Logik
Vorlesung 6: Resolution

Andreas Maletti

28. November 2014

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Anwendung Resolution
2. Vollständigkeit
3. Deduktion
4. Zusammenfassung Aussagenlogik

Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Resolution

Inhalt

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Definition

- statt $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, \ldots, L_n$ schreiben wir auch einfach $\{L_1, \ldots, L_n\}$

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Definition

- statt $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, \ldots, L_n$
  schreiben wir auch einfach $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- statt $\bigwedge_{i=1}^{n} M_i$ für Mengen $M_1, \ldots, M_n \subseteq \mathcal{L}$
  schreiben wir auch einfach $\{M_1, \ldots, M_n\}_\wedge$
  (normale Menge; '$\}_\wedge$' dient nur als Gedankenstütze)

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Definition

- statt $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, \ldots, L_n$
  schreiben wir auch einfach $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- statt $\bigwedge_{i=1}^{n} M_i$ für Mengen $M_1, \ldots, M_n \subseteq \mathcal{L}$
  schreiben wir auch einfach $\{M_1, \ldots, M_n\}_\wedge$
  (normale Menge; '$\}_\wedge$' dient nur als Gedankenstütze)

Wichtiger Unterschied

- $\emptyset$ (leere Disjunktion) ist <u>unerfüllbar</u>
- $\{\}_\wedge$ (leere Konjunktion) ist <u>allgemeingültig</u>

Definition

Sei $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.
Ein Disjunktionsglied $R \subseteq \mathcal{L}$ ist Resolvent von F gdw.
zwei Disjunktionsglieder $\{D_1, D_2\} \subseteq F$ und ein Atom A_i existieren, so dass

1. $A_i \in D_1$ und $\neg A_i \in D_2$ und
2. $R = \big(D_1 \setminus \{A_i\}\big) \cup \big(D_2 \setminus \{\neg A_i\}\big)$

resolvent(F) ist die Menge aller Resolventen von F.

- Sei $\text{Res}(F) = F \cup \text{resolvent}(F)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\text{Res}^0(F) = F$$
$$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$$

- Resolutionshülle von F ist $\text{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

Beispiel

$$F = \big\{\{A_0,\ \neg A_1\},\ \{\neg A_1,\ A_2\},\ \{\neg A_0, \neg A_1\},\ \{\neg A_2, A_1\}\big\}_\wedge$$

$$\mathrm{Res}^*(F) = \big\{\{A_0,\ \neg A_1\},\ \{\neg A_1,\ A_2\},\ \{\neg A_0, \neg A_1\},\ \{\neg A_2, A_1\},$$

$$\big\}_\wedge$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\mathrm{Res}^*(F) = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},$$

$$\}_\wedge$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \big\{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\big\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \big\{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\},\\ &\big\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\text{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \big\{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\big\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \big\{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\big\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad\qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad\qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad\qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad\qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad\qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \big\{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\big\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \big\{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \qquad \big\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0,\ \neg A_1\},\ \{\neg A_1,\ A_2\},\ \{\neg A_0, \neg A_1\},\ \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0,\ \neg A_1\},\ \{\neg A_1,\ A_2\},\ \{\neg A_0, \neg A_1\},\ \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\},\ \{A_0, \neg A_2\},\ \{A_2,\ \neg A_2\},\ \{\neg A_1,\ A_1\},\ \{\neg A_0,\ \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1,\ \neg A_2\},\qquad\qquad \}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \big\{\{A_0,\ \neg A_1\},\ \{\neg A_1,\ A_2\},\ \{\neg A_0, \neg A_1\},\ \{\neg A_2, A_1\}\big\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \big\{&\{A_0,\ \neg A_1\},\ \{\neg A_1,\ A_2\},\ \{\neg A_0, \neg A_1\},\ \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\},\ \{A_0, \neg A_2\},\ \{A_2,\ \neg A_2\},\ \{\neg A_1,\ A_1\},\ \{\neg A_0,\ \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1,\ \neg A_2\},\ \{\neg A_2\}\big\}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0,\, \neg A_1\},\, \{\neg A_1,\, A_2\},\, \{\neg A_0, \neg A_1\},\, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0,\, \neg A_1\},\, \{\neg A_1,\, A_2\},\, \{\neg A_0, \neg A_1\},\, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\},\, \{A_0, \neg A_2\},\, \{A_2,\, \neg A_2\},\, \{\neg A_1,\, A_1\},\, \{\neg A_0,\, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1,\, \neg A_2\},\, \{\neg A_2\}\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Resolution

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge\end{aligned}$$

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}\}_\wedge$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^*(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{\neg A_2, A_1\},\\ &\{\neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \{A_2, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_2\},\\ &\{\neg A_1, \neg A_2\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge\end{aligned}$$

Problem

Was nun? (leere Menge nicht herleitbar)

Vollständigkeit

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine (evtl. unendliche) konjunktive Normalform. Falls $\mathcal{F}$ unerfüllbar ist, dann ist $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(\mathcal{F})$.

Theorem (Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine (evtl. unendliche) konjunktive Normalform. Falls $\mathcal{F}$ unerfüllbar ist, dann ist $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(\mathcal{F})$.

Beweis (1/4).

Sei $\mathcal{F}$ unerfüllbar. Aufgrund Kompaktheit existiert eine unerfüllbare <u>endliche</u> Teilmenge $F \subseteq \mathcal{F}$. Wir beweisen $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(F) \subseteq \mathrm{Res}^*(\mathcal{F})$ per vollständiger Induktion über $|\mathrm{Atome}(F)|$.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{Pow}(\mathcal{L})$ eine (evtl. unendliche) konjunktive Normalform. Falls $\mathcal{F}$ unerfüllbar ist, dann ist $\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\mathcal{F})$.

