Logik
Vorlesung 3: Äquivalenz und Normalformen

Andreas Maletti

7. November 2014

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Äquivalenz und klassische Äquivalenzen
2. Probleme in der Aussagenlogik
3. Normalformen aussagenlogischer Formeln

Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Semantik

Inhalt

Aussagenlogik — Semantik

Definition (Modell, Widerlegung)

Sei F eine Formel und I eine Interpretation

- I ist ein Modell für F gdw. $F^I = 1$ kurz: $I \models F$
- I ist eine Widerlegung für F gdw. $F^I = 0$ kurz: $I \not\models F$

erweiterte Wahrheitswertetabelle:

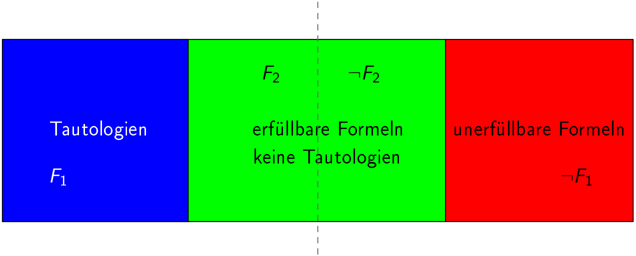
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Aussagenlogik — Semantik

Definition

Eine Formel F ist

- eine Tautologie oder allgemeingültig,
  gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
- unerfüllbar, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen I
- erfüllbar, gdw. $I \models F$ für eine Interpretation I
- widerlegbar, gdw. $I \not\models F$ für eine Interpretation I



Äquivalenz

Aussagenlogik — Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind äquivalent
gdw. $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Aussagenlogik — Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind äquivalent
gdw. $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiel

$A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$ sind äquivalent

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Aussagenlogik — Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind äquivalent
gdw. $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiel

$A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$ sind äquivalent

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Aussagenlogik — Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind äquivalent
gdw. $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiel

$A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$ sind äquivalent

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Aussagenlogik — Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind äquivalent
gdw. $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist

Beispiel

$A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$ sind äquivalent

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Theorem

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln und I eine Interpretation.
Dann gilt $F_1^I = F_2^I$.

Aussagenlogik — Äquivalenz

Theorem

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln und I eine Interpretation. Dann gilt $F_1^I = F_2^I$.

Beweis.

Da F_1 und F_2 äquivalent sind, ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie. Folglich gilt $(F_1 \leftrightarrow F_2)^I = 1$. Gemäß Wahrheitswertetabelle für $\leftrightarrow$ gilt daher $F_1^I = F_2^I$. $\square$

Aussagenlogik — Äquivalenz

Korollar

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln.

- F_1 ist eine Tautologie gdw. F_2 eine Tautologie ist

Aussagenlogik — Äquivalenz

Korollar

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln.

- F_1 ist eine Tautologie gdw. F_2 eine Tautologie ist
- F_1 ist erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar ist

Aussagenlogik — Äquivalenz

Korollar

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln.

- F_1 ist eine Tautologie gdw. F_2 eine Tautologie ist
- F_1 ist erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar ist
- F_1 ist widerlegbar gdw. F_2 widerlegbar ist

Aussagenlogik — Äquivalenz

Korollar

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln.

- F_1 ist eine Tautologie gdw. F_2 eine Tautologie ist
- F_1 ist erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar ist
- F_1 ist widerlegbar gdw. F_2 widerlegbar ist
- F_1 ist unerfüllbar gdw. F_2 unerfüllbar ist

Aussagenlogik — Äquivalenz

Korollar

Seien F_1 und F_2 äquivalente Formeln.

- F_1 ist eine Tautologie gdw. F_2 eine Tautologie ist
- F_1 ist erfüllbar gdw. F_2 erfüllbar ist
- F_1 ist widerlegbar gdw. F_2 widerlegbar ist
- F_1 ist unerfüllbar gdw. F_2 unerfüllbar ist

Notizen

- äquivalente Formeln sind semantisch ununterscheidbar
- wohl aber syntaktisch unterscheidbar
  (vgl. 'selbe' vs. 'gleiche')

Aussagenlogik — Äquivalenz

Theorem (Ersetzungstheorem)

Sei F eine Formel und F' eine Teilformel von F.
Des Weiteren sei G' eine Formel, die äquivalent zu F' ist.
Dann ist F äquivalent zu der Formel, die man aus F erhält, indem man ein Vorkommen der Teilformel F' durch G' ersetzt.

