Logik
Vorlesung 5: Grundlagen Resolution

Andreas Maletti

21. November 2014

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Motivation Resolution
2. effiziente Transformation in konjunktive Normalform
3. Grundlagen der Resolution
4. Korrektheit der Resolution

Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Normalformen

Inhalt

Aussagenlogik — Wiederholung

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein Literal gdw.

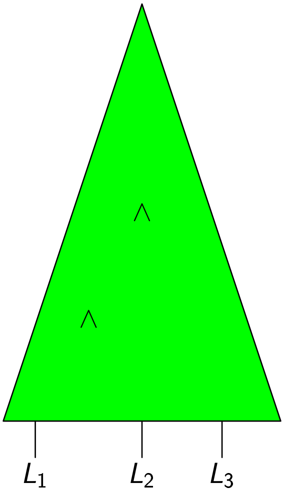
1. $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist oder — positives Literal
2. $F = \neg A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist — negatives Literal

Definition

Eine Formel F ist

- ein Konjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Konjunktion von Literalen)
- ein Disjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Disjunktion von Literalen)

Konjunktionsglied:



Aussagenlogik — Normalformen

Definition

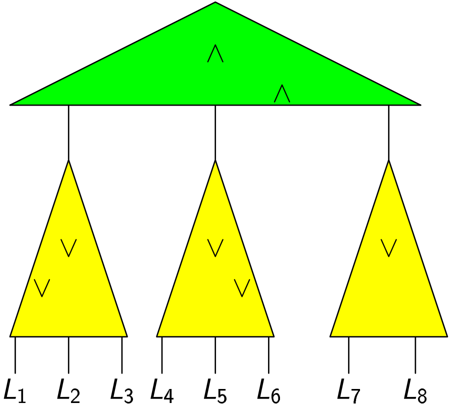
Eine Formel F ist in

- konjunktiver Normalform gdw.
  $F = D_1 \land D_2 \land \cdots \land D_n$ für Disjunktionsglieder $D_1, D_2, \ldots, D_n$
  (Konjunktion von Disjunktionsgliedern)
- disjunktiver Normalform gdw.
  $F = K_1 \lor K_2 \lor \cdots \lor K_n$ für Konjunktionsglieder $K_1, K_2, \ldots, K_n$
  (Disjunktion von Konjunktionsgliedern)

Zusammenfassung

- konjunktive Normalform: Test auf Tautologie einfach
  - F leere Konjunktion ist oder
  - jedes Disjunktionsglied ein Atom und dessen Negation enthält
- disjunktive Normalform: Test auf Erfüllbarkeit einfach
  - ein Konjunktionsglied existiert, in dem kein Atom und dessen Negation gleichzeitig vorkommen

Konjunktive Normalform:



Resolution

Aussagenlogik — Resolution

Überblick

- Beweisschema für Unerfüllbarkeit (bzw. Erfüllbarkeit)
- Eingabe muss in konjunktiver Normalform vorliegen
- Hauptargument ist die Tautologie

$$\Big((F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A)\Big) \leftrightarrow \Big((F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \wedge (F \vee F')\Big)$$

- Versuch der Ableitung des leeren Disjunktionsgliedes (unerfüllbar)

Notwendige Schritte

- effiziente Transformation in konjunktive Normalform
- liefert unerfüllbare Formel immer leeres Disjunktionsglied?
  Vollständigkeit
- effiziente Darstellung der Ableitung

Theorem

Für alle Formeln F_1 und F_2 und $i \in \mathbb{N}$ ist

$$\underbrace{\Big((F_1 \vee A_i) \wedge (F_2 \vee \neg A_i)\Big)}_{F} \leftrightarrow \underbrace{\Big((F_1 \vee A_i) \wedge (F_2 \vee \neg A_i) \wedge (F_1 \vee F_2)\Big)}_{G}$$

eine Tautologie.

Beweis (1/2).

