

Logik  
Vorlesung 5: Grundlagen Resolution

Andreas Maletti

21. November 2014

## Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 **Aussagenlogik**
  - Syntax und Semantik
  - Äquivalenz und Normalformen
  - Weitere Eigenschaften
  - **Resolution**
- 3 **Prädikatenlogik**
  - Syntax und Semantik
  - Äquivalenz und Normalformen
  - HERBRAND-Theorie
  - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

## heutige Vorlesung

- 1 Motivation Resolution
- 2 effiziente Transformation in konjunktive Normalform
- 3 Grundlagen der Resolution
- 4 Korrektheit der Resolution

Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Normalformen

## Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 **Aussagenlogik**
  - Syntax und Semantik
  - **Äquivalenz und Normalformen**
  - Weitere Eigenschaften
  - **Resolution**
- 3 **Prädikatenlogik**
  - Syntax und Semantik
  - Äquivalenz und Normalformen
  - HERBRAND-Theorie
  - Unifikation und Resolution
- 4 **Ausblick**

## Definition (Literale)

Eine Formel  $F$  ist ein **Literal** gdw.

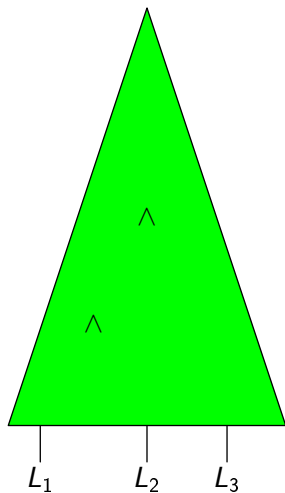
- 1  $F = A_i$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  ist oder positives Literal
- 2  $F = \neg A_i$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  ist negatives Literal

## Definition

Eine Formel  $F$  ist

- ein **Konjunktionsglied** gdw.  
 $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^n L_i$  für Literale  $L_1, L_2, \dots, L_n$   
(Konjunktion von Literalen)
- ein **Disjunktionsglied** gdw.  
 $F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^n L_i$  für Literale  $L_1, L_2, \dots, L_n$   
(Disjunktion von Literalen)

Konjunktionsglied:



## Definition

Eine Formel  $F$  ist in

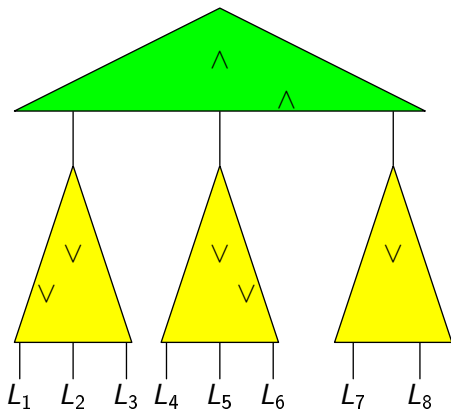
- **konjunktiver Normalform** gdw.  
 $F = D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_n$  für Disjunktionsglieder  $D_1, D_2, \dots, D_n$   
(Konjunktion von Disjunktionsgliedern)
- **disjunktiver Normalform** gdw.  
 $F = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_n$  für Konjunktionsglieder  $K_1, K_2, \dots, K_n$   
(Disjunktion von Konjunktionsgliedern)

## Zusammenfassung

- **konjunktive Normalform:** Test auf Tautologie einfach
  - $F$  leere Konjunktion ist oder
  - jedes Disjunktionsglied ein Atom und dessen Negation enthält
- **disjunktive Normalform:** Test auf Erfüllbarkeit einfach
  - ein Konjunktionsglied existiert, in dem kein Atom und dessen Negation gleichzeitig vorkommen



Konjunktive Normalform:



Resolution

## Überblick

- Beweisschema für Unerfüllbarkeit (bzw. Erfüllbarkeit)
- Eingabe muss in konjunktiver Normalform vorliegen
- Hauptargument ist die Tautologie

$$\left( (F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \right) \leftrightarrow \left( (F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \wedge (F \vee F') \right)$$

- Versuch der Ableitung des leeren Disjunktionsgliedes (unerfüllbar)

## Überblick

- Beweisschema für Unerfüllbarkeit (bzw. Erfüllbarkeit)
- Eingabe muss in konjunktiver Normalform vorliegen
- Hauptargument ist die Tautologie

$$\left( (F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \right) \leftrightarrow \left( (F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \wedge (F \vee F') \right)$$

- Versuch der Ableitung des leeren Disjunktionsgliedes (unerfüllbar)

## Notwendige Schritte

- effiziente Transformation in konjunktive Normalform
- liefert unerfüllbare Formel immer leeres Disjunktionsglied?

Vollständigkeit

- effiziente Darstellung der Ableitung

## Theorem

Für alle Formeln  $F_1$  und  $F_2$  und  $i \in \mathbb{N}$  ist

$$\underbrace{\left( (F_1 \vee A_i) \wedge (F_2 \vee \neg A_i) \right)}_F \leftrightarrow \underbrace{\left( (F_1 \vee A_i) \wedge (F_2 \vee \neg A_i) \wedge (F_1 \vee F_2) \right)}_G$$

eine Tautologie.

## Theorem

Für alle Formeln  $F_1$  und  $F_2$  und  $i \in \mathbb{N}$  ist

$$\underbrace{\left( (F_1 \vee A_i) \wedge (F_2 \vee \neg A_i) \right)}_F \leftrightarrow \underbrace{\left( (F_1 \vee A_i) \wedge (F_2 \vee \neg A_i) \wedge (F_1 \vee F_2) \right)}_G$$

eine Tautologie.