Aussagenlogik — Äquivalenz

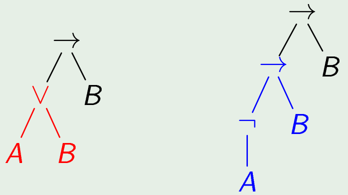
Theorem (Ersetzungstheorem)

Sei F eine Formel und F' eine Teilformel von F.
Des Weiteren sei G' eine Formel, die äquivalent zu F' ist.
Dann ist F äquivalent zu der Formel, die man aus F erhält, indem man ein Vorkommen der Teilformel F' durch G' ersetzt.

Beispiel

Wir wissen, dass $A \vee B$ und $\neg A \to B$ äquivalent sind.
Nach obigem Theorem sind auch

$$(A \vee B) \to B \qquad \text{und} \qquad (\neg A \to B) \to B \qquad \text{äquivalent}$$



Beweis (1/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.
Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

1. Sei $F = A_i$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.

Aussagenlogik — Äquivalenz

Beweis (1/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.
Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

1. Sei $F = A_i$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.
2. Sei $F = \neg F_1$.
    - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1

Aussagenlogik — Äquivalenz

Beweis (1/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.
Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

1. Sei $F = A_i$. Dann muss $F' = F$ sein und da F' und G' äquivalent sind, sind auch $F = F'$ und $G = G'$ äquivalent.
2. Sei $F = \neg F_1$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = \neg G_1$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

     $$F^J = (\neg F_1)^J = 1 - F_1^J = 1 - G_1^J = (\neg G_1)^J = G^J$$

     und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.
     Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Aussagenlogik — Äquivalenz

Beweis (2/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

3. Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1

Aussagenlogik — Äquivalenz

Beweis (2/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

3. Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

$$
\begin{aligned}
F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\
&= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J
\end{aligned}
$$

     und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.
     Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie

Beweis (2/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

3. Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

     $$\begin{aligned} F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J \end{aligned}$$

     und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.
     Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_2. Analog.

Aussagenlogik — Äquivalenz

Beweis (2/2).

Sei G die Formel nach der Ersetzung.

Z.zg. F und G sind äquivalent. Per struktureller Induktion:

3. Sei $F = (F_1 \wedge F_2)$.
   - Sei $F' = F$. Dann weiter wie in 1
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_1. Sei $G = G_1 \wedge F_2$. Per Induktionsannahme sind F_1 und G_1 äquivalent. Sei J eine beliebige Interpretation. Es gilt

     $$\begin{aligned} F^J &= (F_1 \wedge F_2)^J = \min(F_1^J, F_2^J) \\ &= \min(G_1^J, F_2^J) = (G_1 \wedge F_2)^J = G^J \end{aligned}$$

     und damit $(F \leftrightarrow G)^J = 1$.
     Da J beliebig war, ist $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie
   - Das Vorkommen von F' liegt in F_2. Analog.
4. Sei $F = (F_1 \vee F_2)$. Analog zu 3 $\square$

Aussagenlogik — Äquivalenz

Notizen

- äquivalente Formeln können füreinander substituiert werden

$\rightarrow$ Ersetzungsregeln

Aussagenlogik — Äquivalenz

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$F \wedge G$	$G \wedge F$	Kommutativität von $\wedge$
$F \vee G$	$G \vee F$	Kommutativität von $\vee$
$(F \wedge G) \wedge H$	$F \wedge (G \wedge H)$	Assoziativität von $\wedge$
$(F \vee G) \vee H$	$F \vee (G \vee H)$	Assoziativität von $\vee$
$F \wedge (G \vee H)$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	Distributivität von $\wedge$
$F \vee (G \wedge H)$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivität von $\vee$
$F \wedge F$	F	Idempotenz von $\wedge$
$F \vee F$	F	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg F$	F	Involution $\neg$
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Vorsicht

$F_1 = (F \rightarrow G) \rightarrow H$ und $F_2 = F \rightarrow (G \rightarrow H)$
sind nicht äquivalent.

Beweis.

Mit Wahrheitswertetabelle:

F	G	H	$F \rightarrow G$	F_1	$G \rightarrow H$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	1	$\boxed{0}$	1	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$
...	...	...	...	...	...	...	