Sei I eine Interpretation. Per Fallunterscheidung:

- Sei $F^I = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} G^I &= (F \wedge (F_1 \vee F_2))^I = \min\big(F^I, (F_1 \vee F_2)^I\big) \\ &= \min\big(0, (F_1 \vee F_2)^I\big) = 0 \end{aligned}$$

Beweis (2/2).

Sei I eine Interpretation. Per Fallunterscheidung:

- Sei $F^I = 1$. Dann ist $(F_1 \vee A_i)^I = 1$ und $(F_2 \vee \neg A_i)^I = 1$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} G^I &= (F \wedge (F_1 \vee F_2))^I = \min\big(F^I, (F_1 \vee F_2)^I\big) \\ &= \min\big(1, (F_1 \vee F_2)^I\big) = (F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I) \end{aligned}$$

  Weitere Fallunterscheidung:

  - Sei $A_i^I = 0$. Dann muss $F_1^I = 1$ gelten, also auch $G^I = 1$.
  - Sei $A_i^I = 1$. Dann muss $F_2^I = 1$ gelten, also auch $G^I = 1$. $\square$

Aussagenlogik — Resolution

1. Schritt: Transformation in konjunktive Normalform

- möglich wie bereits besprochen (Anwendung Distributivität)
- ineffizient
- Transformation in äquivalente Formel
  in konjunktiver Normalform (vermutlich) inhärent ineffizient
  (siehe Berechenbarkeit)
- Resolution zielt auf Erfüllbarkeit ab

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind erfüllbarkeitsäquivalent gdw.

F_1 erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar

Beispiele

- A_1 und A_2 sind erfüllbarkeitsäquivalent (beide erfüllbar)
  aber nicht äquivalent Unterschied bei $I = \{A_1\}$
- A_1 und $A_3 \land \neg A_3$ sind nicht erfüllbarkeitsäquivalent
  (A_1 erfüllbar, aber $A_3 \land \neg A_3$ unerfüllbar)
- alle äquivalenten Formeln sind erfüllbarkeitsäquivalent
  (Erfüllbarkeitsäquivalenz ist schwächere Eigenschaft)

TSEITIN-Transformation

Aussagenlogik — Tseitin-Transformation

Definition

Die Funktion $\mathrm{TF}\colon \mathcal{F} \to \mathrm{Pow}(\mathcal{F})$ ist rekursiv definiert durch

(ordnet einer Formel ihre Teilformeln zu)

- $\mathrm{TF}(A_i) = \{A_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- $\mathrm{TF}(\neg F) = \{\neg F\} \cup \mathrm{TF}(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $\mathrm{TF}(F_1 \wedge F_2) = \{F_1 \wedge F_2\} \cup \mathrm{TF}(F_1) \cup \mathrm{TF}(F_2)$
  für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $\mathrm{TF}(F_1 \vee F_2) = \{F_1 \vee F_2\} \cup \mathrm{TF}(F_1) \cup \mathrm{TF}(F_2)$
  für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

Beispiel

- sei $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$
- dann ist $\mathrm{TF}(F) = \{A_4,\ A_3,\ A_0,\ \neg A_0,\ A_4 \wedge A_3,\ F\}$

Definition

Sei

$$\mathcal{L} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der Literale $(\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F})$

Erinnerung

- $\mathcal{F}$ ist Menge aller Formeln
- $\mathcal{L}$ ist Menge aller Literale
- $\mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$ ist Menge der Teilformeln von F,
  die keine Literale sind

Aussagenlogik — Tseitin-Transformation

Tseitin-Transformation

Sei $F \notin \mathcal{L}$ eine Formel in Negationsnormalform (ohne '$\rightarrow$' und '$\leftrightarrow$') und $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \mathrm{Atome}(F)$ (Atome nicht in F)

1. sei $v \colon (\mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \to A$ eine beliebige injektive Funktion (weise jeder Teilformel, die kein Literal ist, ein neues Atom zu)
2. wir definieren die Funktion $t \colon (\mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ durch
   - $t(F_1 \land F_2) = v(F_1 \land F_2) \leftrightarrow \big(r(F_1) \land r(F_2)\big)$, wobei

     $$r(F') = \begin{cases} F' & \text{falls } F' \in \mathcal{L} \\ v(F') & \text{sonst} \end{cases}$$

