Logik
Vorlesung 4: Horn-Logik und Kompaktheit

Andreas Maletti

14. November 2014

Überblick

Inhalt

1. Motivation und mathematische Grundlagen
2. Aussagenlogik
    - Syntax und Semantik
    - Äquivalenz und Normalformen
    - Weitere Eigenschaften
    - Resolution
3. Prädikatenlogik
    - Syntax und Semantik
    - Äquivalenz und Normalformen
    - HERBRAND-Theorie
    - Unifikation und Resolution
4. Ausblick

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Eigenschaften und Konstruktion der Normalformen
2. Horn-Logik
3. Kompaktheitssatz

Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Normalformen

Inhalt

Aussagenlogik — Normalformen

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein Literal gdw.

1. $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist oder — positives Literal
2. $F = \neg A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist — negatives Literal

Literale der Form 1 bzw. 2 heißen positiv bzw. negativ

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in Negationsnormalform falls Negationen ($\neg$) nur in Literalen vorkommen.

Aussagenlogik — Normalformen

Definition

Eine Formel F ist

- ein Konjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Konjunktion von Literalen)
- ein Disjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Disjunktion von Literalen)

- in konjunktiver Normalform gdw.
  $F = D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ für <u>Disjunktionsglieder</u> $D_1, D_2, \ldots, D_n$
  (Konjunktion von Disjunktionsgliedern)
- in disjunktiver Normalform gdw.
  $F = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_n$ für <u>Konjunktionsglieder</u> $K_1, K_2, \ldots, K_n$
  (Disjunktion von Konjunktionsgliedern)

Theorem

Eine Formel F in konjunktiver Normalform ist Tautologie gdw.

- F leere Konjunktion ist oder
- jedes Disjunktionsglied ein Atom und dessen Negation enthält

Beweis (1/2).

Wir beweisen beide Richtungen:

($\leftarrow$) Sei I eine Interpretation.

- Sei F die leere Konjunktion. Dann ist $F^I = 1$ per Konvention.
- Sei $F = \bigwedge_{i=1}^{n} D_i$ für $n \geq 1$ und jedes Disjunktionsglied D_i enthält ein Atom und dessen Negation. Damit hat jedes Disjunktionsglied die Form $D_i = A \vee \neg A \vee D_i'$, woraus $D_i^I = 1$ folgt. Da dies für alle Disjunktionsglieder gilt, gilt auch $F^I = 1$.

Da I beliebig war, ist F eine Tautologie.

Beweis (2/2).

Wir beweisen beide Richtungen:

($\rightarrow$) Per Kontraposition. Z.zg. falls F nicht leer ist und ein Disjunktionsglied existiert, welches nicht gleichzeitig ein Atom und dessen Negation enthält, dann ist F keine Tautologie.

Sei $F = \bigwedge_{i=1}^{n} D_i$ für $n \geq 1$ und sei D ein Disjunktionsglied, welches nicht gleichzeitig ein Atom und dessen Negation enthält. Wir konstruieren die Interpretation

$$I = \{A \in \text{Atome}(F) \mid \neg A \text{ kommt in } D \text{ vor}\}$$

Dann gilt $D^I = 0$, denn

- $L^I = 0$ für jedes positive Literal L in D da $L \notin I$
  ($\neg L$ kann nicht in D vorkommen)
- $L^I = 0$ für jedes negative Literal $L = \neg A$ in D da $A \in I$

Also gilt auch $F^I = 0$, womit F widerlegbar und damit keine Tautologie ist. $\square$

Aussagenlogik — Normalformen

konjunktive Normalform

- alle Disjunktionsglieder müssen immer wahr sein

$\rightarrow$ jedes Disjunktionsglied enthält triviale Tautologie $A \vee \neg A$ für ein Atom A

- keine Tautologie

$$(A_1 \vee A_2) \wedge (A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

- Tautologie

$$(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_2) \wedge (A_0 \vee A_3 \vee \neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_1 \vee \neg A_1)$$

Aussagenlogik — Normalformen

Theorem

Eine Formel F in disjunktiver Normalform ist erfüllbar gdw. ein Konjunktionsglied existiert, welches nicht gleichzeitig ein Atom und dessen Negation enthält

Beweis (1/2).