Beweis (1/4).

Sei $\mathcal{F}$ unerfüllbar. Aufgrund Kompaktheit existiert eine unerfüllbare endliche Teilmenge $F \subseteq \mathcal{F}$. Wir beweisen $\emptyset \in \mathsf{Res}^*(F) \subseteq \mathsf{Res}^*(\mathcal{F})$ per vollständiger Induktion über $|\mathsf{Atome}(F)|$.

- IA: Sei $|\mathsf{Atome}(F)| = 0$. Da $F \neq \{\}_\wedge$, denn dies wäre eine Tautologie, existiert $D \in F$. Da $\mathsf{Atome}(F) = \emptyset$, muss $D = \emptyset$ sein und damit $\emptyset \in F \subseteq \mathsf{Res}^*(F)$.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine (evtl. unendliche) konjunktive Normalform. Falls $\mathcal{F}$ unerfüllbar ist, dann ist $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(\mathcal{F})$.

Beweis (1/4).

Sei $\mathcal{F}$ unerfüllbar. Aufgrund Kompaktheit existiert eine unerfüllbare <u>endliche</u> Teilmenge $F \subseteq \mathcal{F}$. Wir beweisen $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(F) \subseteq \mathrm{Res}^*(\mathcal{F})$ per vollständiger Induktion über $|\mathrm{Atome}(F)|$.

- IA: Sei $|\mathrm{Atome}(F)| = 0$. Da $F \neq \{\}_\wedge$, denn dies wäre eine Tautologie, existiert $D \in F$. Da $\mathrm{Atome}(F) = \emptyset$, muss $D = \emptyset$ sein und damit $\emptyset \in F \subseteq \mathrm{Res}^*(F)$.
- IS: Sei $|\mathrm{Atome}(F)| = n + 1$ und $A \in \mathrm{Atome}(F)$ beliebig. Wir definieren zwei neue Formeln:

$$F_0 = \{D \setminus \{A\} \mid D \in F, \neg A \notin D\}$$
$$F_1 = \{D \setminus \{\neg A\} \mid D \in F, A \notin D\}$$

Beweis (2/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 erhält man aus F, indem man A als falsch bzw. wahr annimmt (und vereinfacht). Insb. gelten $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Beweis (2/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 erhält man aus F, indem man A als falsch bzw. wahr annimmt (und vereinfacht). Insb. gelten $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$.
  Zunächst zeigen wir, dass auch F_0 und F_1 unerfüllbar sind.
  - Sei F_0 erfüllbar und $I \models F_0$. Dann sei $J = I \setminus \{A\}$.
    Z.zg. $J \models F$. Da F in konjunktiver Normalform vorliegt, muss $J \models D$ für alle $D \in F$ gelten.

Beweis (2/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 erhält man aus F, indem man A als falsch bzw. wahr annimmt (und vereinfacht). Insb. gelten $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$.
  Zunächst zeigen wir, dass auch F_0 und F_1 unerfüllbar sind.
  - Sei F_0 erfüllbar und $I \models F_0$. Dann sei $J = I \setminus \{A\}$.
    Z.zg. $J \models F$. Da F in konjunktiver Normalform vorliegt, muss $J \models D$ für alle $D \in F$ gelten.
    - Sei $D \in F$, so dass $\neg A \in D$. Da $(\neg A)^J = 1$ gilt $D^J = 1$.

Beweis (2/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 erhält man aus F, indem man A als falsch bzw. wahr annimmt (und vereinfacht). Insb. gelten $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$.
  Zunächst zeigen wir, dass auch F_0 und F_1 unerfüllbar sind.
  - Sei F_0 erfüllbar und $I \models F_0$. Dann sei $J = I \setminus \{A\}$.
    Z.zg. $J \models F$. Da F in konjunktiver Normalform vorliegt, muss $J \models D$ für alle $D \in F$ gelten.
    - Sei $D \in F$, so dass $\neg A \in D$. Da $(\neg A)^J = 1$ gilt $D^J = 1$.
    - Sei $D \in F$, so dass $\neg A \notin D$. Dann ist $D \setminus \{A\} \in F_0$ und da $F_0^I = 1$ gilt auch $(D \setminus \{A\})^I = 1$. Wie bereits bemerkt gilt $A \notin \text{Atome}(D \setminus \{A\})$ und damit $(D \setminus \{A\})^J = (D \setminus \{A\})^I = 1$.
      Also auch $D^J = 1$.

    Also ist $J \models F$. Gemäß Annahme ist F aber unerfüllbar $\rightarrow$ Widerspruch. Also ist F_0 unerfüllbar.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Beweis (2/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 erhält man aus F, indem man A als falsch bzw. wahr annimmt (und vereinfacht). Insb. gelten $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$.
  Zunächst zeigen wir, dass auch F_0 und F_1 unerfüllbar sind.
  - Sei F_0 erfüllbar und $I \models F_0$. Dann sei $J = I \setminus \{A\}$.
    Z.zg. $J \models F$. Da F in konjunktiver Normalform vorliegt, muss $J \models D$ für alle $D \in F$ gelten.
    - Sei $D \in F$, so dass $\neg A \in D$. Da $(\neg A)^J = 1$ gilt $D^J = 1$.
    - Sei $D \in F$, so dass $\neg A \notin D$. Dann ist $D \setminus \{A\} \in F_0$ und da $F_0^I = 1$ gilt auch $(D \setminus \{A\})^I = 1$. Wie bereits bemerkt gilt $A \notin \text{Atome}(D \setminus \{A\})$ und damit $(D \setminus \{A\})^J = (D \setminus \{A\})^I = 1$. Also auch $D^J = 1$.