## Beweis (1/2).

Sei  $I$  eine Interpretation. Per Fallunterscheidung:

- Sei  $F^I = 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} G^I &= (F \wedge (F_1 \vee F_2))^I = \min(F^I, (F_1 \vee F_2)^I) \\ &= \min(0, (F_1 \vee F_2)^I) = 0 \end{aligned}$$

## Beweis (2/2).

Sei  $I$  eine Interpretation. Per Fallunterscheidung:

- Sei  $F^I = 1$ . Dann ist  $(F_1 \vee A_i)^I = 1$  und  $(F_2 \vee \neg A_i)^I = 1$ .  
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} G^I &= (F \wedge (F_1 \vee F_2))^I = \min(F^I, (F_1 \vee F_2)^I) \\ &= \min(1, (F_1 \vee F_2)^I) = (F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I) \end{aligned}$$

Weitere Fallunterscheidung:

## Beweis (2/2).

Sei  $I$  eine Interpretation. Per Fallunterscheidung:

- Sei  $F^I = 1$ . Dann ist  $(F_1 \vee A_i)^I = 1$  und  $(F_2 \vee \neg A_i)^I = 1$ .  
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} G^I &= (F \wedge (F_1 \vee F_2))^I = \min(F^I, (F_1 \vee F_2)^I) \\ &= \min(1, (F_1 \vee F_2)^I) = (F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I) \end{aligned}$$

Weitere Fallunterscheidung:

- Sei  $A_i^I = 0$ . Dann muss  $F_1^I = 1$  gelten, also auch  $G^I = 1$ .



## Beweis (2/2).

Sei  $I$  eine Interpretation. Per Fallunterscheidung:

- Sei  $F^I = 1$ . Dann ist  $(F_1 \vee A_i)^I = 1$  und  $(F_2 \vee \neg A_i)^I = 1$ .  
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} G^I &= (F \wedge (F_1 \vee F_2))^I = \min(F^I, (F_1 \vee F_2)^I) \\ &= \min(1, (F_1 \vee F_2)^I) = (F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I) \end{aligned}$$

Weitere Fallunterscheidung:

- Sei  $A_i^I = 0$ . Dann muss  $F_1^I = 1$  gelten, also auch  $G^I = 1$ .
- Sei  $A_i^I = 1$ . Dann muss  $F_2^I = 1$  gelten, also auch  $G^I = 1$ . □

## 1. Schritt: Transformation in konjunktive Normalform

- möglich wie bereits besprochen (Anwendung Distributivität)
- ineffizient

## 1. Schritt: Transformation in konjunktive Normalform

- möglich wie bereits besprochen (Anwendung Distributivität)
- ineffizient
- Transformation in äquivalente Formel  
in konjunktiver Normalform (vermutlich) inhärent ineffizient  
(siehe Berechenbarkeit)

## 1. Schritt: Transformation in konjunktive Normalform

- möglich wie bereits besprochen (Anwendung Distributivität)
- ineffizient
- Transformation in äquivalente Formel  
in konjunktiver Normalform (vermutlich) inhärent ineffizient  
(siehe Berechenbarkeit)
- Resolution zielt auf **Erfüllbarkeit** ab

## 1. Schritt: Transformation in konjunktive Normalform

- möglich wie bereits besprochen (Anwendung Distributivität)
- ineffizient
- Transformation in äquivalente Formel in konjunktiver Normalform (vermutlich) inhärent ineffizient (siehe Berechenbarkeit)
- Resolution zielt auf **Erfüllbarkeit** ab

## Definition

Zwei Formeln  $F_1$  und  $F_2$  sind **erfüllbarkeitsäquivalent** gdw.

$$F_1 \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad F_2 \text{ erfüllbar}$$

## Beispiele

- $A_1$  und  $A_2$  sind erfüllbarkeitsäquivalent (beide erfüllbar)  
aber **nicht** äquivalent Unterschied bei  $I = \{A_1\}$

## Beispiele

- $A_1$  und  $A_2$  sind erfüllbarkeitsäquivalent (beide erfüllbar)  
aber **nicht** äquivalent Unterschied bei  $I = \{A_1\}$
- $A_1$  und  $A_3 \wedge \neg A_3$  sind **nicht** erfüllbarkeitsäquivalent  
( $A_1$  erfüllbar, aber  $A_3 \wedge \neg A_3$  unerfüllbar)

## Beispiele

- $A_1$  und  $A_2$  sind erfüllbarkeitsäquivalent (beide erfüllbar)  
aber **nicht** äquivalent Unterschied bei  $I = \{A_1\}$
- $A_1$  und  $A_3 \wedge \neg A_3$  sind **nicht** erfüllbarkeitsäquivalent  
( $A_1$  erfüllbar, aber  $A_3 \wedge \neg A_3$  unerfüllbar)
- alle äquivalenten Formeln sind erfüllbarkeitsäquivalent  
(Erfüllbarkeitsäquivalenz ist schwächere Eigenschaft)



TSEITIN-Transformation

## Definition

Die Funktion  $TF: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{F})$  ist rekursiv definiert durch  
(ordnet einer Formel ihre Teilformeln zu)

- $TF(A_i) = \{A_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$

## Definition

Die Funktion  $TF: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{F})$  ist rekursiv definiert durch  
(ordnet einer Formel ihre Teilformeln zu)

- $TF(A_i) = \{A_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$
- $TF(\neg F) = \{\neg F\} \cup TF(F)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$

## Definition

Die Funktion  $TF: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{F})$  ist rekursiv definiert durch  
(ordnet einer Formel ihre Teilformeln zu)

- $TF(A_i) = \{A_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$
- $TF(\neg F) = \{\neg F\} \cup TF(F)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$
- $TF(F_1 \wedge F_2) = \{F_1 \wedge F_2\} \cup TF(F_1) \cup TF(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

## Definition

Die Funktion  $TF: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{F})$  ist rekursiv definiert durch  
(ordnet einer Formel ihre Teilformeln zu)

- $TF(A_i) = \{A_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$
- $TF(\neg F) = \{\neg F\} \cup TF(F)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$
- $TF(F_1 \wedge F_2) = \{F_1 \wedge F_2\} \cup TF(F_1) \cup TF(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $TF(F_1 \vee F_2) = \{F_1 \vee F_2\} \cup TF(F_1) \cup TF(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

## Definition

Die Funktion  $TF: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\mathcal{F})$  ist rekursiv definiert durch  
(ordnet einer Formel ihre Teilformeln zu)