Wir beweisen wieder beide Richtungen:

($\rightarrow$) Per Kontraposition. Z.zg. wenn jedes Konjunktionsglied ein Atom und dessen Negation enthält, dann ist F unerfüllbar. Sei I eine Interpretation.

- Sei F die leere Disjunktion. Dann ist $F^I = 0$ per Konvention.
- Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n} K_i$ für $n \geq 1$ und jedes Konjunktionsglied K_i enthält ein Atom und dessen Negation. Damit hat jedes Konjunktionsglied die Form $K_i = A \wedge \neg A \wedge K_i'$, woraus $K_i^I = 0$ folgt.
  Da dies für alle Konjunktionsglieder gilt, gilt auch $F^I = 0$.

Da I beliebig war, ist F unerfüllbar.

Beweis (2/2).

Wir beweisen beide Richtungen:

($\leftarrow$) Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n} K_i$ für $n \geq 1$ und sei K ein Konjunktionsglied, welches nicht gleichzeitig ein Atom und dessen Negation enthält. Wir konstruieren die Interpretation

$$I = \{A \in \text{Atome}(F) \mid A \text{ kommt in } K \text{ positiv vor}\}$$

Dann gilt $K^I = 1$, denn

- $L^I = 1$ für jedes positive Literal L in K da $L \in I$
- $L^I = 1$ für jedes negative Literal $L = \neg A$ in K da $A \notin I$

(*A* kann nicht auch positiv in *K* vorkommen)

Also gilt auch $F^I = 1$, womit F erfüllbar ist. □

disjunktive Normalform

- ein Konjunktionsglied muss wahr sein

→ ein Konjunktionsglied darf die trivial unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$ für ein Atom A nicht enthalten

- unerfüllbar

$$(A_1 \wedge \neg A_1) \vee (A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_0) \vee (A_1 \wedge A_4 \wedge \neg A_3 \wedge \neg A_4)$$

- erfüllbar

$$(\neg A_1 \wedge A_0 \wedge A_2 \wedge A_1) \vee (A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2)$$

Zusammenfassung

- konjunktive Normalform: Test auf <u>Tautologie</u> einfach
  - Formel F in konjunktiver Normalform ist Tautologie gdw.
    - F leere Konjunktion ist oder
    - jedes Disjunktionsglied ein Atom und dessen Negation enthält
  - Linearzeitalgorithmus für Tautologie / Allgemeingültigkeit
- disjunktive Normalform: Test auf <u>Erfüllbarkeit</u> einfach
  - Formel F in disjunktiver Normalform ist erfüllbar gdw.
    - ein Konjunktionsglied existiert, in dem kein Atom und dessen Negation gleichzeitig vorkommen
  - Linearzeitalgorithmus für Erfüllbarkeit

Aussagenlogik — Normalformen

Situationsanalyse

- effiziente Algorithmen für Tautologie und Erfüllbarkeit existieren für Formeln in konjunktiver bzw. disjunktiver Normalform
- aber bisher Wahrheitswertetabelle (ineffizient) nötig für Transformation in Normalform
- aus Wahrheitswertetabelle lassen sich zudem Tautologie und Erfüllbarkeit direkt ablesen

$\longrightarrow$ Alternative Mechanismen zur Transformation in Normalform

Transformation in konjunktive Normalform

1. Transformiere in Negationsnormalform
2. Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$F \vee (G \wedge H)$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivität für $\vee$
$(G \wedge H) \vee F$	$(G \vee F) \wedge (H \vee F)$	Distributivität für $\vee$

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Dies terminiert (siehe Übung) und nach Ersetzungstheorem ist die erhaltene Formel äquivalent zu F.
Zudem ist sie dann offenbar in konjunktiver Normalform.