    Also ist $J \models F$. Gemäß Annahme ist F aber unerfüllbar $\rightarrow$ Widerspruch. Also ist F_0 unerfüllbar.
  - Analog für F_1.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Beweis (3/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 sind also unerfüllbar und $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$. Damit können wir die Induktionshypothese auf F_0 und F_1 anwenden und erhalten $\emptyset \in \text{Res}^*(F_0)$ und $\emptyset \in \text{Res}^*(F_1)$. Also existieren $D_1, \ldots, D_m \subseteq \mathcal{L}$, so dass
  - $D_m = \emptyset$ und (die Herleitung des leeren Disjunktionsgliedes)
  - für jedes $1 \leq i \leq m$ gilt $D_i \in F_0$ oder D_i ist Resolvent von $\{D_j, D_\ell\}$ bzgl. $A_k \neq A$ mit $j, \ell < i$.

Beweis (3/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 sind also unerfüllbar und $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$. Damit können wir die Induktionshypothese auf F_0 und F_1 anwenden und erhalten $\emptyset \in \text{Res}^*(F_0)$ und $\emptyset \in \text{Res}^*(F_1)$. Also existieren $D_1, \ldots, D_m \subseteq \mathcal{L}$, so dass
  - $D_m = \emptyset$ und (die Herleitung des leeren Disjunktionsgliedes)
  - für jedes $1 \leq i \leq m$ gilt $D_i \in F_0$ oder D_i ist Resolvent von $\{D_j, D_\ell\}$ bzgl. $A_k \neq A$ mit $j, \ell < i$.

  Wir konstruieren $D'_1, \ldots, D'_m \subseteq \mathcal{L}$, so dass $D'_i = D_i$ oder $D'_i = D_i \cup \{A\}$.

  1. $D'_i = D_i$ für alle $D_i \in F_0$ und $D_i \in F$.
  2. $D'_i = D_i \cup \{A\}$ für alle $D_i \in F_0$ und $D_i \notin F$.
  3. D'_i ist Resolvent von $\{D'_j, D'_\ell\}$ bzgl. A_k für alle D_i die als Resolvent von $\{D_j, D_\ell\}$ bzgl. A_k mit $j, \ell < i$ entstanden.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Beweis (3/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: F_0 bzw. F_1 sind also unerfüllbar und $A \notin \text{Atome}(F_0)$ und $A \notin \text{Atome}(F_1)$. Damit können wir die Induktionshypothese auf F_0 und F_1 anwenden und erhalten $\emptyset \in \text{Res}^*(F_0)$ und $\emptyset \in \text{Res}^*(F_1)$. Also existieren $D_1, \ldots, D_m \subseteq \mathcal{L}$, so dass
  - $D_m = \emptyset$ und (die Herleitung des leeren Disjunktionsgliedes)
  - für jedes $1 \leq i \leq m$ gilt $D_i \in F_0$ oder D_i ist Resolvent von $\{D_j, D_\ell\}$ bzgl. $A_k \neq A$ mit $j, \ell < i$.

  Wir konstruieren $D'_1, \ldots, D'_m \subseteq \mathcal{L}$, so dass $D'_i = D_i$ oder $D'_i = D_i \cup \{A\}$.

  1. $D'_i = D_i$ für alle $D_i \in F_0$ und $D_i \in F$.
  2. $D'_i = D_i \cup \{A\}$ für alle $D_i \in F_0$ und $D_i \notin F$.
  3. D'_i ist Resolvent von $\{D'_j, D'_\ell\}$ bzgl. A_k für alle D_i die als Resolvent von $\{D_j, D_\ell\}$ bzgl. A_k mit $j, \ell < i$ entstanden.

  Dies ist eine gültige Herleitung von D'_m, denn $D'_i \in F$ in den Fällen 1 und 2.

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Beweis (4/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: Betrachten wir D'_m. Es gilt entweder $D'_m = \emptyset$ oder $D'_m = \{A\}$, da $D_m = \emptyset$. Also gilt

$$\emptyset \in \text{Res}^*(F) \qquad \text{oder} \qquad \{A\} \in \text{Res}^*(F)$$

Beweis (4/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: Betrachten wir D'_m. Es gilt entweder $D'_m = \emptyset$ oder $D'_m = \{A\}$, da $D_m = \emptyset$. Also gilt

  $$\emptyset \in \text{Res}^*(F) \qquad \text{oder} \qquad \{A\} \in \text{Res}^*(F)$$

  Nun wiederholen wir diese Konstruktion analog für F_1 und erhalten

  $$\emptyset \in \text{Res}^*(F) \qquad \text{oder} \qquad \{\neg A\} \in \text{Res}^*(F)$$

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Beweis (4/4).

Sei F unerfüllbar. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $|\text{Atome}(F)|$.

- IS: Betrachten wir D'_m. Es gilt entweder $D'_m = \emptyset$ oder $D'_m = \{A\}$, da $D_m = \emptyset$. Also gilt

  $$\emptyset \in \text{Res}^*(F) \qquad \text{oder} \qquad \{A\} \in \text{Res}^*(F)$$

  Nun wiederholen wir diese Konstruktion analog für F_1 und erhalten

  $$\emptyset \in \text{Res}^*(F) \qquad \text{oder} \qquad \{\neg A\} \in \text{Res}^*(F)$$

  Damit gilt $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$ (entweder direkt oder durch einen weiteren Resolutionsschritt). □

Illustration

Sei F die konjunktive Normalform
$\big\{\{A_0\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_0, A_1, A_3\}, \{A_2, \neg A_3\}, \{\neg A_0, \neg A_2, \neg A_3\}\big\}_\wedge$
Wir wählen Atom A_3 und konstruieren F_0 und F_1:

Illustration

Sei F die konjunktive Normalform
$\big\{\{A_0\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_0, A_1, A_3\}, \{A_2, \neg A_3\}, \{\neg A_0, \neg A_2, \neg A_3\}\big\}_\wedge$
Wir wählen Atom A_3 und konstruieren F_0 und F_1:
$F_0 = \big\{\{A_0\}, \{\neg A_1\}, \{\neg A_0, A_1\}\big\}_\wedge$

Illustration

Sei F die konjunktive Normalform

$\big\{\{A_0\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_0, A_1, A_3\}, \{A_2, \neg A_3\}, \{\neg A_0, \neg A_2, \neg A_3\}\big\}_\wedge$

Wir wählen Atom A_3 und konstruieren F_0 und F_1:

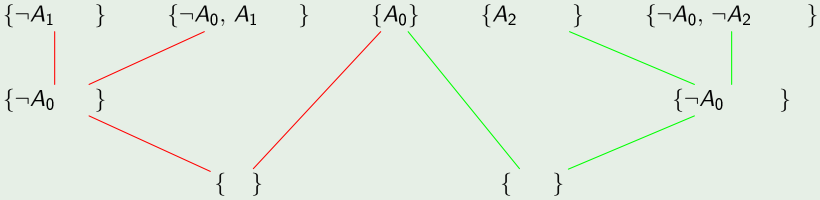
$F_0 = \big\{\{A_0\}, \{\neg A_1\}, \{\neg A_0, A_1\}\big\}_\wedge$

$F_1 = \big\{\{A_0\}, \{A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_2\}\big\}_\wedge$

Aussagenlogik — Vollständigkeit

Illustration

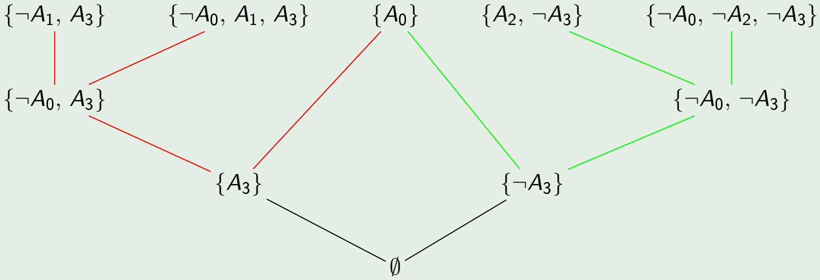
Sei F die konjunktive Normalform
$\big\{\{A_0\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_0, A_1, A_3\}, \{A_2, \neg A_3\}, \{\neg A_0, \neg A_2, \neg A_3\}\big\}_\wedge$
Wir wählen Atom A_3 und konstruieren F_0 und F_1:
$F_0 = \big\{\{A_0\}, \{\neg A_1\}, \{\neg A_0, A_1\}\big\}_\wedge$
$F_1 = \big\{\{A_0\}, \{A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_2\}\big\}_\wedge$



Aussagenlogik — Vollständigkeit

Illustration

Sei F die konjunktive Normalform
$\big\{\{A_0\}, \{\neg A_1, A_3\}, \{\neg A_0, A_1, A_3\}, \{A_2, \neg A_3\}, \{\neg A_0, \neg A_2, \neg A_3\}\big\}_\wedge$
Wir wählen Atom A_3 und konstruieren F_0 und F_1:
$F_0 = \big\{\{A_0\}, \{\neg A_1\}, \{\neg A_0, A_1\}\big\}_\wedge$
$F_1 = \big\{\{A_0\}, \{A_2\}, \{\neg A_0, \neg A_2\}\big\}_\wedge$



Korollar (Korrektheit und Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{Pow}(\mathcal{L})$ eine (evtl. unendliche) konjunktive Normalform. Dann ist $\mathcal{F}$ unerfüllbar gdw. $\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\mathcal{F})$ ist.

Deduktion

Aussagenlogik — Deduktion

Motivation

- $\text{Res}^*(F)$ kann sehr groß werden
- Beweis der Vollständigkeit zeigt Weg ohne (vollständige) Berechnung von $\text{Res}^*(F)$
- denn es reicht eine Herleitung von $\emptyset$

Definition

Sei $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.
Eine Sequenz $D_1, \ldots, D_m \subseteq \mathcal{L}$ heißt **Deduktion** gdw.
(auch: Herleitung oder Widerspruchsbeweis)

- $D_m = \emptyset$ und
- für jedes $1 \leq i \leq m$ gilt
  - $D_i \in F$ oder
  - es existieren $j, \ell < i$ und $k \in \mathbb{N}$, so dass D_i die Resolvente von $\{D_j, D_\ell\}$ bzgl. A_k ist

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \big\{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\big\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ Element von F

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ Element von F
2. $\{\neg A_0\}$ Element von F

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ Element von F
2. $\{\neg A_0\}$ Element von F
3. $\{\neg A_1\}$ Resolvent von $\{1, 2\}$

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ — Element von F
2. $\{\neg A_0\}$ — Element von F
3. $\{\neg A_1\}$ — Resolvent von {1, 2}
4. $\{A_2, A_1\}$ — Element von F

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ Element von F
2. $\{\neg A_0\}$ Element von F
3. $\{\neg A_1\}$ Resolvent von $\{1, 2\}$
4. $\{A_2, A_1\}$ Element von F
5. $\{A_2\}$ Resolvent von $\{3, 4\}$

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ — Element von F
2. $\{\neg A_0\}$ — Element von F
3. $\{\neg A_1\}$ — Resolvent von {1, 2}
4. $\{A_2, A_1\}$ — Element von F
5. $\{A_2\}$ — Resolvent von {3, 4}
6. $\{\neg A_2\}$ — Element von F

Aussagenlogik — Deduktion

Intuition

- Deduktion ist Folge von Disjunktionsgliedern endend mit $\emptyset$
- jedes Folgenglied (inkl. $\emptyset$) ist
  - ein Disjunktionsglied der Formel oder
  - ergibt sich per Resolution aus vorhergehenden Folgengliedern

Beispiel

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

1. $\{A_0, \neg A_1\}$ — Element von F
2. $\{\neg A_0\}$ — Element von F
3. $\{\neg A_1\}$ — Resolvent von {1, 2}
4. $\{A_2, A_1\}$ — Element von F
5. $\{A_2\}$ — Resolvent von {3, 4}
6. $\{\neg A_2\}$ — Element von F
7. $\emptyset$ — Resolvent von {5, 6}

Aussagenlogik — Deduktion

Theorem

Eine konjunktive Normalform $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ ist unerfüllbar gdw. es eine Deduktion gibt.

