

Logik

Vorlesung 3: Äquivalenz und Normalformen

Andreas Maletti

7. November 2014

Inhalt

- ➊ Motivation und mathematische Grundlagen
- ➋ Aussagenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- ➌ Prädikatenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- ➍ Ausblick

heutige Vorlesung

- 1 Äquivalenz und klassische Äquivalenzen
- 2 Probleme in der Aussagenlogik
- 3 Normalformen aussagenlogischer Formeln

Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Semantik

Inhalt

- ➊ Motivation und mathematische Grundlagen
- ➋ Aussagenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- ➌ Prädikatenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- ➍ Ausblick

Definition (Modell, Widerlegung)

Sei F eine Formel und I eine Interpretation

- I ist ein **Modell** für F gdw. $F^I = 1$ kurz: $I \models F$
- I ist eine **Widerlegung** für F gdw. $F^I = 0$ kurz: $I \not\models F$

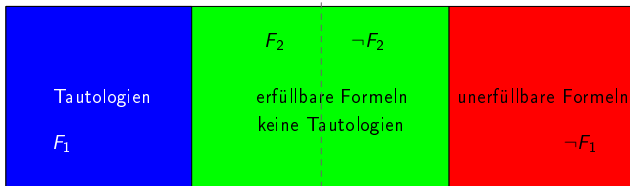
erweiterte Wahrheitswertetabelle:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Definition

Eine Formel F ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,
gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
- **unerfüllbar**, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen I
- **erfüllbar**, gdw. $I \models F$ für eine Interpretation I
- **widerlegbar**, gdw. $I \not\models F$ für eine Interpretation I



Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind **äquivalent** gdw. $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiel

$A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$ sind äquivalent

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Theorem

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln und I eine Interpretation.
Dann gilt $F_1^I = F_2^I$.

Beweis.

Da F_1 und F_2 äquivalent sind, ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie.
Folglich gilt $(F_1 \leftrightarrow F_2)^I = 1$. Gemäß Wahrheitstabelle für $\leftrightarrow$
gilt daher $F_1^I = F_2^I$. □

Korollar

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln.

- F_1 ist eine Tautologie gdw. F_2 eine Tautologie ist
- F_1 ist erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar ist
- F_1 ist widerlegbar gdw. F_2 widerlegbar ist
- F_1 ist unerfüllbar gdw. F_2 unerfüllbar ist

Notizen

- äquivalente Formeln sind semantisch ununterscheidbar
- wohl aber syntaktisch unterscheidbar
(vgl. 'selbe' vs. 'gleiche')

Theorem (Ersetzungstheorem)

Sei F eine Formel und F' eine Teilformel von F .

Des Weiteren sei G' eine Formel, die äquivalent zu F' ist.

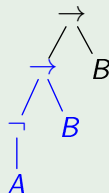
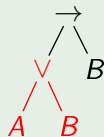
Dann ist F äquivalent zu der Formel, die man aus F erhält, indem man ein Vorkommen der Teilformel F' durch G' ersetzt.

Beispiel

Wir wissen, dass $A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$ äquivalent sind.

Nach obigem Theorem sind auch

$(A \vee B) \rightarrow B$ und $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$ äquivalent



Beweis (1/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

- ① Sei $F = A_i$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.
- ② Sei $F = \neg F_1$.
 - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
 - Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = \neg G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$F^J = (\neg F_1)^J = 1 - F_1^J = 1 - G_1^J = (\neg G_1)^J = G^J$$

und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.

Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Beweis (2/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

③ Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.

- Sei $F' = F$. Dann weiter wie in ①
- Das Vorkommen von F' liegt in F_1 . Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$\begin{aligned} F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J \end{aligned}$$

und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.

Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

- Das Vorkommen von F' liegt in F_2 . Analog.

④ Sei $F = (F_1 \vee F_2)$. Analog zu ③



Notizen

- äquivalente Formeln können füreinander substituiert werden
- Ersetzungsregeln

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$F \wedge G$	$G \wedge F$	Kommutativität von $\wedge$
$F \vee G$	$G \vee F$	Kommutativität von $\vee$
$(F \wedge G) \wedge H$	$F \wedge (G \wedge H)$	Assoziativität von $\wedge$
$(F \vee G) \vee H$	$F \vee (G \vee H)$	Assoziativität von $\vee$
$F \wedge (G \vee H)$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	Distributivität von $\wedge$
$F \vee (G \wedge H)$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivität von $\vee$
$F \wedge F$	F	Idempotenz von $\wedge$
$F \vee F$	F	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg F$	F	Involution $\neg$
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für $\wedge$
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für $\vee$

Vorsicht

$F_1 = (F \rightarrow G) \rightarrow H$ und $F_2 = F \rightarrow (G \rightarrow H)$
sind **nicht** äquivalent.

Beweis.

Mit Wahrheitstabelle:

F	G	H	$F \rightarrow G$	F_1	$G \rightarrow H$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	1	0	1	1	0
...	...	...	...	...	...	...	...