- $TF(A_i) = \{A_i\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$
- $TF(\neg F) = \{\neg F\} \cup TF(F)$  für alle  $F \in \mathcal{F}$
- $TF(F_1 \wedge F_2) = \{F_1 \wedge F_2\} \cup TF(F_1) \cup TF(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$
- $TF(F_1 \vee F_2) = \{F_1 \vee F_2\} \cup TF(F_1) \cup TF(F_2)$   
für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$

## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$

## Definition

Sei

$$\mathcal{L} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der Literale

$$(\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F})$$

## Definition

Sei

$$\mathcal{L} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der Literale

$$(\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F})$$

## Erinnerung

- $\mathcal{F}$  ist Menge aller Formeln
- $\mathcal{L}$  ist Menge aller Literale
- $TF(F) \setminus \mathcal{L}$  ist Menge der Teilformeln von  $F$ , die keine Literale sind



## TSEITIN-Transformation

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel in Negationsnormalform (ohne ' $\rightarrow$ ' und ' $\leftrightarrow$ ')  
und  $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \text{Atome}(F)$  (Atome nicht in  $F$ )

## TSEITIN-Transformation

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel in Negationsnormalform (ohne ' $\rightarrow$ ' und ' $\leftrightarrow$ ')  
und  $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \text{Atome}(F)$  (Atome nicht in  $F$ )

- 1 sei  $v: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow A$  eine beliebige injektive Funktion  
(weise jeder Teilformel, die kein Literal ist, ein neues Atom zu)

## TSEITIN-Transformation

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel in Negationsnormalform (ohne ' $\rightarrow$ ' und ' $\leftrightarrow$ ')  
und  $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \text{Atome}(F)$  (Atome nicht in  $F$ )

- 1 sei  $v: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow A$  eine beliebige injektive Funktion  
(weise jeder Teilformel, die kein Literal ist, ein neues Atom zu)
- 2 wir definieren die Funktion  $t: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$  durch
  - $t(F_1 \wedge F_2) = v(F_1 \wedge F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \wedge r(F_2))$ , wobei

$$r(F') = \begin{cases} F' & \text{falls } F' \in \mathcal{L} \\ v(F') & \text{sonst} \end{cases}$$

## TSEITIN-Transformation

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel in Negationsnormalform (ohne ' $\rightarrow$ ' und ' $\leftrightarrow$ ')  
 und  $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \text{Atome}(F)$  (Atome nicht in  $F$ )

- ① sei  $v: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow A$  eine beliebige injektive Funktion  
 (weise jeder Teilformel, die kein Literal ist, ein neues Atom zu)
- ② wir definieren die Funktion  $t: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$  durch
  - $t(F_1 \wedge F_2) = v(F_1 \wedge F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \wedge r(F_2))$ , wobei

$$r(F') = \begin{cases} F' & \text{falls } F' \in \mathcal{L} \\ v(F') & \text{sonst} \end{cases}$$

- $t(F_1 \vee F_2) = v(F_1 \vee F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \vee r(F_2))$

## TSEITIN-Transformation

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel in Negationsnormalform (ohne ' $\rightarrow$ ' und ' $\leftrightarrow$ ')  
 und  $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \text{Atome}(F)$  (Atome nicht in  $F$ )

- ① sei  $v: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow A$  eine beliebige injektive Funktion  
 (weise jeder Teilformel, die kein Literal ist, ein neues Atom zu)
- ② wir definieren die Funktion  $t: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$  durch
  - $t(F_1 \wedge F_2) = v(F_1 \wedge F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \wedge r(F_2))$ , wobei

$$r(F') = \begin{cases} F' & \text{falls } F' \in \mathcal{L} \\ v(F') & \text{sonst} \end{cases}$$

- $t(F_1 \vee F_2) = v(F_1 \vee F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \vee r(F_2))$
- ③ Konstruiere  $G = v(F) \wedge \bigwedge_{F' \in \text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}} t(F')$

## TSEITIN-Transformation

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel in Negationsnormalform (ohne ' $\rightarrow$ ' und ' $\leftrightarrow$ ')  
 und  $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \setminus \text{Atome}(F)$  (Atome nicht in  $F$ )

- ① sei  $v: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow A$  eine beliebige injektive Funktion  
 (weise jeder Teilformel, die kein Literal ist, ein neues Atom zu)
- ② wir definieren die Funktion  $t: (\text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$  durch
  - $t(F_1 \wedge F_2) = v(F_1 \wedge F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \wedge r(F_2))$ , wobei

$$r(F') = \begin{cases} F' & \text{falls } F' \in \mathcal{L} \\ v(F') & \text{sonst} \end{cases}$$

- $t(F_1 \vee F_2) = v(F_1 \vee F_2) \leftrightarrow (r(F_1) \vee r(F_2))$
- ③ Konstruiere  $G = v(F) \wedge \bigwedge_{F' \in \text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}} t(F')$
  - ④ Transformiere  $G$  in konjunktive Normalform

## GRIGORII SAMUILOVICH TSEITIN (\* 1936)

- russ. Mathematiker und Linguist
- Entwickler von ALGOL
- Unterstützer von ESPERANTO



## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$  in Negationsnormalform
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$



## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$  in Negationsnormalform
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$
- $Atome(F) = \{A_4, A_3, A_0\}$  und  $TF(F) \setminus \mathcal{L} = \{A_4 \wedge A_3, F\}$

## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$  in Negationsnormalform
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$
- $\text{Atome}(F) = \{A_4, A_3, A_0\}$  und  $TF(F) \setminus \mathcal{L} = \{A_4 \wedge A_3, F\}$
- wähle  $v(A_4 \wedge A_3) = A_{10}$  und  $v(F) = A_{11}$

## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$  in Negationsnormalform
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$
- $\text{Atome}(F) = \{A_4, A_3, A_0\}$  und  $TF(F) \setminus \mathcal{L} = \{A_4 \wedge A_3, F\}$
- wähle  $v(A_4 \wedge A_3) = A_{10}$  und  $v(F) = A_{11}$
- berechne  
 $t(F) = v(F) \leftrightarrow (v(A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0) = A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)$   
und  $t(A_4 \wedge A_3) = v(A_4 \wedge A_3) \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) = A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)$

## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$  in Negationsnormalform
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$
- $\text{Atome}(F) = \{A_4, A_3, A_0\}$  und  $TF(F) \setminus \mathcal{L} = \{A_4 \wedge A_3, F\}$
- wähle  $v(A_4 \wedge A_3) = A_{10}$  und  $v(F) = A_{11}$

- berechne

$$t(F) = v(F) \leftrightarrow (v(A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0) = A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)$$

$$\text{und } t(A_4 \wedge A_3) = v(A_4 \wedge A_3) \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) = A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)$$

- erhalte

$$G = A_{11} \wedge \left( A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0) \right) \wedge \left( A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) \right)$$

## Beispiel

- sei  $F = (A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0$  in Negationsnormalform
- dann ist  $TF(F) = \{A_4, A_3, A_0, \neg A_0, A_4 \wedge A_3, F\}$
- $Atome(F) = \{A_4, A_3, A_0\}$  und  $TF(F) \setminus \mathcal{L} = \{A_4 \wedge A_3, F\}$
- wähle  $v(A_4 \wedge A_3) = A_{10}$  und  $v(F) = A_{11}$

- berechne

$$t(F) = v(F) \leftrightarrow (v(A_4 \wedge A_3) \vee \neg A_0) = A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)$$

$$\text{und } t(A_4 \wedge A_3) = v(A_4 \wedge A_3) \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) = A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)$$

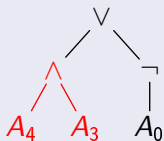
- erhalte

$$G = A_{11} \wedge \left( A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0) \right) \wedge \left( A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) \right)$$

- transformiere  $G$  in konjunktive Normalform

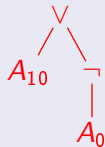
## Illustration

$G =$



## Illustration

$$G = (A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3))$$



## Illustration

$$G = \left( A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3) \right) \wedge \left( A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0) \right)$$

$A_{11}$



## Illustration

$$G = (A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)) \wedge (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)) \wedge A_{11}$$

## Zusammenfassung

für jede Nichtliteral-Teilformel  $F'$

- weise neues Atom  $A'$  zu (via  $v$ )
- erzeuge Formel  $A' \leftrightarrow F''$ , wobei  $F''$  aus  $F'$  entsteht, (via  $t$ )  
indem man die direkten Nichtliteral-Teilformeln durch deren zugewiesenes Atom ersetzt

## Zusammenfassung

für jede Nichtliteral-Teilformel  $F'$

- weise neues Atom  $A'$  zu (via  $v$ )
- erzeuge Formel  $A' \leftrightarrow F''$ , wobei  $F''$  aus  $F'$  entsteht, (via  $t$ )  
indem man die direkten Nichtliteral-Teilformeln durch deren  
zugewiesenes Atom ersetzt

$G$  ist dann Konjunktion der erzeugten Formeln  
und dem Atom für  $F$

## Zusammenfassung

für jede Nichtliteral-Teilformel  $F'$

- weise neues Atom  $A'$  zu (via  $v$ )
- erzeuge Formel  $A' \leftrightarrow F''$ , wobei  $F''$  aus  $F'$  entsteht, (via  $t$ )  
indem man die direkten Nichtliteral-Teilformeln durch deren zugewiesenes Atom ersetzt

$G$  ist dann Konjunktion der erzeugten Formeln  
und dem Atom für  $F$

## Problem

- Transformation in konjunktive Normalform nötig
- Wo ist der Vorteil?

## effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$A_i \leftrightarrow (L_1 \wedge L_2)$$

$$\leftrightarrow \left( A_i \rightarrow (L_1 \wedge L_2) \right) \wedge \left( (L_1 \wedge L_2) \rightarrow A_i \right)$$

$$\leftrightarrow \left( \neg A_i \vee (L_1 \wedge L_2) \right) \wedge \left( \neg(L_1 \wedge L_2) \vee A_i \right)$$

$$\leftrightarrow \left( \neg A_i \vee L_1 \right) \wedge \left( \neg A_i \vee L_2 \right) \wedge \left( \neg L_1 \vee \neg L_2 \vee A_i \right)$$

## effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$A_i \leftrightarrow (L_1 \wedge L_2)$$

$$\leftrightarrow (A_i \rightarrow (L_1 \wedge L_2)) \wedge ((L_1 \wedge L_2) \rightarrow A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee (L_1 \wedge L_2)) \wedge (\neg(L_1 \wedge L_2) \vee A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1) \wedge (\neg A_i \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee \neg L_2 \vee A_i)$$

## effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$A_i \leftrightarrow (L_1 \vee L_2)$$

$$\leftrightarrow (A_i \rightarrow (L_1 \vee L_2)) \wedge ((L_1 \vee L_2) \rightarrow A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1 \vee L_2) \wedge (\neg(L_1 \vee L_2) \vee A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1 \vee L_2) \wedge ((\neg L_1 \wedge \neg L_2) \vee A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1 \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee A_i) \wedge (\neg L_2 \vee A_i)$$

## effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$A_i \leftrightarrow (L_1 \vee L_2)$$

$$\leftrightarrow (A_i \rightarrow (L_1 \vee L_2)) \wedge ((L_1 \vee L_2) \rightarrow A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1 \vee L_2) \wedge (\neg(L_1 \vee L_2) \vee A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1 \vee L_2) \wedge ((\neg L_1 \wedge \neg L_2) \vee A_i)$$

$$\leftrightarrow (\neg A_i \vee L_1 \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee A_i) \wedge (\neg L_2 \vee A_i)$$



## effiziente Transformation in konjunktive Normalform

- wir ersetzen Teilformeln

$$A_i \leftrightarrow (L_1 \vee L_2)$$

$$\leftrightarrow \left( A_i \rightarrow (L_1 \vee L_2) \right) \wedge \left( (L_1 \vee L_2) \rightarrow A_i \right)$$

$$\leftrightarrow \left( \neg A_i \vee L_1 \vee L_2 \right) \wedge \left( \neg(L_1 \vee L_2) \vee A_i \right)$$

$$\leftrightarrow \left( \neg A_i \vee L_1 \vee L_2 \right) \wedge \left( (\neg L_1 \wedge \neg L_2) \vee A_i \right)$$

$$\leftrightarrow \left( \neg A_i \vee L_1 \vee L_2 \right) \wedge \left( \neg L_1 \vee A_i \right) \wedge \left( \neg L_2 \vee A_i \right)$$