   - $t(F_1 \lor F_2) = v(F_1 \lor F_2) \leftrightarrow \big(r(F_1) \lor r(F_2)\big)$
3. Konstruiere $G = v(F) \land \bigwedge_{F' \in \mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L}} t(F')$
4. Transformiere G in konjunktive Normalform

Grigorii Samuilovich Tseitin (* 1936)

- russ. Mathematiker und Linguist
- Entwickler von Algol
- Unterstützer von Esperanto

Aussagenlogik — Tseitin-Transformation

Beispiel

- sei $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$ in Negationsnormalform
- dann ist $\mathrm{TF}(F) = \{A_4,\ A_3,\ A_0,\ \neg A_0,\ A_4 \wedge A_3,\ F\}$
- $\mathrm{Atome}(F) = \{A_4, A_3, A_0\}$ und $\mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L} = \{A_4 \wedge A_3,\ F\}$
- wähle $v(A_4 \wedge A_3) = A_{10}$ und $v(F) = A_{11}$
- berechne
  $t(F) = v(F) \leftrightarrow (v(A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0) = A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)$
  und $t(A_4 \wedge A_3) = v(A_4 \wedge A_3) \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) = A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)$
- erhalte

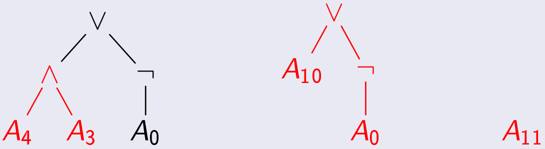
$$G = A_{11} \wedge \Big(A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)\Big) \wedge \Big(A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)\Big)$$

- transformiere G in konjunktive Normalform

Aussagenlogik — Tseitin-Transformation

Illustration

$$G = \Big(A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)\Big) \wedge \Big(A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)\Big) \wedge A_{11}$$



Zusammenfassung

für jede Nichtliteral-Teilformel F'

- weise neues Atom A' zu (via v)
- erzeuge Formel $A' \leftrightarrow F''$, wobei F'' aus F' entsteht, (via t) indem man die direkten Nichtliteral-Teilformeln durch deren zugewiesenes Atom ersetzt

G ist dann Konjunktion der erzeugten Formeln
und dem Atom für F

Problem

- Transformation in konjunktive Normalform nötig
- Wo ist der Vorteil?

effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$
\begin{aligned}
& A_i \leftrightarrow (L_1 \wedge L_2) \\
\leftrightarrow\ & \big(A_i \rightarrow (L_1 \wedge L_2)\big) \wedge \big((L_1 \wedge L_2) \rightarrow A_i\big) \\
\leftrightarrow\ & \big(\neg A_i \vee (L_1 \wedge L_2)\big) \wedge \big(\neg(L_1 \wedge L_2) \vee A_i\big) \\
\leftrightarrow\ & \big(\neg A_i \vee L_1\big) \wedge \big(\neg A_i \vee L_2\big) \wedge \big(\neg L_1 \vee \neg L_2 \vee A_i\big)
\end{aligned}
$$

Aussagenlogik — TSEITIN-Transformation

effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$
\begin{aligned}
& A_i \leftrightarrow (L_1 \vee L_2) \\
\leftrightarrow\ & \Big(A_i \rightarrow (L_1 \vee L_2)\Big) \wedge \Big((L_1 \vee L_2) \rightarrow A_i\Big) \\
\leftrightarrow\ & \Big(\neg A_i \vee L_1 \vee L_2\Big) \wedge \Big(\neg(L_1 \vee L_2) \vee A_i\Big) \\
\leftrightarrow\ & \Big(\neg A_i \vee L_1 \vee L_2\Big) \wedge \Big((\neg L_1 \wedge \neg L_2) \vee A_i\Big) \\
\leftrightarrow\ & \Big(\neg A_i \vee L_1 \vee L_2\Big) \wedge \Big(\neg L_1 \vee A_i\Big) \wedge \Big(\neg L_2 \vee A_i\Big)
\end{aligned}
$$

