ gdw. $x_0^I \in (R_0^1)^I$ gdw. 7 prim ist und ✓
- $\Big(\exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)^I = 1$ gdw.

  $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\big(R_0^1(x_1) \wedge R_0^2(x_1, x_0)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw.

  - $\big(R_0^1(x_1)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $x_1^{I[x_1 \mapsto n]} \in (R_0^1)^{I[x_1 \mapsto n]}$ gdw. n prim

    $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]} = n)$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓

Prädikatenlogik — Semantik

Interpretation

$$F = \Big(R_0^1(x_0) \land \exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)$$

- Interpretation $(\mathbb{N}, \cdot^I)$ mit $x_0^I = 7$
- $(R_0^1)^I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\}$ und $(R_0^2)^I = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$

Berechnung

$F^I = 1$ gdw.

- $\big(R_0^1(x_0)\big)^I = 1$ gdw. $x_0^I \in (R_0^1)^I$ gdw. 7 prim ist und ✓
- $\Big(\exists x_1 \big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)\Big)^I = 1$ gdw.

  $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\big(R_0^1(x_1) \land R_0^2(x_1, x_0)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw.

  - $\big(R_0^1(x_1)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $x_1^{I[x_1 \mapsto n]} \in (R_0^1)^{I[x_1 \mapsto n]}$ gdw. n prim
    $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]} = n)$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓
  - $\big(R_0^2(x_1, x_0)\big)^{I[x_1 \mapsto n]} = 1$ gdw. $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}, x_0^{I[x_1 \mapsto n]}) \in (R_0^2)^{I[x_1 \mapsto n]}$
    $(x_1^{I[x_1 \mapsto n]}, x_0^{I[x_1 \mapsto n]}) = (n, 7) \in (R_0^2)^I$ z.B. wahr für $n = 2$ ✓

Zusammenfassung

- Motivation
- Modellierung
- Syntax Prädikatenlogik
- Semantik Prädikatenlogik

Vierte Übungsserie ist bereits verfügbar.