## Beobachtung

- es werden nur Literale kopiert
- effizient; die beiden Umwandlungen liefern direkt KNF

KNF = konjunktive Normalform

## Beispiel

$$G = (A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)) \wedge (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)) \wedge A_{11}$$

in konjunktiver Normalform:

$$\begin{aligned} & (\neg A_{10} \vee A_4) \wedge (\neg A_{10} \vee A_3) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}) \wedge \\ & (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (\neg \neg A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ & A_{11} \end{aligned}$$

## Beispiel

$$G = (A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)) \wedge (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)) \wedge A_{11}$$

in konjunktiver Normalform:

$$\begin{aligned} & (\neg A_{10} \vee A_4) \wedge (\neg A_{10} \vee A_3) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}) \wedge \\ & (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (\neg \neg A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ & A_{11} \end{aligned}$$

## Beispiel

$$G = (A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)) \wedge (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)) \wedge A_{11}$$

in konjunktiver Normalform:

$$\begin{aligned} & (\neg A_{10} \vee A_4) \wedge (\neg A_{10} \vee A_3) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}) \wedge \\ & (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (\neg \neg A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ & A_{11} \end{aligned}$$

## Beispiel

$$G = (A_{10} \leftrightarrow (A_4 \wedge A_3)) \wedge (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee \neg A_0)) \wedge A_{11}$$

in konjunktiver Normalform:

$$\begin{aligned} & (\neg A_{10} \vee A_4) \wedge (\neg A_{10} \vee A_3) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}) \wedge \\ & (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ & A_{11} \end{aligned}$$

## Theorem (TSEITIN, 1968)

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel und  $G$  eine TSEITIN-Transformation von  $F$ .  
Dann sind  $F$  und  $G$  erfüllbarkeitsäquivalent.

## Theorem (TSEITIN, 1968)

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel und  $G$  eine TSEITIN-Transformation von  $F$ .  
Dann sind  $F$  und  $G$  erfüllbarkeitsäquivalent.

## Beweis (1/3).

Zwei Richtungen zu zeigen: (nutzen Symbole aus Konstruktion)

( $\rightarrow$ ) Sei  $F$  erfüllbar; d.h., es existiert  $I$  mit  $I \models F$ . Wir konstruieren die Interpretation  $J$ , so dass  $I \cap \text{Atome}(F) = J \cap \text{Atome}(F)$  und für alle  $F' \in \text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$  gilt:

$$v(F') \in J \quad \text{gdw.} \quad (F')^I = 1$$

(aufgrund der Injektivität ist  $v(F') \neq v(F'')$  für  $F' \neq F''$ )

## Theorem (TSEITIN, 1968)

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel und  $G$  eine TSEITIN-Transformation von  $F$ .  
Dann sind  $F$  und  $G$  erfüllbarkeitsäquivalent.

## Beweis (1/3).

Zwei Richtungen zu zeigen: (nutzen Symbole aus Konstruktion)

( $\rightarrow$ ) Sei  $F$  erfüllbar; d.h., es existiert  $I$  mit  $I \models F$ . Wir konstruieren die Interpretation  $J$ , so dass  $I \cap \text{Atome}(F) = J \cap \text{Atome}(F)$  und für alle  $F' \in \text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$  gilt:

$$v(F') \in J \quad \text{gdw.} \quad (F')^I = 1$$

(aufgrund der Injektivität ist  $v(F') \neq v(F'')$  für  $F' \neq F''$ )

Die Formel  $G$  ist äquivalent zu der Konjunktion aus  $v(F)$  und den Formeln  $t(F')$  für die Nichtliteral-Teilformeln  $F'$  von  $F$ .



## Theorem (TSEITIN, 1968)

Sei  $F \notin \mathcal{L}$  eine Formel und  $G$  eine TSEITIN-Transformation von  $F$ .  
Dann sind  $F$  und  $G$  erfüllbarkeitsäquivalent.

## Beweis (1/3).

Zwei Richtungen zu zeigen: (nutzen Symbole aus Konstruktion)

( $\rightarrow$ ) Sei  $F$  erfüllbar; d.h., es existiert  $I$  mit  $I \models F$ . Wir konstruieren die Interpretation  $J$ , so dass  $I \cap \text{Atome}(F) = J \cap \text{Atome}(F)$  und für alle  $F' \in \text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$  gilt:

$$v(F') \in J \quad \text{gdw.} \quad (F')^I = 1$$

(aufgrund der Injektivität ist  $v(F') \neq v(F'')$  für  $F' \neq F''$ )

Die Formel  $G$  ist äquivalent zu der Konjunktion aus  $v(F)$  und den Formeln  $t(F')$  für die Nichtliteral-Teilformeln  $F'$  von  $F$ .

Da  $F^I = 1$  ist  $v(F) \in J$  und damit  $v(F)^J = 1$ .

## Beweis (2/3).

Als Hilfsaussage beweisen wir zunächst, dass  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Fallunterscheidung.

- Sei  $F''$  ein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$ , da  $\text{Atome}(F'') \subseteq \text{Atome}(F)$  und  $I \cap \text{Atome}(F) = J \cap \text{Atome}(F)$ .

## Beweis (2/3).

Als Hilfsaussage beweisen wir zunächst, dass  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Fallunterscheidung.

- Sei  $F''$  ein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$ , da  $\text{Atome}(F'') \subseteq \text{Atome}(F)$  und  $I \cap \text{Atome}(F) = J \cap \text{Atome}(F)$ .
- Sei  $F''$  kein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = v(F'')^J = (F'')^I$ .

## Beweis (2/3).

Als Hilfsaussage beweisen wir zunächst, dass  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Fallunterscheidung.