Aussagenlogik — Normalformen

Beispiel

Wir beginnen bereits mit Formel in Negationsnormalform

$$
\begin{array}{ll}
 & A_1 \land \big((A_2 \land \neg A_3) \lor (A_3 \land \neg A_2)\big) \\
\text{äq. zu} & A_1 \land \big((A_2 \land \neg A_3) \lor A_3\big) \land \big((A_2 \land \neg A_3) \lor \neg A_2\big) \\
\text{äq. zu} & A_1 \land (A_2 \lor A_3) \land (\neg A_3 \lor A_3) \land \big((A_2 \land \neg A_3) \lor \neg A_2\big) \\
\text{äq. zu} & A_1 \land (A_2 \lor A_3) \land (\neg A_3 \lor A_3) \land (A_2 \lor \neg A_2) \land (\neg A_3 \lor \neg A_2)
\end{array}
$$

- letzte Formel ist in konjunktiver Normalform
- Was kann ich damit effizient testen? Tautologie
- Ist diese Formel eine Tautologie? ✗ (nein)

Transformation in disjunktive Normalform

1. Transformiere in Negationsnormalform
2. Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$F \wedge (G \vee H)$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	Distributivität für $\wedge$
$(G \vee H) \wedge F$	$(G \wedge F) \vee (H \wedge F)$	Distributivität für $\wedge$

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Dies terminiert ebenso und nach Ersetzungstheorem ist die erhaltene Formel äquivalent zu F.
Zudem ist sie dann offenbar in disjunktiver Normalform.

Beispiel

Wir beginnen bereits mit Formel in Negationsnormalform

$$\begin{aligned} & A_1 \wedge ((A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_3 \wedge \neg A_2)) \\ \text{äq. zu} \quad & (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_3 \wedge \neg A_2) \end{aligned}$$

- letzte Formel ist in disjunktiver Normalform
- Was kann ich damit effizient testen? Erfüllbarkeit
- Ist diese Formel erfülllbar? ✓ (ja)

Diskussion

- beide Transformationen liefern äquivalente Formeln
- beide Transformationen können Formel exponentiell vergrößern (durch Verdopplung der Formel F)
- effiziente Verfahren, die "kleine" äquivalente Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform liefern, unbekannt

Horn-Logik

Aussagenlogik — Horn-Logik

Definition (Horn-Formel)

Eine Formel F ist eine Horn-Formel gdw.

- sie in konjunktiver Normalform ist ($F = \bigwedge_{i=1}^{n} D_i$) und
- jedes Disjunktionsglied D_i höchstens ein positives Literal hat

Beispiele

- keine Horn-Formel

$$A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_3 \vee \neg A_2)$$

- Horn-Formel

$$A_2 \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_1) \wedge (\neg A_3 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee \neg A_6 \vee \neg A_3)$$

Alfred Horn (* 1918; † 2001)

- amer. Mathematiker (Verbandstheorie und univ. Algebra)
- lieferte Basis für Logikprogrammierung

Aussagenlogik — Horn-Logik

Sei $\widetilde{0}$ eine unerfüllbare Formel (z.B. $A \wedge \neg A$)
Sei $\widetilde{1}$ eine Tautologie (z.B. $A \vee \neg A$)

Implikationsform von HORN-Formeln

HORN-Formeln lassen sich als Konjunktion von Implikationen schreiben

- Sei $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee A$ ein Disjunktionsglied

$$\begin{aligned} \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee A \quad & \text{äquivalent zu} \quad \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee A \\ & \text{äquivalent zu} \quad (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A \end{aligned}$$

- Sei $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n$ ein Disjunktionsglied

$$\begin{aligned} \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \quad & \text{äquivalent zu} \quad \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee \widetilde{0} \\ & \text{äquivalent zu} \quad (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow \widetilde{0} \end{aligned}$$

- Sei A ein Disjunktionsglied. Dies ist äquivalent zu $\widetilde{1} \rightarrow A$