□

Theorem (Beweisprinzip: Kontraposition)

$F \to G$ und $\neg G \to \neg F$ sind äquivalent

(“wenn F, dann G” entspricht “wenn nicht G, dann nicht F”)

Aussagenlogik — Äquivalenz

Theorem (Beweisprinzip: Kontraposition)

$F \to G$ und $\neg G \to \neg F$ sind äquivalent
("wenn F, dann G" entspricht "wenn nicht G, dann nicht F")

Beweis.

$$
\begin{array}{rl}
 & F \to G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \vee G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \vee \neg\neg G \\
\text{äquivalent zu} & \neg\neg G \vee \neg F \\
\text{äquivalent zu} & \neg G \to \neg F
\end{array}
$$

□

Theorem (Beweisprinzip: Kontraposition)

$F \rightarrow G$ und $\neg G \rightarrow \neg F$ sind äquivalent
("wenn F, dann G" entspricht "wenn nicht G, dann nicht F")

Beweis.

$$
\begin{array}{ll}
 & F \rightarrow G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \vee G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \vee \neg\neg G \\
\text{äquivalent zu} & \neg\neg G \vee \neg F \\
\text{äquivalent zu} & \neg G \rightarrow \neg F
\end{array}
$$

□

Aussagenlogik — Äquivalenz

Theorem (Beweisprinzip: Kontraposition)

$F \rightarrow G$ und $\neg G \rightarrow \neg F$ sind äquivalent
("wenn F, dann G" entspricht "wenn nicht G, dann nicht F")

Beweis.

$$
\begin{array}{rl}
 & F \rightarrow G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \vee G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \vee \neg\neg G \\
\text{äquivalent zu} & \neg\neg G \vee \neg F \\
\text{äquivalent zu} & \neg G \rightarrow \neg F
\end{array}
$$

□

Aussagenlogik — Äquivalenz

Theorem (Beweisprinzip: Kontraposition)

$F \to G$ und $\neg G \to \neg F$ sind äquivalent

("wenn F, dann G" entspricht "wenn nicht G, dann nicht F")

Beweis.

$$
\begin{array}{rl}
 & F \to G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \lor G \\
\text{äquivalent zu} & \neg F \lor \neg\neg G \\
\text{äquivalent zu} & \neg\neg G \lor \neg F \\
\text{äquivalent zu} & \neg G \to \neg F
\end{array}
$$

□

Aussagenlogik — Äquivalenz

Vereinfachung

	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A$
äquivalent zu	$(A \wedge (B \vee C)) \wedge A$
äquivalent zu	$((B \vee C) \wedge A) \wedge A$
äquivalent zu	$(B \vee C) \wedge (A \wedge A)$
äquivalent zu	$(B \vee C) \wedge A$

Aussagenlogik — Äquivalenz

Vereinfachung

	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A$
äquivalent zu	$(A \wedge (B \vee C)) \wedge A$
äquivalent zu	$((B \vee C) \wedge A) \wedge A$
äquivalent zu	$(B \vee C) \wedge (A \wedge A)$
äquivalent zu	$(B \vee C) \wedge A$

Aussagenlogik — Äquivalenz

Vereinfachung

	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A$
äquivalent zu	$(A \wedge (B \vee C)) \wedge A$
äquivalent zu	$((B \vee C) \wedge A) \wedge A$
äquivalent zu	$(B \vee C) \wedge (A \wedge A)$
äquivalent zu	$(B \vee C) \wedge A$

Aussagenlogik — Äquivalenz

Vereinfachung

$$
\begin{array}{rl}
 & ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A \\
\text{äquivalent zu} & (A \wedge (B \vee C)) \wedge A \\
\text{äquivalent zu} & ((B \vee C) \wedge A) \wedge A \\
\text{äquivalent zu} & (B \vee C) \wedge (A \wedge A) \\
\text{äquivalent zu} & (B \vee C) \wedge A
\end{array}
$$

Aussagenlogik — Äquivalenz

Vereinfachung

$$
\begin{array}{rl}
 & ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge A \\
\text{äquivalent zu} & (A \wedge (B \vee C)) \wedge A \\
\text{äquivalent zu} & ((B \vee C) \wedge A) \wedge A \\
\text{äquivalent zu} & (B \vee C) \wedge (A \wedge A) \\
\text{äquivalent zu} & (B \vee C) \wedge A
\end{array}
$$

Notationsvereinfachungen

- Ketten gleicher Junktoren ohne Klammern

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \quad \text{statt} \quad F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) \;\text{ oder }\; (F_1 \wedge F_2) \wedge F_3$$

- keine Wiederholung gleicher Atome
- freies Vertauschen der Elemente in Ketten

Probleme

Fragestellungen

Sei F eine Formel.