- Sei  $F''$  ein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$ , da  $\text{Atome}(F'') \subseteq \text{Atome}(F)$  und  $I \cap \text{Atome}(F) = J \cap \text{Atome}(F)$ .
- Sei  $F''$  kein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = v(F'')^J = (F'')^I$ .

Wir steigen wieder in die erste Richtung ein:

( $\rightarrow$ ) z.zg.  $t(F')^J = 1$  für alle Teilformeln  $F' \in \text{TF}(F) \setminus \mathcal{L}$ . Sei  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$  und  $F' = F_1 \circ F_2$ . Dann ist  $t(F') = v(F') \leftrightarrow (r(F_1) \circ r(F_2))$ . Da  $v(F')^J = (F')^I$  gilt

$$v(F')^J = (F')^I = (F_1 \circ F_2)^I = (r(F_1) \circ r(F_2))^J$$

womit  $t(F')^J = 1$ .

Beweis (3/3).

Zwei Richtungen zu zeigen:

- ( $\leftarrow$ ) Sei nun  $G$  erfüllbar; d.h., es existiert  $J$  mit  $J \models G$ . Wir konstruieren die Interpretation  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ . Wir beweisen zunächst wieder  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Induktion.

Beweis (3/3).

Zwei Richtungen zu zeigen:

( $\leftarrow$ ) Sei nun  $G$  erfüllbar; d.h., es existiert  $J$  mit  $J \models G$ . Wir konstruieren die Interpretation  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ . Wir beweisen zunächst wieder  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Induktion.

- **IA:** Sei  $F''$  ein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$ , da  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ .

## Beweis (3/3).

Zwei Richtungen zu zeigen:

( $\leftarrow$ ) Sei nun  $G$  erfüllbar; d.h., es existiert  $J$  mit  $J \models G$ . Wir konstruieren die Interpretation  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ . Wir beweisen zunächst wieder  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Induktion.

- **IA:** Sei  $F''$  ein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$ , da  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ .
- **IS:** Sei  $F''$  kein Literal. Dann ist  $t(F'')^J = 1$ . Sei  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$  und  $F'' = F_1 \circ F_2$ . Dann ist  $r(F'')^J = v(F'')^J = (r(F_1) \circ r(F_2))^J$ , denn  $t(F'') = v(F'') \leftrightarrow (r(F_1) \circ r(F_2))$  ist wahr unter  $J$ . Aufgrund der IH gilt also auch

$$r(F'')^J = v(F'')^J = (r(F_1) \circ r(F_2))^J = (F_1 \circ F_2)^I = (F'')^I$$

## Beweis (3/3).

Zwei Richtungen zu zeigen:

( $\leftarrow$ ) Sei nun  $G$  erfüllbar; d.h., es existiert  $J$  mit  $J \models G$ . Wir konstruieren die Interpretation  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ . Wir beweisen zunächst wieder  $r(F'')^J = (F'')^I$  für alle Teilformeln  $F'' \in \text{TF}(F)$  per Induktion.

- **IA:** Sei  $F''$  ein Literal. Dann ist  $r(F'')^J = (F'')^J = (F'')^I$ , da  $I = J \cap \text{Atome}(F)$ .
- **IS:** Sei  $F''$  kein Literal. Dann ist  $t(F'')^J = 1$ . Sei  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$  und  $F'' = F_1 \circ F_2$ . Dann ist  $r(F'')^J = v(F'')^J = (r(F_1) \circ r(F_2))^J$ , denn  $t(F'') = v(F'') \leftrightarrow (r(F_1) \circ r(F_2))$  ist wahr unter  $J$ . Aufgrund der IH gilt also auch

$$r(F'')^J = v(F'')^J = (r(F_1) \circ r(F_2))^J = (F_1 \circ F_2)^I = (F'')^I$$

Damit also  $F^I = r(F)^J = v(F)^J = 1$ , da  $G^J = 1$ . □



## Frage

Sind  $F$  und  $G$  auch Tautologie-äquivalent? Gilt

$F$  Tautologie      gdw.       $G$  Tautologie

## Frage

Sind  $F$  und  $G$  auch Tautologie-äquivalent? Gilt

$F$  Tautologie      gdw.       $G$  Tautologie

## Antwort

Leider nicht.

- $F = A_0 \vee \neg A_0$  ist eine Tautologie
- $G = A_{10} \wedge (A_{10} \leftrightarrow (A_0 \vee \neg A_0))$  ist erfüllbar,  
aber auch widerlegbar (Widerlegung  $I = \emptyset$ )

Mengendarstellung

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\begin{aligned} & (\neg A_{10} \vee A_4) \wedge (\neg A_{10} \vee A_3) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}) \wedge \\ & (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ & A_{11} \end{aligned}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} (\neg A_{10} \vee A_4) \wedge (\neg A_{10} \vee A_3) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}) \wedge \\ (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} (\neg A_{10} \vee A_4), (\neg A_{10} \vee A_3), (\neg A_4 \vee \neg A_3 \vee A_{10}), \\ (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \\ (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0) \wedge (\neg A_{10} \vee A_{11}) \wedge (A_0 \vee A_{11}) \wedge \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \{ \neg A_{10}, A_4 \}, \{ \neg A_{10}, A_3 \}, \{ \neg A_4, \neg A_3, A_{10} \}, \right. \\ \left. \left( \neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0 \right) \wedge \left( \neg A_{10} \vee A_{11} \right) \wedge \left( A_0 \vee A_{11} \right) \wedge \right. \\ \left. A_{11} \right\}_{\wedge}$$



## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \\ (\neg A_{11} \vee A_{10} \vee \neg A_0), (\neg A_{10} \vee A_{11}), (A_0 \vee A_{11}), \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \\ \{\neg A_{11}, A_{10}, \neg A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{A_0, A_{11}\}, \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \\ \{\neg A_{11}, A_{10}, \neg A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{A_0, A_{11}\}, \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \\ \{\neg A_{11}, A_{10}, \neg A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{A_0, A_{11}\}, \\ A_{11} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Motivation

- wir wollen zunächst Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform einfacher darstellen
- Vereinfachung der Notation und Nutzung der Mengenlehre