Theorem (Beweisprinzip: Kontraposition)

$F \rightarrow G$ und $\neg G \rightarrow \neg F$ sind äquivalent

(“wenn F , dann G ” entspricht “wenn nicht G , dann nicht F ”)

Beweis.

$$F \rightarrow G$$

$$\text{äquivalent zu } \neg F \vee G$$

$$\text{äquivalent zu } \neg F \vee \neg \neg G$$

$$\text{äquivalent zu } \neg \neg G \vee \neg F$$

$$\text{äquivalent zu } \neg G \rightarrow \neg F$$



Vereinfachung

$$\begin{aligned} & ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A \\ \text{äquivalent zu} & (A \wedge (B \vee C)) \wedge A \\ \text{äquivalent zu} & ((B \vee C) \wedge A) \wedge A \\ \text{äquivalent zu} & (B \vee C) \wedge (A \wedge A) \\ \text{äquivalent zu} & (B \vee C) \wedge A \end{aligned}$$

Notationsvereinfachungen

- Ketten gleicher Junktoren ohne Klammern

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \quad \text{statt} \quad F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) \quad \text{oder} \quad (F_1 \wedge F_2) \wedge F_3$$

- keine Wiederholung gleicher Atome
- freies Vertauschen der Elemente in Ketten

Probleme

Fragestellungen

Sei F eine Formel.

- Ist eine geg. Interpretation I ein Modell für F ? Gilt $I \models F$?
- Ist F erfüllbar? Gibt es I mit $I \models F$?
- Ist F widerlegbar? Gibt es I mit $I \not\models F$?
- Ist F eine Tautologie? Gilt $I \models F$ für alle I ?
- Ist F unerfüllbar? Gilt $I \not\models F$ für alle I ?

Weitere Fragestellungen

- Sind Formeln F_1 und F_2 äquivalent? Ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ Tautologie?
- Folgt Formel F_2 aus Formel F_1 ? Ist $F_1 \rightarrow F_2$ Tautologie?

Problembeziehungen

- F ist widerlegbar gdw. F keine Tautologie ist
für Widerlegbarkeit reicht Test auf Tautologie
- F ist unerfüllbar gdw. $\neg F$ eine Tautologie ist
auch für Unerfüllbarkeit reicht Test auf Tautologie

Grundlegende Fragestellungen

Sei F eine Formel.

- Ist eine geg. Interpretation I ein Modell für F ? **Gilt $I \models F$?**
Auswertung
- Ist F erfüllbar? **Gibt es I mit $I \models F$?**
Erfüllbarkeit
- Ist F eine Tautologie? **Gilt $I \models F$ für alle I ?**
Allgemeingültigkeit

Algorithmus für Auswertung

- $I \models F$ gdw. $F^I = 1$
- rekursive Definition für $\cdot^I$ liefert rekursiven Algorithmus
- effizient

Notizen

- Wahrheitstabelle kann alle Probleme lösen
 - für **Auswertung**: Berechnung einer Zeile
 - für **Erfüllbarkeit**: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
 - für **Allgemeingültigkeit**: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Beispiel

Wahrheitstabelle für $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

- **erfüllbar**, da $I = \emptyset$ Modell ($A' = 0$ und $B' = 0$)
- **nicht allgemeingültig**, da $I = \{A\}$ Widerlegung

Problem

- Aufstellen der Wahrheitstabelle ist ineffizient
 - hat $2^{|\text{Atome}(F)|}$ Zeilen
- exponentieller Aufwand
- Geht es besser?

Frage

Wie würden Sie diese Probleme lösen?

Normalformen

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein **Literal** gdw.

- ① $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist oder positives Literal
- ② $F = \neg A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist negatives Literal

Literale der Form ① bzw. ② heißen **positiv** bzw. **negativ**

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in **Negationsnormalform** falls Negationen ($\neg$) nur in Literalen vorkommen.

Beispiele

- $A_1 \wedge (\neg A_2 \vee A_3) \wedge \neg A_0$ ist in Negationsnormalform
- $\neg(A_1 \vee A_2)$ und $\neg\neg A_0$ sind **nicht** in Negationsnormalform

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Beweis.

- 1 Auflösen der Abkürzungen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
- 2 Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\neg F$	F	Involution $\neg$
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für $\wedge$
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	DEMORGAN-Gesetz für $\vee$

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Dies terminiert (siehe Übung) und nach Ersetzungstheorem ist die erhaltene Formel äquivalent zu F □

Beispiel

$$A_1 \wedge \neg(A_2 \leftrightarrow A_3)$$

äquivalent zu $A_1 \wedge \neg((A_2 \rightarrow A_3) \wedge (A_3 \rightarrow A_2))$

äquivalent zu $A_1 \wedge \neg((\neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_2))$

äquivalent zu $A_1 \wedge (\neg(\neg A_2 \vee A_3) \vee \neg(\neg A_3 \vee A_2))$

äquivalent zu $A_1 \wedge ((\neg\neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg\neg A_3 \wedge \neg A_2))$

äquivalent zu $A_1 \wedge ((A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_3 \wedge \neg A_2))$

$A_1 \wedge ((A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_3 \wedge \neg A_2))$ ist in Negationsnormalform

Definition

Eine Formel F ist

- ein **Konjunktionsglied** gdw.