- Ist eine geg. Interpretation I ein Modell für F? Gilt $I \models F$?
- Ist F erfüllbar? Gibt es I mit $I \models F$?
- Ist F widerlegbar? Gibt es I mit $I \not\models F$?
- Ist F eine Tautologie? Gilt $I \models F$ für alle I?
- Ist F unerfüllbar? Gilt $I \not\models F$ für alle I?

Aussagenlogik — Probleme

Fragestellungen

Sei F eine Formel.

- Ist eine geg. Interpretation I ein Modell für F? Gilt $I \models F$?
- Ist F erfüllbar? Gibt es I mit $I \models F$?
- Ist F widerlegbar? Gibt es I mit $I \not\models F$?
- Ist F eine Tautologie? Gilt $I \models F$ für alle I?
- Ist F unerfüllbar? Gilt $I \not\models F$ für alle I?

Weitere Fragestellungen

- Sind Formeln F_1 und F_2 äquivalent? Ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ Tautologie?
- Folgt Formel F_2 aus Formel F_1? Ist $F_1 \rightarrow F_2$ Tautologie?

Aussagenlogik — Probleme

Problembeziehungen

- F ist widerlegbar gdw. F keine Tautologie ist
  für Widerlegbarkeit reicht Test auf Tautologie
- F ist unerfüllbar gdw. $\neg F$ eine Tautologie ist
  auch für Unerfüllbarkeit reicht Test auf Tautologie

Aussagenlogik — Probleme

Grundlegende Fragestellungen

Sei F eine Formel.

- Ist eine geg. Interpretation I ein Modell für F? Gilt $I \models F$?
  Auswertung
- Ist F erfüllbar? Gibt es I mit $I \models F$?
  Erfüllbarkeit
- Ist F eine Tautologie? Gilt $I \models F$ für alle I?
  Allgemeingültigkeit

Algorithmus für Auswertung

- $I \models F$ gdw. $F^I = 1$
- rekursive Definition für $\cdot^I$ liefert rekursiven Algorithmus
- effizient

Aussagenlogik — Probleme

Notizen

- Wahrheitswertetabelle kann alle Probleme lösen
  - für Auswertung: Berechnung einer Zeile
  - für Erfüllbarkeit: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
  - für Allgemeingültigkeit: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Aussagenlogik — Probleme

Notizen

- Wahrheitswertetabelle kann alle Probleme lösen
  - für Auswertung: Berechnung einer Zeile
  - für Erfüllbarkeit: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
  - für Allgemeingültigkeit: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Beispiel

Wahrheitswertetabelle für $(A \vee B) \to (A \to B)$

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$(A \vee B) \to (A \to B)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Aussagenlogik — Probleme

Notizen

- Wahrheitswertetabelle kann alle Probleme lösen
  - für Auswertung: Berechnung einer Zeile
  - für Erfüllbarkeit: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
  - für Allgemeingültigkeit: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Beispiel

Wahrheitswertetabelle für $(A \vee B) \to (A \to B)$

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$(A \vee B) \to (A \to B)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Aussagenlogik — Probleme

Notizen

- Wahrheitswertetabelle kann alle Probleme lösen
  - für Auswertung: Berechnung einer Zeile
  - für Erfüllbarkeit: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
  - für Allgemeingültigkeit: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Beispiel

Wahrheitswertetabelle für $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Aussagenlogik — Probleme

Notizen

- Wahrheitswertetabelle kann alle Probleme lösen
  - für Auswertung: Berechnung einer Zeile
  - für Erfüllbarkeit: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
  - für Allgemeingültigkeit: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Beispiel

Wahrheitswertetabelle für $(A \vee B) \to (A \to B)$

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$(A \vee B) \to (A \to B)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

- erfüllbar, da $I = \emptyset$ Modell ($A^I = 0$ und $B^I = 0$)

Aussagenlogik — Probleme

Notizen

- Wahrheitswertetabelle kann alle Probleme lösen
  - für Auswertung: Berechnung einer Zeile
  - für Erfüllbarkeit: Existiert Zeile mit Bewertung 1?
  - für Allgemeingültigkeit: Alle Zeilen mit Bewertung 1?

Beispiel

Wahrheitswertetabelle für $(A \vee B) \to (A \to B)$

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$(A \vee B) \to (A \to B)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

- erfüllbar, da $I = \emptyset$ Modell ($A^I = 0$ und $B^I = 0$)
- nicht allgemeingültig, da $I = \{A\}$ Widerlegung

Problem

- Aufstellen der Wahrheitswertetabelle ist ineffizient
- hat $2^{|\text{Atome}(F)|}$ Zeilen

$\rightarrow$ exponentieller Aufwand

- Geht es besser?