Aussagenlogik — Horn-Logik

Beispiel

$$A_2 \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_1) \wedge (\neg A_3 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee \neg A_6 \vee \neg A_3)$$

in Implikationsform:

$$(\widetilde{1} \rightarrow A_2) \wedge ((A_4 \wedge A_1) \rightarrow \widetilde{0}) \wedge (A_3 \rightarrow A_3) \wedge ((A_6 \wedge A_3) \rightarrow A_2)$$

Markierungsalgorithmus

- effizienter Erfüllbarkeitstest für HORN-Formeln (für Formeln in konjunktiver Normalform ist der Tautologietest einfach)
- eine effiziente Transformation in konjunktive Normalform für diesen Zweck in der nächsten VL

Markierungsalgorithmus

Eingabe: HORN-Formel F in Implikationsform

Ausgabe: Erfüllbarkeit von F

1. für jedes Disjunktionsglied $\widetilde{1} \to A$ in F, markiere A
2. für jedes Disjunktionsglied $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$ in F, so dass $A_1, \ldots, A_n$ bereits markiert, $A \neq \widetilde{0}$ und A nicht markiert sind, markiere A (Markierung geändert)
3. falls sich die Markierung geändert hat, gehe zu 2
4. existiert ein Disjunktionsglied $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to \widetilde{0}$ in F, so dass $A_1, \ldots, A_n$ markiert sind, dann liefere **unerfüllbar**
5. liefere **erfüllbar**

Beispiel

HORN-Formel in Implikationsform:

$$(\widetilde{1} \to A_1) \wedge ((A_1 \wedge A_2) \to A_0) \wedge ((A_1 \wedge A_4 \wedge A_0) \to A_3) \wedge (A_1 \to A_2) \wedge ((A_0 \wedge A_1 \wedge A_4) \to \widetilde{0})$$

Markierungsalgorithmus

1. Markiere A mit $\widetilde{1} \to A$ in F
2. Markiere A mit $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$ in F
3. wenn Markierung geändert, dann zurück zu 2
4. existiert $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to \widetilde{0}$ in F?
   Wenn ja, dann liefere **unerfüllbar**
5. liefere **erfüllbar**

Modell: $\{A_0, A_1, A_2\}$

Theorem

Der Markierungsalgorithmus ist korrekt und terminiert bei Eingabeformel F nach spätestens $|\text{Atome}(F)|$ Markierungsschritten

Beweis (1/3).

Wir beweisen insg. 3 Aussagen:

1. Termination: Es werden Atome markiert und eine existierende Markierung wird nicht wieder entfernt
   $\rightarrow$ es kann höchstens $|\text{Atome}(F)|$ Markierungsschritte geben
2. Hilfsaussage: Für jedes markierte Atom A gilt:
   $A \in I$ für alle Modelle I von F. Dies beweisen wir per Induktion über die Anzahl der Iterationen von Schritt 2.
   - Induktionsanfang: Vor der ersten Ausführung von 2 sind nur Atome A mit Disjunktionsglied $\widetilde{1} \rightarrow A$ in F markiert. Sei I ein Modell ($I \models F$), dann gilt $F^I = 1$ und damit auch $(\widetilde{1} \rightarrow A)^I = 1$. Folglich muss $A^I = 1$ gelten und damit $A \in I$.

Beweis (2/3).

2. Hilfsaussage: Für jedes markierte Atom A gilt: $A \in I$ für alle Modelle I von F. Dies beweisen wir per Induktion über die Anzahl der Iterationen von Schritt 2.
   - Induktionsschritt: Es werden Atome A markiert, so dass ein Disjunktionsglied $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ in F existiert, wobei $A_1, \ldots, A_n$ bereits markiert sind. Folglich gilt $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I$ für alle Modelle I von F gemäß Induktionsvoraussetzung. Sei I Modell von F. Dann gilt $F^I = 1$ und damit auch $\big((A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A\big)^I = 1$. Da $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I$ muss $A^I = 1$ gelten, womit $A \in I$ ist.
3. Korrektheit: Wenn **unerfüllbar** geliefert wird, dann existiert Disjunktionsglied $D = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow \widetilde{0}$, so dass $A_1, \ldots, A_n$ markiert sind. Gemäß Hilfaussage gilt damit $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I$ für jedes Modell I von F. Dann gilt aber $D^I = 0$, womit I kein Modell von F ist. Also kann kein Modell von F existieren, womit F unerfüllbar ist.