Beobachtung

- es werden nur Literale kopiert
- effizient; die beiden Umwandlungen liefern direkt KNF

KNF = konjunktive Normalform

Aussagenlogik — Tseitin-Transformation

Beispiel

$$G = \Big(A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)\Big) \wedge \Big(A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)\Big) \wedge A_{11}$$

in konjunktiver Normalform:

$$\Big(\neg A_{10} \vee A_4\Big) \wedge \Big(\neg A_{10} \vee A_3\Big) \wedge \Big(\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}\Big) \wedge$$
$$\Big(\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0\Big) \wedge \Big(\neg A_{10} \vee A_{11}\Big) \wedge \Big(\neg\neg A_0 \vee A_{11}\Big) \wedge$$
$$A_{11}$$

Aussagenlogik — TSEITIN-Transformation

Theorem (TSEITIN, 1968)

Sei $F \notin \mathcal{L}$ eine Formel und G eine TSEITIN-Transformation von F. Dann sind F und G erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis (1/3).

Zwei Richtungen zu zeigen: (nutzen Symbole aus Konstruktion)

($\rightarrow$) Sei F erfüllbar; d.h., es existiert I mit $I \models F$. Wir konstruieren die Interpretation J, so dass $I \cap \mathrm{Atome}(F) = J \cap \mathrm{Atome}(F)$ und für alle $F' \in \mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$ gilt:

$$v(F') \in J \qquad \text{gdw.} \qquad (F')^I = 1$$

(aufgrund der Injektivität ist $v(F') \neq v(F'')$ für $F' \neq F''$)

Die Formel G ist äquivalent zu der Konjunktion aus $v(F)$ und den Formeln $t(F')$ für die Nichtliteral-Teilformeln F' von F. Da $F^I = 1$ ist $v(F) \in J$ und damit $v(F)^J = 1$.

Beweis (2/3).

Als Hilfsaussage beweisen wir zunächst, dass $r(F'')^J = (F'')^I$ für alle Teilformeln $F'' \in \mathrm{TF}(F)$ per Fallunterscheidung.

- Sei F'' ein Literal. Dann ist $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$, da $\mathrm{Atome}(F'') \subseteq \mathrm{Atome}(F)$ und $I \cap \mathrm{Atome}(F) = J \cap \mathrm{Atome}(F)$.
- Sei F'' kein Literal. Dann ist $r(F'')^J = v(F'')^J = (F'')^I$.

Wir steigen wieder in die erste Richtung ein:

($\rightarrow$) z.zg. $t(F')^J = 1$ für alle Teilformeln $F' \in \mathrm{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$. Sei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und $F' = F_1 \circ F_2$. Dann ist $t(F') = v(F') \leftrightarrow (r(F_1) \circ r(F_2))$. Da $v(F')^J = (F')^I$ gilt

$$v(F')^J = (F')^I = (F_1 \circ F_2)^I = (r(F_1) \circ r(F_2))^J$$

womit $t(F')^J = 1$.

Beweis (3/3).

Zwei Richtungen zu zeigen:

($\leftarrow$) Sei nun G erfüllbar; d.h., es existiert J mit $J \models G$. Wir konstruieren die Interpretation $I = J \cap \text{Atome}(F)$. Wir beweisen zunächst wieder $r(F'')^J = (F'')^I$ für alle Teilformeln $F'' \in \text{TF}(F)$ per Induktion.