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg A_{10}, A_4\}, \{\neg A_{10}, A_3\}, \{\neg A_4, \neg A_3, A_{10}\}, \\ \{\neg A_{11}, A_{10}, \neg A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{A_0, A_{11}\}, \\ \{A_{11}\} \end{array} \right\}_{\wedge}$$

## Definition

- statt  $\bigvee_{i=1}^n L_i$  für Literale  $L_1, \dots, L_n$   
schreiben wir auch einfach  $\{L_1, \dots, L_n\}$

## Definition

- statt  $\bigvee_{i=1}^n L_i$  für Literale  $L_1, \dots, L_n$   
schreiben wir auch einfach  $\{L_1, \dots, L_n\}$
- statt  $\bigwedge_{i=1}^n M_i$  für Mengen  $M_1, \dots, M_n$   
schreiben wir auch einfach  $\{M_1, \dots, M_n\}_\wedge$   
(normale Menge; ' $\}_\wedge$ ' dient nur als Gedankenstütze)

## Definition

- statt  $\bigvee_{i=1}^n L_i$  für Literale  $L_1, \dots, L_n$   
schreiben wir auch einfach  $\{L_1, \dots, L_n\}$
- statt  $\bigwedge_{i=1}^n M_i$  für Mengen  $M_1, \dots, M_n$   
schreiben wir auch einfach  $\{M_1, \dots, M_n\}_\wedge$   
(normale Menge; ' $\}_\wedge$ ' dient nur als Gedankenstütze)

## Wichtiger Unterschied

- $\emptyset$  (leere Disjunktion) ist unerfüllbar
- $\{\}_\wedge$  (leere Konjunktion) ist allgemeingültig



## Vorteile

automatische Berücksichtigung einiger Äquivalenzen

- **Kommutativität:**  $(L_1 \vee L_2) \leftrightarrow (L_2 \vee L_1)$   
beide repräsentiert durch  $\{L_1, L_2\}$

## Vorteile

automatische Berücksichtigung einiger Äquivalenzen

- **Kommutativität:**  $(L_1 \vee L_2) \leftrightarrow (L_2 \vee L_1)$   
beide repräsentiert durch  $\{L_1, L_2\}$
- **Assoziativität:**  $((L_1 \vee L_2) \vee L_3) \leftrightarrow (L_1 \vee (L_2 \vee L_3))$   
beide repräsentiert durch  $\{L_1, L_2, L_3\}$

## Vorteile

automatische Berücksichtigung einiger Äquivalenzen

- **Kommutativität:**  $(L_1 \vee L_2) \leftrightarrow (L_2 \vee L_1)$   
beide repräsentiert durch  $\{L_1, L_2\}$
- **Assoziativität:**  $((L_1 \vee L_2) \vee L_3) \leftrightarrow (L_1 \vee (L_2 \vee L_3))$   
beide repräsentiert durch  $\{L_1, L_2, L_3\}$
- **Idempotenz:**  $(L_1 \vee L_1) \leftrightarrow L_1$   
beide repräsentiert durch  $\{L_1\}$

## Definition

- Eine Menge  $D \subseteq \mathcal{L}$  von Literalen nennen wir auch **Disjunktionsglied** (oder: Klausel)
- Eine Menge  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  von Disjunktionsgliedern nennen wir auch **konjunktive Normalform** (oder: Klauselform)

## Definition

- Eine Menge  $D \subseteq \mathcal{L}$  von Literalen nennen wir auch **Disjunktionsglied** (oder: Klausel)
- Eine Menge  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  von Disjunktionsgliedern nennen wir auch **konjunktive Normalform** (oder: Klauselform)

## Notizen

- diese Begriffe entsprechen den bisherigen Begriffen
- nur alternative Darstellung

Resolution

## Definition

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.

Ein Disjunktionsglied  $R \subseteq \mathcal{L}$  ist **Resolvent von  $F$**  gdw.

zwei Disjunktionsglieder  $\{D_1, D_2\} \subseteq F$  und ein Atom  $A_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) existieren, so dass

- 1  $A_i \in D_1$  und  $\neg A_i \in D_2$  und
- 2  $R = (D_1 \setminus \{A_i\}) \cup (D_2 \setminus \{\neg A_i\})$

$R$  heißt dann auch **Resolvent von  $\{D_1, D_2\}$  bzgl.  $A_i$**  und

$\text{resolvent}(F)$  ist die Menge aller Resolventen von  $F$ .

## Definition

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.

Ein Disjunktionsglied  $R \subseteq \mathcal{L}$  ist **Resolvent von  $F$**  gdw.

zwei Disjunktionsglieder  $\{D_1, D_2\} \subseteq F$  und ein Atom  $A_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) existieren, so dass

- 1  $A_i \in D_1$  und  $\neg A_i \in D_2$  und
- 2  $R = (D_1 \setminus \{A_i\}) \cup (D_2 \setminus \{\neg A_i\})$

$R$  heißt dann auch **Resolvent von  $\{D_1, D_2\}$  bzgl.  $A_i$**  und

$\text{resolvent}(F)$  ist die Menge aller Resolventen von  $F$ .

## Notizen

- identifiziere zwei Disjunktionsglieder  $D_1$  und  $D_2$ 
  - $D_1$  enthält Atom  $A$
  - $D_2$  enthält Literal  $\neg A$
- bildet Resolvente durch Vereinigung nach Elimination von  $A$  in  $D_1$  und von  $\neg A$  in  $D_2$



## Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{A_0, \neg A_0\}\} \wedge$$

## Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{A_0, \neg A_0\}\} \wedge$$

- $\{A_0, A_2\}$  ist Resolvent von  $F$

## Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{A_0, \neg A_0\}\} \wedge$$

- $\{A_0, A_2\}$  ist Resolvent von  $F$
- $\{\neg A_1, A_0\}$  ist Resolvent von  $F$

## Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{A_0, \neg A_0\}\} \wedge$$

- $\{A_0, A_2\}$  ist Resolvent von  $F$
- $\{\neg A_1, A_0\}$  ist Resolvent von  $F$
- $\{\neg A_0, A_0\}$  ist Resolvent von  $F$   
(hier ergibt sich nicht die leere Menge)

Vorsicht!