$F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^n L_i$ für Literale $L_1, L_2, \dots, L_n$
(Konjunktion von Literalen)

- ein **Disjunktionsglied** gdw.

$F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^n L_i$ für Literale $L_1, L_2, \dots, L_n$
(Disjunktion von Literalen)

Beispiele

- $(\neg A_5 \wedge A_2) \wedge (A_1 \wedge \neg A_0)$ ist ein Konjunktionsglied
- $\neg\neg A_3$ ist **kein** Konjunktionsglied
- $A_1 \vee (A_3 \vee \neg A_0)$ ist ein Disjunktionsglied
- $\neg(A_0 \vee A_4) \vee A_3$ ist **kein** Disjunktionsglied

Theorem

Sei F eine Formel und I eine Interpretation.

- 1 Wenn F ein Konjunktionsglied ist,
dann ist $F^I = 1$ gdw. $L^I = 1$ für alle Literale L in F
- 2 Wenn F ein Disjunktionsglied ist,
dann ist $F^I = 0$ gdw. $L^I = 0$ für alle Literale L in F

Notizen

Konventionen zu leeren Gliedern:

- leere Konjunktion: $\left(\bigwedge_{i \in \emptyset} L_i\right)^I = 1$
- leere Disjunktion: $\left(\bigvee_{i \in \emptyset} L_i\right)^I = 0$

Definition

Eine Formel F ist in

- **konjunktiver Normalform** gdw.

$F = D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ für Disjunktionsglieder $D_1, D_2, \dots, D_n$
(Konjunktion von Disjunktionsgliedern)

- **disjunktiver Normalform** gdw.

$F = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_n$ für Konjunktionsglieder $K_1, K_2, \dots, K_n$
(Disjunktion von Konjunktionsgliedern)

Theorem

Für jede Formel F existieren

- eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und
- eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform.

Beweis (1/4).

Seien

$$F_1 = \bigwedge_{\substack{I \subseteq \text{Atome}(F) \\ F^I = 0}} \left(\bigvee_{A \in I} (\neg A) \vee \bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A \right)$$

$$F_2 = \bigvee_{\substack{I \subseteq \text{Atome}(F) \\ F^I = 1}} \left(\bigwedge_{A \in I} A \wedge \bigwedge_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} (\neg A) \right)$$

F_1 und F_2 sind in konjunktiver bzw. disjunktiver Normalform.

Beweis (2/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F , F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1 :

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.

Wir zeigen $F' = 0$ gdw. $F_1' = 0$

($\rightarrow$) Sei $F' = 0$. Offenbar ist $(\bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A)' = 0$, denn $A' = 0$ für alle $A \in \text{Atome}(F) \setminus I$, und $(\bigvee_{A \in I} (\neg A))' = 0$, denn $A' = 1$ für alle $A \in I$.

Also gilt $F_1' = 0$, denn das Disjunktionsglied

$$D = \bigvee_{A \in I} (\neg A) \vee \bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A$$

kommt in der Konjunktion von F_1 vor und $D' = 0$.

Beweis (3/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F , F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1 :

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.

Wir zeigen $F^I = 0$ gdw. $F_1^I = 0$

($\leftarrow$) Sei $F_1^I = 0$. Also existiert eine Interpretation $J \subseteq \text{Atome}(F)$ und ein Disjunktionsglied

$$D = \bigvee_{A \in J} (\neg A) \vee \bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus J} A$$

mit $F^J = 0$ und $D^I = 0$. Da $D^I = 0$ muss jedes Literal in D falsch sein. Folglich gilt $A^I = 0$ für alle $A \in \text{Atome}(F) \setminus J$. Damit $A \notin I$ für alle $A \notin J$. Andererseits $(\neg A)^I = 0$ für alle $A \in J$, womit $A \in I$ für alle $A \in J$. Also gilt $I = J$ und damit $F^I = F^J = 0$

Beweis (4/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F , F_1 und F_2 äquivalent sind. Die Äquivalenz von F und F_1 ist bewiesen.

Die Äquivalenz zwischen F und F_2 beweist man analog. □

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- konjunktiven Normalform
 - Kodierung der Zeilen mit $F' = 0$ als Disjunktionsglieder
 - Literal A für Atome A mit $A' = 0$
 - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A' = 1$

$$(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \\ \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablezen der

- disjunktiven Normalform

- Kodierung der Zeilen mit $F' = 1$ als Konjunktionsglieder
- Literal A für Atome A mit $A' = 1$
- Literal $\neg A$ für Atome A mit $A' = 0$

$$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$$

$$\vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

- Äquivalenz und klassische Äquivalenzen
- Probleme der Aussagenlogik
- Negationsnormalform
- konjunktive und disjunktive Normalform

Zweite Übungsserie ist bereits verfügbar.