Anmerkungen

- Resolution zeigt bei Erfolg (Deduktion) Unerfüllbarkeit
- Resolution benötigt konjunktive Normalform

Aussagenlogik — Deduktion

Theorem

Eine konjunktive Normalform $\mathcal{F} \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$ ist unerfüllbar gdw. es eine Deduktion gibt.

Anmerkungen

- Resolution zeigt bei Erfolg (Deduktion) Unerfüllbarkeit
- Resolution benötigt konjunktive Normalform
- soll F allgemeingültig gezeigt werden, dann
  - Negation von F; also $\neg F$
    (F Tautologie gdw. $\neg F$ unerfüllbar)
  - Transformation von $\neg F$ in konjunktive Normalform
  - Konstruktion Deduktion — Anwendung Resolution
  - existiert diese, dann ist $\neg F$ unerfüllbar und damit F Tautologie

Beispiel

Tautologie-Beweis für $\big((\neg\text{Probe} \rightarrow \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}\big) \rightarrow \text{Probe}$

Aussagenlogik — Deduktion

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg \text{Probe} \rightarrow \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \rightarrow \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg \text{Probe} \rightarrow \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \rightarrow \text{Probe}\Big)$

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \land \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \land \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \lor \text{Regen}) \land \neg\text{Regen} \land \neg\text{Probe}$

Aussagenlogik — Deduktion

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen} \wedge \neg\text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg\text{Regen}\}, \{\neg\text{Probe}\}\big\}_{\wedge}$

Aussagenlogik — Deduktion

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg \text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg \text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen} \wedge \neg \text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg \text{Regen}\}, \{\neg \text{Probe}\}\big\}_{\wedge}$
4. Konstruktion Deduktion:
   1. $\{\text{Probe}, \text{Regen}\}$ Element von F

Aussagenlogik — Deduktion

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg \text{Probe} \rightarrow \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \rightarrow \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg \text{Probe} \rightarrow \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \rightarrow \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen} \wedge \neg \text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg \text{Regen}\}, \{\neg \text{Probe}\}\big\}_{\wedge}$
4. Konstruktion Deduktion:
   1. $\{\text{Probe}, \text{Regen}\}$ Element von F
   2. $\{\neg \text{Probe}\}$ Element von F

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg \text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg \text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen} \wedge \neg \text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg \text{Regen}\}, \{\neg \text{Probe}\}\big\}_\wedge$
4. Konstruktion Deduktion:
   1. $\{\text{Probe}, \text{Regen}\}$ — Element von F
   2. $\{\neg \text{Probe}\}$ — Element von F
   3. $\{\text{Regen}\}$ — Resolvent von {1, 2}

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen} \wedge \neg\text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg\text{Regen}\}, \{\neg\text{Probe}\}\big\}_{\wedge}$
4. Konstruktion Deduktion:
   1. $\{\text{Probe}, \text{Regen}\}$ Element von F
   2. $\{\neg\text{Probe}\}$ Element von F
   3. $\{\text{Regen}\}$ Resolvent von {1, 2}
   4. $\{\neg\text{Regen}\}$ Element von F

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg\text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg\text{Regen} \wedge \neg\text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg\text{Regen}\}, \{\neg\text{Probe}\}\big\}_\wedge$
4. Konstruktion Deduktion:
   1. $\{\text{Probe}, \text{Regen}\}$ — Element von F
   2. $\{\neg\text{Probe}\}$ — Element von F
   3. $\{\text{Regen}\}$ — Resolvent von {1, 2}
   4. $\{\neg\text{Regen}\}$ — Element von F
   5. $\emptyset$ — Resolvent von {3, 4}

Beispiel

Tautologie-Beweis für $((\neg \text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \to \text{Probe}$

1. Negation $\neg\Big(((\neg \text{Probe} \to \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen}) \to \text{Probe}\Big)$
2. Negationsnormalform $(\text{Probe} \vee \text{Regen}) \wedge \neg \text{Regen} \wedge \neg \text{Probe}$
3. konjunktive Normalform
   $F = \big\{\{\text{Probe}, \text{Regen}\}, \{\neg \text{Regen}\}, \{\neg \text{Probe}\}\big\}_\wedge$
4. Konstruktion Deduktion:
   1. $\{\text{Probe}, \text{Regen}\}$ — Element von F
   2. $\{\neg \text{Probe}\}$ — Element von F
   3. $\{\text{Regen}\}$ — Resolvent von {1, 2}
   4. $\{\neg \text{Regen}\}$ — Element von F
   5. $\emptyset$ — Resolvent von {3, 4}
5. Schlussfolgerung (hier: Tautologiebeweis erbracht)

Aussagenlogik

Kalküle

Definition

Ein Kalkül ist eine Menge von syntaktischen Umformungsregeln, mit der man semantische Eigenschaften einer Teilmenge aller Formeln nachweisen kann