- IA: Sei F'' ein Literal. Dann ist $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$, da $I = J \cap \text{Atome}(F)$.
- IS: Sei F'' kein Literal. Dann ist $t(F'')^J = 1$. Sei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und $F'' = F_1 \circ F_2$. Dann ist $r(F'')^J = v(F'')^J = (r(F_1) \circ r(F_2))^J$, denn $t(F'') = v(F'') \leftrightarrow (r(F_1) \circ r(F_2))$ ist wahr unter J. Aufgrund der IH gilt also auch

$$r(F'')^J = v(F'')^J = (r(F_1) \circ r(F_2))^J = (F_1 \circ F_2)^I = (F'')^I$$

Damit also $F^I = r(F)^J = v(F)^J = 1$, da $G^J = 1$. □

Frage

Sind F und G auch Tautologie-äquivalent? Gilt

$$F \text{ Tautologie} \qquad \text{gdw.} \qquad G \text{ Tautologie}$$

Antwort

Leider nicht.

- $F = A_0 \vee \neg A_0$ ist eine Tautologie
- $G = A_{10} \wedge \big(A_{10} \leftrightarrow (A_0 \vee \neg A_0)\big)$ ist erfüllbar,
  aber auch widerlegbar (Widerlegung $I = \emptyset$)

Mengendarstellung

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\big(\neg A_{10} \vee A_4\big) \wedge \big(\neg A_{10} \vee A_3\big) \wedge \big(\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}\big) \wedge \big(\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0\big) \wedge \big(\neg A_{10} \vee A_{11}\big) \wedge \big(A_0 \vee A_{11}\big) \wedge A_{11}$$

$$\Big\{\{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \{\neg A_{11}, A_{10}, \neg A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{A_0, A_{11}\}, \{A_{11}\}\Big\}_{\wedge}$$

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Definition

- statt $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, \ldots, L_n$
  schreiben wir auch einfach $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- statt $\bigwedge_{i=1}^{n} M_i$ für Mengen $M_1, \ldots, M_n$
  schreiben wir auch einfach $\{M_1, \ldots, M_n\}_\wedge$
  (normale Menge; '$\}_\wedge$' dient nur als Gedankenstütze)

Wichtiger Unterschied

- $\emptyset$ (leere Disjunktion) ist unerfüllbar
- $\{\}_\wedge$ (leere Konjunktion) ist allgemeingültig

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Vorteile

automatische Berücksichtigung einiger Äquivalenzen

- Kommutativität: $(L_1 \vee L_2) \leftrightarrow (L_2 \vee L_1)$
  beide repräsentiert durch $\{L_1, L_2\}$
- Assoziativität: $((L_1 \vee L_2) \vee L_3) \leftrightarrow (L_1 \vee (L_2 \vee L_3))$
  beide repräsentiert durch $\{L_1, L_2, L_3\}$
- Idempotenz: $(L_1 \vee L_1) \leftrightarrow L_1$
  beide repräsentiert durch $\{L_1\}$

Aussagenlogik — Mengendarstellung

Definition

- Eine Menge $D \subseteq \mathcal{L}$ von Literalen nennen wir auch Disjunktionsglied (oder: Klausel)
- Eine Menge $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ von Disjunktionsgliedern nennen wir auch konjunktive Normalform (oder: Klauselform)

Notizen

- diese Begriffe entsprechen den bisherigen Begriffen
- nur alternative Darstellung

Resolution

Aussagenlogik — Resolution

Definition

Sei $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.
Ein Disjunktionsglied $R \subseteq \mathcal{L}$ ist Resolvent von F gdw.
zwei Disjunktionsglieder $\{D_1, D_2\} \subseteq F$ und ein Atom A_i $(i \in \mathbb{N})$ existieren, so dass

1. $A_i \in D_1$ und $\neg A_i \in D_2$ und
2. $R = \big(D_1 \setminus \{A_i\}\big) \cup \big(D_2 \setminus \{\neg A_i\}\big)$

R heißt dann auch Resolvent von $\{D_1, D_2\}$ bzgl. A_i und resolvent(F) ist die Menge aller Resolventen von F.