Beweis (3/3).

3. Korrektheit: Wenn der Algorithmus **erfüllbar** liefert, dann konstruieren wir die Interpretation

$$I = \{A \in \mathrm{Atome}(F) \mid A \text{ ist markiert}\}$$

und zeigen, dass dies ein Modell von F ist. Wir betrachten jedes Disjunktionsglied D von F:

- Sei $D = \widetilde{1} \to A$. Dann wurde A in Schritt 1 markiert und damit $A \in I$. Folglich gilt $D^I = 1$.
- Sei $D = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to \widetilde{0}$. Dann ist ein A_i nicht markiert (denn sonst Ergebnis **unerfüllbar**) und damit $A_i \notin I$. Folglich gilt $D^I = 1$.
- Sei $D = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$. Falls $A \in I$, dann gilt sofort $D^I = 1$. Falls $A \notin I$, dann ist ein A_i nicht markiert (denn sonst wäre A durch Schritt 2 markiert) und damit $A_i \notin I$. Folglich gilt auch dann $D^I = 1$. $\square$

Aussagenlogik — Horn-Logik

Notizen

- Markierungsalgorithmus sehr effizient (lineare Laufzeit möglich)
- oft Datenbasis bereits als Horn-Formel vorhanden
- effiziente Transformation in konjunktive Normalform in der nächsten VL

Anwendung

- logische Programmiersprache Prolog
- vielfältige Expertensysteme

Kompaktheit

Aussagenlogik — Kompaktheit

Motivation

- Aussagenlogik häufig ineffizient zur Repräsentation
  Atome: 0gerade, 1gerade, 2gerade, etc.
- Repräsentation von Wissen essentiell
- wir erweitern unsere Notation

Definition

Sei $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ eine (potentiell auch unendliche) Menge von Formeln.
Eine Interpretation I ist ein Modell von $\mathcal{F}'$ (geschrieben $I \models \mathcal{F}'$) gdw. $I \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}'$.

- $\mathcal{F}'$ ist erfüllbar gdw. ein Modell von $\mathcal{F}'$ existiert
- $\mathcal{F}'$ ist Tautologie gdw.
  alle Interpretationen Modelle von $\mathcal{F}'$ sind
- 'widerlegbar' und 'unerfüllbar' entsprechend

Menge von Formeln $\hat{=}$ Konjunktion der Elemente

Beispiel

Sei

$$\mathcal{F}' = \{(0\text{gerade} \land \neg 1\text{gerade}), (2\text{gerade} \land \neg 3\text{gerade}), (4\text{gerade} \land \neg 5\text{gerade}), \ldots\}$$

Dann ist $I = \{0\text{gerade}, 2\text{gerade}, 4\text{gerade}, \ldots\}$ ein Modell von $\mathcal{F}'$

Aussagenlogik — Kompaktheit

Theorem

Sei $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ eine Formelmenge. Dann ist $\mathcal{F}'$ erfüllbar gdw. jede <u>endliche</u> Teilmenge $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ erfüllbar ist

Beweis (1/4).

Wir beweisen beide Richtungen:

($\rightarrow$) Sei $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ endlich. Wenn $\mathcal{F}'$ erfüllbar ist, dann existiert Interpretation I mit $I \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}'$. Also gilt insb. $I \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ und damit $I \models \mathcal{F}''$, womit $\mathcal{F}''$ erfüllbar ist.

($\leftarrow$) Seien alle endlichen Teilmengen $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ erfüllbar. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathcal{F}_i = \{F \in \mathcal{F}' \mid \mathsf{Atome}(F) \subseteq \{A_0, \ldots, A_i\}\}$$

Es gibt allerdings nur $2^{2^{i+1}}$ verschiedene Wahrheitswertetabellen für die Atome $A_0, \ldots, A_i$.