Aussagenlogik — Kalkül

Definition

Ein Kalkül ist eine Menge von syntaktischen Umformungsregeln,
mit der man semantische Eigenschaften
einer Teilmenge aller Formeln nachweisen kann

Beispiel

Resolutionskalkül:

- Teilmenge: Formeln in konjunktiver Normalform
- Umformungsregeln:
  - Resolventenbildung und Hinzufügen zur Formelmenge
  - Erfolg bei leerem Disjunktionsglied
- Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_2) \wedge (A_0 \vee A_3 \vee \neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Aussagenlogik — Kalkül

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_2) \wedge (A_0 \vee A_3 \vee \neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_2) \wedge (A_0 \vee A_3 \vee \neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_0 \vee A_3 \vee \neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Aussagenlogik — Kalkül

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_0 \vee A_3 \vee \neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

$$(A_1 \vee \neg A_1)$$

Tautologie

Beispiel

Transformation in konjunktive Normalform und Tautologietest:

- Teilmenge: Formeln in Negationsnormalform
- Umformungsregeln:
  - Distributivgesetze für $\vee$
  - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
  - Erfolg bei leerer Formel
- Eigenschaft: Tautologie

Anwendung

Erfolg! Tautologie

Aussagenlogik — Kalkül

Beispiel

HORN-Kalkül:

- Teilmenge: HORN-Formeln
- Umformungsregeln:
  - Finde Implikation $\widetilde{1} \to A$ und entferne sie (oder $() \to A$)
    und alle Vorkommen vom A (leere Konjunktion $= \widetilde{1}$)
  - Erfolg bei Implikation $\widetilde{1} \to \widetilde{0}$ (oder $() \to A$)
- Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Beispiel

HORN-Kalkül:

- Teilmenge: HORN-Formeln
- Umformungsregeln:
  - Finde Implikation $\widetilde{1} \to A$ und entferne sie und alle Vorkommen vom A (oder $() \to A$) (leere Konjunktion $= \widetilde{1}$)
  - Erfolg bei Implikation $\widetilde{1} \to \widetilde{0}$ (oder $() \to A$)
- Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Anwendung

$$(\widetilde{1} \to A_1) \wedge ((A_1 \wedge A_2) \to A_0) \wedge ((A_1 \wedge A_4 \wedge A_0) \to A_3) \wedge (A_1 \to A_2) \wedge ((A_0 \wedge A_1 \wedge A_4) \to \widetilde{0})$$

erfüllbar

Beispiel

HORN-Kalkül:

- Teilmenge: HORN-Formeln
- Umformungsregeln:
  - Finde Implikation $\widetilde{1} \to A$ und entferne sie und alle Vorkommen vom A (oder $() \to A$) (leere Konjunktion $= \widetilde{1}$)
  - Erfolg bei Implikation $\widetilde{1} \to \widetilde{0}$ (oder $() \to A$)
- Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Anwendung

$$((\quad A_2) \to A_0) \land ((\quad A_4 \land A_0) \to A_3) \land$$

$$(\quad \to A_2) \land ((A_0 \land \quad A_4) \to \widetilde{0})$$

erfüllbar

Beispiel

HORN-Kalkül:

- Teilmenge: HORN-Formeln
- Umformungsregeln:
  - Finde Implikation $\widetilde{1} \to A$ und entferne sie und alle Vorkommen vom A (oder $() \to A$) (leere Konjunktion $= \widetilde{1}$)
  - Erfolg bei Implikation $\widetilde{1} \to \widetilde{0}$ (oder $() \to A$)
- Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Anwendung

$$((\quad) \to A_0) \wedge ((\quad A_4 \wedge A_0) \to A_3) \wedge$$
$$((A_0 \wedge \quad A_4) \to \widetilde{0})$$

erfüllbar

Aussagenlogik — Kalkül

Beispiel

HORN-Kalkül:

- Teilmenge: HORN-Formeln
- Umformungsregeln:
  - Finde Implikation $\widetilde{1} \to A$ und entferne sie und alle Vorkommen vom A (oder $() \to A$) (leere Konjunktion $= \widetilde{1}$)
  - Erfolg bei Implikation $\widetilde{1} \to \widetilde{0}$ (oder $() \to A$)
- Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Anwendung

$$((\quad A_4 \quad) \to A_3) \land$$

$$((\quad A_4) \to \widetilde{0})$$

kein Erfolg

erfüllbar

Definition

Ein Kalkül ist

- korrekt gdw. bei Erfolg die semantischen Eigenschaften gelten
- vollständig gdw. bei Vorliegen der semantischen Eigenschaften Erfolg erreicht wird

Definition

Ein Kalkül ist

- korrekt gdw. bei Erfolg die semantischen Eigenschaften gelten
- vollständig gdw. bei Vorliegen der semantischen Eigenschaften Erfolg erreicht wird

Beispiel

für den Resolutionskalkül:

- Korrektheit: Wenn $\underbrace{\emptyset \in \mathrm{Res}^*(F)}_{\text{Erfolgsbedingung}}$, dann ist $\underbrace{F \text{ unerfüllbar}}_{\text{semantische Eigenschaft}}$

Definition

Ein Kalkül ist

- korrekt gdw. bei Erfolg die semantischen Eigenschaften gelten
- vollständig gdw. bei Vorliegen der semantischen Eigenschaften Erfolg erreicht wird

Beispiel

für den Resolutionskalkül:

- Korrektheit: Wenn $\underbrace{\emptyset \in \text{Res}^*(F)}_{\text{Erfolgsbedingung}}$, dann ist $\underbrace{F \text{ unerfüllbar}}_{\text{semantische Eigenschaft}}$
- Vollständigkeit: Wenn $\underbrace{F \text{ unerfüllbar}}_{\text{semantische Eigenschaft}}$, dann $\underbrace{\emptyset \in \text{Res}^*(F)}_{\text{Erfolgsbedingung}}$