Notizen

- identifiziere zwei Disjunktionsglieder D_1 und D_2
  - D_1 enthält Atom A
  - D_2 enthält Literal $\neg A$
- bildet Resolvente durch Vereinigung
  nach Elimination von A in D_1 und von $\neg A$ in D_2

Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{A_0, \neg A_0\}\}_\wedge$$

- $\{A_0, A_2\}$ ist Resolvent von F
- $\{\neg A_1, A_0\}$ ist Resolvent von F
- $\{\neg A_0, A_0\}$ ist Resolvent von F Vorsicht!
  (hier ergibt sich <u>nicht</u> die leere Menge)

Aussagenlogik — Resolution

Theorem (Resolutionslemma)

Seien $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform und R ein Resolvent von F. Dann sind F und $F \cup \{R\}$ äquivalent.

Beweis.

Dann existieren $D_1, D_2 \in F$, so dass R Resolvent von $\{D_1, D_2\}$ bzgl. A ist. Dann können wir F darstellen als

$$F' \wedge \underbrace{(D_1' \vee A)}_{D_1} \wedge \underbrace{(D_2' \vee \neg A)}_{D_2}$$

Wie bereits bewiesen (Anfang der VL und Ersetzungstheorem) ist dies äquivalent zu

$$F' \wedge \underbrace{(D_1' \vee A)}_{D_1} \wedge \underbrace{(D_2' \vee \neg A)}_{D_2} \wedge (D_1' \vee D_2')$$

womit $F \cup \{R\}$ dargestellt wird. □

Definition

Sei $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.

- Sei $\mathrm{Res}(F) = F \cup \mathrm{resolvent}(F)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathrm{Res}^0(F) = F$$
$$\mathrm{Res}^{n+1}(F) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(F))$$

- Die Resolutionshülle von F, bezeichnet $\mathrm{Res}^*(F)$, ist

$$\mathrm{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(F)$$

Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_\wedge$$

- resolvent$(F) = \{\{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}\}_\wedge$ und

  $$\begin{aligned}\mathrm{Res}(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\},\\ &\{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}\}_\wedge\end{aligned}$$

- resolvent$(\mathrm{Res}(F)) =$ resolvent$(F) \cup \{\{A_0\}, \{A_2\}, \emptyset\}_\wedge$ und

  $$\begin{aligned}\mathrm{Res}^2(F) = \{&\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\},\\ &\{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\},\\ &\{A_0\}, \{A_2\}, \emptyset\}_\wedge\end{aligned}$$

Theorem

Sei $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform. Dann sind

1. F und $\mathrm{Res}(F)$ äquivalent und
2. F und $\mathrm{Res}^n(F)$ äquivalent für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis.

1. in der Übung
2. per Induktion
   - Sei $n = 0$. Dann gilt $\mathrm{Res}^n(F) = F$ und damit die Äquivalenz.
   - Seien $\mathrm{Res}^n(F)$ und F äquivalent. Nach 1 sind $\mathrm{Res}^n(F)$ und $\mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(F)) = \mathrm{Res}^{n+1}(F)$ äquivalent. Damit sind auch $\mathrm{Res}^{n+1}(F)$ und F äquivalent. $\square$

Aussagenlogik — Resolution

Theorem (Korrektheit)

Sei $F \subseteq \mathrm{Pow}(\mathcal{L})$ eine konjunktive Normalform.
Falls $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(F)$, dann ist F unerfüllbar.

Beweis.

Gemäß Definition gilt $\mathrm{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(F)$. Da $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(F)$ existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $\emptyset \in \mathrm{Res}^n(F)$.

Da $\emptyset$ (leeres Disjunktionsglied) per Konvention unerfüllbar ist und in einer konjunktiven Normalform vorkommt, ist $\mathrm{Res}^n(F)$ unerfüllbar.

Gemäß dem vorherigen Theorem sind $\mathrm{Res}^n(F)$ und F äquivalent. Also ist auch F unerfüllbar. $\square$

Zusammenfassung

- Motivation Resolution
- Tseitin-Transformation
- Mengendarstellung konjunktiver Normalformen
- Grundlagen Resolution
- Korrektheit Resolution

Dritte Übungsserie ist bereits verfügbar.