Aussagenlogik — Kompaktheit

Beweis (2/4).

Sei also $\mathcal{F}_i'$ eine endliche Menge, so dass für jede Formel $F \in \mathcal{F}_i$ eine äquivalente Formel $F' \in \mathcal{F}_i'$ existiert. Gemäß Annahme ist $\mathcal{F}_i'$ erfüllbar. Sei I_i ein Modell ($I_i \models \mathcal{F}_i'$) für $\mathcal{F}_i'$. Dann ist I_i auch ein Modell für $\mathcal{F}_i$ und damit ist auch $\mathcal{F}_i$ erfüllbar.

Wir konstruieren nun eine Interpretation I aus den Modellen I_i

1. sei $N_0 = \mathbb{N}$ und setze $i \leftarrow 0$ und $I \leftarrow \emptyset$
2. falls $\{n \in N_i \mid A_i \in I_n\}$ unendlich ist,
   (a) dann $N_{i+1} = \{n \in N_i \mid A_i \in I_n\}$ und setze $I \leftarrow I \cup \{A_i\}$
   (b) sonst $N_{i+1} = \{n \in N_i \mid A_i \notin I_n\}$
3. setze $i \leftarrow i + 1$ und zurück zu 2

Behauptung: N_i ist unendlich für alle $i \in \mathbb{N}$. Per Induktion:

- IA: $N_0 = \mathbb{N}$ und damit unendlich
- IS: Sei N_i unendlich. Im Fall 2(a) ist N_{i+1} klar unendlich

Aussagenlogik — Kompaktheit

Beweis (3/4).

Behauptung: N_i ist unendlich für alle $i \in \mathbb{N}$. Per Induktion:

- IS: Alternativ wird 2(b) genutzt und damit

  $$N_{i+1} = N_i \setminus \{n \in N_i \mid A_i \in I_n\}$$

  Hier wird eine endliche Menge von einer unendlichen Menge abgezogen. Damit ist N_{i+1} weiterhin unendlich.

Behauptung: Für alle $i \in \mathbb{N}$ und $n \in N_{i+1}$ gilt:

$$I_n \cap \{A_0, \ldots, A_i\} = I \cap \{A_0, \ldots, A_i\}$$

Offenkundig gilt $A_i \in I$ gdw. $A_i \in I_n$. Damit trivial per Induktion:

- IA: $A_0 \in I$ gdw. $A_0 \in I_n$ für alle $n \in N_1$
- IS: $I_n \cap \{A_0, \ldots, A_i\} = I \cap \{A_0, \ldots, A_i\}$ für alle $n \in N_{i+1}$. Zusätzlich gilt $A_{i+1} \in I$ gdw. $A_{i+1} \in I_n$ für alle $n \in N_{i+2}$ und $N_{i+2} \subseteq N_{i+1}$.

Aussagenlogik — Kompaktheit

Beweis (4/4).

Z.zg. I ist ein Modell von $\mathcal{F}'$. Sei $F \in \mathcal{F}'$ und $i \in \mathbb{N}$, so dass $F \in \mathcal{F}_i$. Folglich gilt auch $F \in \mathcal{F}_j$ für alle $j \geq i$. Damit $I_j \models F$ für alle $j \geq i$ denn $I_j \models \mathcal{F}_j$.

Wir haben bereits bewiesen, dass N_{i+1} unendlich ist. Also existiert $n \geq i$ mit $n \in N_{i+1}$. Damit gilt

$$I_n \cap \{A_0, \ldots, A_i\} = I \cap \{A_0, \ldots, A_i\}$$

Es gilt $\text{Atome}(F) \subseteq \{A_0, \ldots, A_i\}$ und da $n \geq i$ gilt auch $I_n \models F$. Folglich gilt auch $I \models F$. $\square$

Zusammenfassung

- Vorteile der Normalformen
- Umformung in Normalform
- HORN-Formeln und deren Erfüllbarkeit
- Kompaktheit

Dritte Übungsserie erscheint demnächst.