Notizen

- Korrektheit und Vollständigkeit sind einzeln sehr leicht erreichbar
  - Kalkül, der nie erfolgreich ist, ist korrekt
    (Vorbedingung der Implikation immer falsch)
  - Kalkül, der immer erfolgreich ist, ist vollständig
    (Folgerung der Implikation immer wahr)

Aussagenlogik — Kalkül

Notizen

- Korrektheit und Vollständigkeit sind einzeln sehr leicht erreichbar
  - Kalkül, der nie erfolgreich ist, ist korrekt
    (Vorbedingung der Implikation immer falsch)
  - Kalkül, der immer erfolgreich ist, ist vollständig
    (Folgerung der Implikation immer wahr)
- nur gleichzeitig korrekte und vollständige Kalküle eine Herausforderung

Notizen

- Korrektheit und Vollständigkeit sind einzeln sehr leicht erreichbar
  - Kalkül, der nie erfolgreich ist, ist korrekt
    (Vorbedingung der Implikation immer falsch)
  - Kalkül, der immer erfolgreich ist, ist vollständig
    (Folgerung der Implikation immer wahr)
- nur gleichzeitig korrekte und vollständige Kalküle eine Herausforderung
- hier besprochene Algorithmen liefern
  korrekte und vollständige Kalküle

Aussagenlogik — Kalkül

Frage

Welche Eigenschaften hat folgender Kalkül?

1. Formelmenge: Formeln in Negationsnormalform
2. Umformungsregeln:
   - TSEITIN-Transformation
     (inkl. Transformation in konjunktive Normalform)
   - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
   - Erfolg bei leerer Formel
3. Eigenschaft: Tautologie

Frage

Welche Eigenschaften hat folgender Kalkül?

1. Formelmenge: Formeln in Negationsnormalform
2. Umformungsregeln:
   - TSEITIN-Transformation (inkl. Transformation in konjunktive Normalform)
   - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
   - Erfolg bei leerer Formel
3. Eigenschaft: Tautologie

Lösung

- korrekt:
- vollständig:

Aussagenlogik — Kalkül

Frage

Welche Eigenschaften hat folgender Kalkül?

1. Formelmenge: Formeln in Negationsnormalform
2. Umformungsregeln:
   - TSEITIN-Transformation (inkl. Transformation in konjunktive Normalform)
   - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
   - Erfolg bei leerer Formel
3. Eigenschaft: Tautologie

Lösung

- korrekt: ja ✓
- vollständig:

Frage

Welche Eigenschaften hat folgender Kalkül?

1. Formelmenge: Formeln in Negationsnormalform
2. Umformungsregeln:
   - TSEITIN-Transformation (inkl. Transformation in konjunktive Normalform)
   - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
   - Erfolg bei leerer Formel
3. Eigenschaft: Tautologie

Lösung

- korrekt: ja ✓
- vollständig: nein ✗

Aussagenlogik — Kalkül

Frage

Welche Eigenschaften hat folgender Kalkül?

1. Formelmenge: Formeln in Negationsnormalform
2. Umformungsregeln:
   - TSEITIN-Transformation (inkl. Transformation in konjunktive Normalform)
   - Entferne Disjunktionsglieder, die ein Atom und dessen Negation enthalten (sobald in konjunktiver Normalform)
   - Erfolg bei leerer Formel
3. Eigenschaft: Tautologie

Lösung

- korrekt: ja ✓
- vollständig: nein ✗
  (TSEITIN-Transformation erhält nur Erfüllbarkeit)

Zusammenfassung

Aussagenlogik — Zusammenfassung

Wichtige Konzepte

- Aussagen und Formeln
- Auswertung von Formeln unter Interpretation
- Wahrheitswertetabelle
- Modelle, Widerlegungen, Tautologien, etc.
- Äquivalenz und Ersetzungstheorem
- Negationsnormalform, konjunktive und disjunktive Normalform
- HORN-Formeln und Markierungsalgorithmus
- Kompaktheit
- Problemlösungen für Erfüllbarkeit und Tautologie
- TSEITIN-Transformation und Resolution

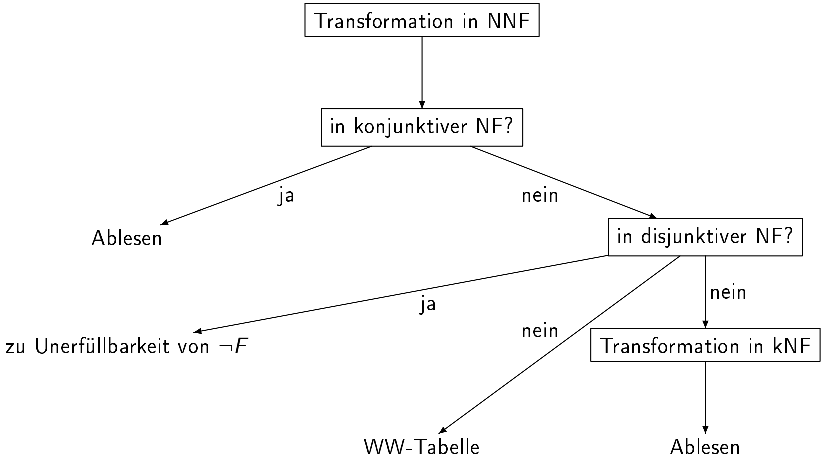
Aussagenlogik — Zusammenfassung

Fähigkeiten

- Modellierung
- Erkennen der verschiedenen Normalformen
- geeignete Wahl der Beweismethode
- alternativ: Wahrheitswertetabelle oder mathematischer Beweis