## Theorem (Resolutionslemma)

Seien  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform und  $R$  ein Resolvent von  $F$ . Dann sind  $F$  und  $F \cup \{R\}$  äquivalent.

## Theorem (Resolutionslemma)

Seien  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform und  $R$  ein Resolvent von  $F$ . Dann sind  $F$  und  $F \cup \{R\}$  äquivalent.

## Beweis.

Dann existieren  $D_1, D_2 \in F$ , so dass  $R$  Resolvent von  $\{D_1, D_2\}$  bzgl.  $A$  ist. Dann können wir  $F$  darstellen als

$$F' \wedge \underbrace{(D_1' \vee A)}_{D_1} \wedge \underbrace{(D_2' \vee \neg A)}_{D_2}$$

Wie bereits bewiesen (Anfang der VL und Ersetzungstheorem) ist dies äquivalent zu

$$F' \wedge \underbrace{(D_1' \vee A)}_{D_1} \wedge \underbrace{(D_2' \vee \neg A)}_{D_2} \wedge (D_1' \vee D_2')$$

womit  $F \cup \{R\}$  dargestellt wird. □

## Definition

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.

- Sei  $\text{Res}(F) = F \cup \text{resolvent}(F)$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\text{Res}^0(F) = F$$

$$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$$

## Definition

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.

- Sei  $\text{Res}(F) = F \cup \text{resolvent}(F)$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\text{Res}^0(F) = F$$

$$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$$

- Die **Resolutionshülle von  $F$** , bezeichnet  $\text{Res}^*(F)$ , ist

$$\text{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$$



## Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_{\wedge}$$

- $\text{resolvent}(F) = \{\{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}\}_{\wedge}$  und

$$\text{Res}(F) = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}, \\ \{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}\}_{\wedge}$$

## Beispiele

$$F = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}\}_{\wedge}$$

- $\text{resolvent}(F) = \{\{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}\}_{\wedge}$  und

$$\text{Res}(F) = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}, \\ \{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}\}_{\wedge}$$

- $\text{resolvent}(\text{Res}(F)) = \text{resolvent}(F) \cup \{\{A_0\}, \{A_2\}, \emptyset\}_{\wedge}$  und

$$\text{Res}^2(F) = \{\{A_0, \neg A_1\}, \{A_2, A_1\}, \{\neg A_0\}, \{\neg A_2\}, \\ \{A_0, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{A_1\}, \\ \{A_0\}, \{A_2\}, \emptyset\}_{\wedge}$$

## Theorem

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform. Dann sind

- 1  $F$  und  $\text{Res}(F)$  äquivalent und
- 2  $F$  und  $\text{Res}^n(F)$  äquivalent für alle  $n \in \mathbb{N}$

## Theorem

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform. Dann sind

- 1  $F$  und  $\text{Res}(F)$  äquivalent und
- 2  $F$  und  $\text{Res}^n(F)$  äquivalent für alle  $n \in \mathbb{N}$

## Beweis.

- 1 in der Übung

## Theorem

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform. Dann sind

- 1  $F$  und  $\text{Res}(F)$  äquivalent und
- 2  $F$  und  $\text{Res}^n(F)$  äquivalent für alle  $n \in \mathbb{N}$

## Beweis.

- 1 in der Übung
- 2 per Induktion
  - Sei  $n = 0$ . Dann gilt  $\text{Res}^n(F) = F$  und damit die Äquivalenz.

## Theorem

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform. Dann sind

- 1  $F$  und  $\text{Res}(F)$  äquivalent und
- 2  $F$  und  $\text{Res}^n(F)$  äquivalent für alle  $n \in \mathbb{N}$

## Beweis.

- 1 in der Übung
- 2 per Induktion
  - Sei  $n = 0$ . Dann gilt  $\text{Res}^n(F) = F$  und damit die Äquivalenz.
  - Seien  $\text{Res}^n(F)$  und  $F$  äquivalent. Nach 1 sind  $\text{Res}^n(F)$  und  $\text{Res}(\text{Res}^n(F)) = \text{Res}^{n+1}(F)$  äquivalent. Damit sind auch  $\text{Res}^{n+1}(F)$  und  $F$  äquivalent. □

## Theorem (Korrektheit)

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.  
Falls  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$ , dann ist  $F$  unerfüllbar.

## Theorem (Korrektheit)

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.  
Falls  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$ , dann ist  $F$  unerfüllbar.

## Beweis.

Gemäß Definition gilt  $\text{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$ . Da  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$  existiert  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\emptyset \in \text{Res}^n(F)$ .



## Theorem (Korrektheit)

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.  
Falls  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$ , dann ist  $F$  unerfüllbar.

## Beweis.

Gemäß Definition gilt  $\text{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$ . Da  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$  existiert  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\emptyset \in \text{Res}^n(F)$ .

Da  $\emptyset$  (leeres Disjunktionsglied) per Konvention unerfüllbar ist und in einer konjunktiven Normalform vorkommt, ist  $\text{Res}^n(F)$  unerfüllbar.

## Theorem (Korrektheit)

Sei  $F \subseteq \text{Pow}(\mathcal{L})$  eine konjunktive Normalform.  
Falls  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$ , dann ist  $F$  unerfüllbar.

## Beweis.

Gemäß Definition gilt  $\text{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$ . Da  $\emptyset \in \text{Res}^*(F)$  existiert  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\emptyset \in \text{Res}^n(F)$ .

Da  $\emptyset$  (leeres Disjunktionsglied) per Konvention unerfüllbar ist und in einer konjunktiven Normalform vorkommt, ist  $\text{Res}^n(F)$  unerfüllbar.

Gemäß dem vorherigen Theorem sind  $\text{Res}^n(F)$  und  $F$  äquivalent.  
Also ist auch  $F$  unerfüllbar. □

- Motivation Resolution
- TSEITIN-Transformation
- Mengendarstellung konjunktiver Normalformen
- Grundlagen Resolution
- Korrektheit Resolution

Dritte Übungsserie ist bereits verfügbar.