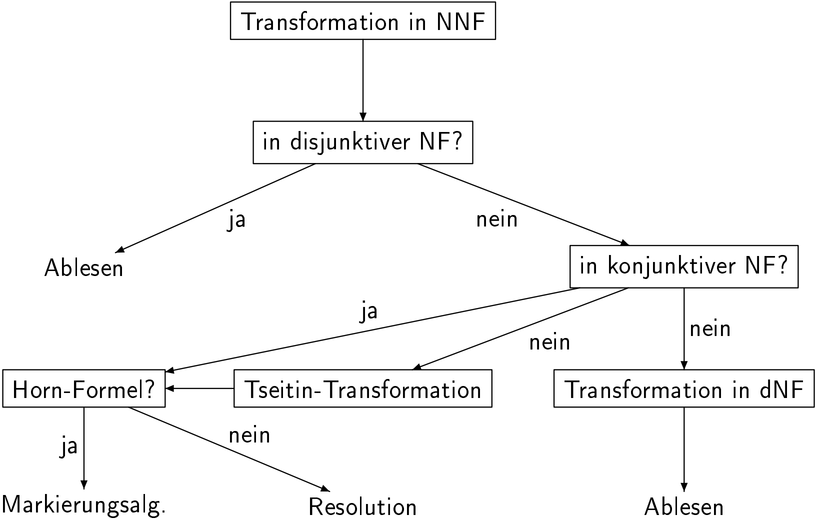
Aussagenlogik — Zusammenfassung

mögliche Beweisstrategie für Tautologie (Widerlegbarkeit):



Aussagenlogik — Zusammenfassung

mögliche Beweisstrategie für Erfüllbarkeit (Unerfüllbarkeit):



Aussagenlogik

Modellierung

Halten und Parken — StVO I, § 12(2) [editiert]

2. Wer sein Fahrzeug verlässt oder länger als drei Minuten hält, der parkt.

Aussagenlogik — Modellierung

Halten und Parken — StVO I, § 12(2) [editiert]

2. Wer sein Fahrzeug verlässt oder länger als drei Minuten hält, der parkt.

$$(\text{Verlassen} \vee \text{3minHalten}) \rightarrow \text{Parken}$$

Warnzeichen — StVO I, § 16(1) [editiert]

1. Schall- und Leuchtzeichen darf nur geben,
   - wer außerhalb geschlossener Ortschaften überholt oder
   - wer sich oder Andere gefährdet sieht.

Aussagenlogik — Modellierung

Warnzeichen — StVO I, § 16(1) [editiert]

1. Schall- und Leuchtzeichen darf nur geben,
   - wer außerhalb geschlossener Ortschaften überholt oder
   - wer sich oder Andere gefährdet sieht.

$$(\text{Hupen} \wedge \text{Blinken}) \rightarrow \Big((\text{Außerorts} \wedge \text{Überholen}) \vee \text{SelbstGef} \vee \text{AndereGef}\Big)$$

Aussagenlogik — Modellierung

Warnzeichen — StVO I, § 16(1) [editiert]

1. Schall- und Leuchtzeichen darf nur geben,
   - wer außerhalb geschlossener Ortschaften überholt oder
   - wer sich oder Andere gefährdet sieht.

$$(\mathsf{Hupen} \land \mathsf{Blinken}) \to$$
$$\Big((\mathsf{Außerorts} \land \mathsf{Überholen}) \lor \mathsf{SelbstGef} \lor \mathsf{AndereGef}\Big)$$

Warnzeichen — StVO I, § 16(2) [editiert]

2. Wer einen Linienbus oder einen Schulbus führt, muss Warnblinklicht einschalten, wenn er sich einer Haltestelle nähert und solange Fahrgäste ein- oder aussteigen, soweit dieses Verhalten angeordnet ist.

Aussagenlogik — Modellierung

Warnzeichen — StVO I, § 16(2) [editiert]

2. Wer einen Linienbus oder einen Schulbus führt, muss Warnblinklicht einschalten, wenn er sich einer Haltestelle nähert <u>und</u> solange Fahrgäste ein- oder aussteigen, soweit dieses Verhalten angeordnet ist.

$$\mathsf{Angeordnet} \to \Big(\big((\mathsf{Einsteigen} \lor \mathsf{Aussteigen} \lor \mathsf{AnfahrtHaltestelle}) \land (\mathsf{Linienbus} \lor \mathsf{Schulbus})\big) \to \mathsf{Warnblink}\Big)$$

Aussagenlogik — Modellierung

Fußgängerüberwege — StVO I, § 26(1) [editiert]

1. An Fußgängerüberwegen haben Fahrzeuge mit Ausnahme von Schienenfahrzeugen den zu Fuß Gehenden sowie Fahrenden von Krankenfahrstühlen oder Rollstühlen, welche den Überweg erkennbar benutzen wollen, das Überqueren zu ermöglichen.

Fußgängerüberwege — StVO I, § 26(1) [editiert]

1. An Fußgängerüberwegen haben Fahrzeuge mit Ausnahme von Schienenfahrzeugen den zu Fuß Gehenden sowie Fahrenden von Krankenfahrstühlen oder Rollstühlen, welche den Überweg erkennbar benutzen wollen, das Überqueren zu ermöglichen.

$$\Big(\text{Überweg} \land \text{Fahrzeug} \land \neg\text{Schienenfahrzeug} \land (\text{Fußgänger} \lor \text{Rollstuhl} \lor \text{Krankenfahrstuhl}) \land \text{Erkennbar}\Big) \rightarrow \text{Vorfahrt}$$

Zusammenfassung

- Vollständigkeit Resolution
- Deduktionen
- Kalküle
- Zusammenfassung
- Modellierung

Vierte Übungsserie erscheint demnächst.