Frage

Wie würden Sie diese Probleme lösen?

Normalformen

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein Literal gdw.

1. $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist oder — positives Literal
2. $F = \neg A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist — negatives Literal

Literale der Form 1 bzw. 2 heißen positiv bzw. negativ

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein Literal gdw.

1. $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist oder — positives Literal
2. $F = \neg A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist — negatives Literal

Literale der Form 1 bzw. 2 heißen positiv bzw. negativ

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in Negationsnormalform falls Negationen ($\neg$) nur in Literalen vorkommen.

Aussagenlogik — Normalformen

Definition (Literale)

Eine Formel F ist ein Literal gdw.

1. $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist oder — positives Literal
2. $F = \neg A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ ist — negatives Literal

Literale der Form 1 bzw. 2 heißen positiv bzw. negativ

Definition (Negationsnormalform)

Eine Formel F ist in Negationsnormalform falls Negationen ($\neg$) nur in Literalen vorkommen.

Beispiele

- $A_1 \wedge (\neg A_2 \vee A_3) \wedge \neg A_0$ ist in Negationsnormalform
- $\neg(A_1 \vee A_2)$ und $\neg\neg A_0$ sind nicht in Negationsnormalform

Aussagenlogik — Normalformen

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Beweis.

1. Auflösen der Abkürzungen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
2. Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		**Bezeichnung**
$\neg\neg F$	F	Involution $\neg$
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Aussagenlogik — Normalformen

Theorem

Für jede Formel F existiert eine äquivalente Formel in Negationsnormalform

Beweis.

1. Auflösen der Abkürzungen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
2. Anwendung der Äquivalenzen von links nach rechts

äquivalente Formeln		**Bezeichnung**
$\neg\neg F$	F	Involution $\neg$
$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

bis keine solche Anwendung mehr möglich ist

Dies terminiert (siehe Übung) und nach Ersetzungstheorem ist die erhaltene Formel äquivalent zu F □

Beispiel

$$A_1 \wedge \neg\big(A_2 \leftrightarrow A_3\big)$$

äquivalent zu $\quad A_1 \wedge \neg\big((A_2 \rightarrow A_3) \wedge (A_3 \rightarrow A_2)\big)$

Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
 & A_1 \wedge \neg\big(A_2 \leftrightarrow A_3\big) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg\big((A_2 \rightarrow A_3) \wedge (A_3 \rightarrow A_2)\big) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg\big((\neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_2)\big)
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
 & A_1 \wedge \neg\big(A_2 \leftrightarrow A_3\big) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg\big((A_2 \rightarrow A_3) \wedge (A_3 \rightarrow A_2)\big) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg\big((\neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_2)\big) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \big(\neg(\neg A_2 \vee A_3) \vee \neg(\neg A_3 \vee A_2)\big)
\end{array}
$$

Beispiel

$$\begin{array}{rl} & A_1 \wedge \neg\big(A_2 \leftrightarrow A_3\big) \\ \text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg\big((A_2 \rightarrow A_3) \wedge (A_3 \rightarrow A_2)\big) \\ \text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg\big((\neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_2)\big) \\ \text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \big(\neg(\neg A_2 \vee A_3) \vee \neg(\neg A_3 \vee A_2)\big) \\ \text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \big((\neg\neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg\neg A_3 \wedge \neg A_2)\big) \end{array}$$

Beispiel

$$
\begin{array}{rl}
 & A_1 \wedge \neg(A_2 \leftrightarrow A_3) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg((A_2 \rightarrow A_3) \wedge (A_3 \rightarrow A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge \neg((\neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge (\neg(\neg A_2 \vee A_3) \vee \neg(\neg A_3 \vee A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge ((\neg\neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg\neg A_3 \wedge \neg A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \wedge ((A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_3 \wedge \neg A_2))
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{rl}
 & A_1 \land \neg(A_2 \leftrightarrow A_3) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \land \neg((A_2 \rightarrow A_3) \land (A_3 \rightarrow A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \land \neg((\neg A_2 \lor A_3) \land (\neg A_3 \lor A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \land (\neg(\neg A_2 \lor A_3) \lor \neg(\neg A_3 \lor A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \land ((\neg\neg A_2 \land \neg A_3) \lor (\neg\neg A_3 \land \neg A_2)) \\
\text{äquivalent zu} & A_1 \land ((A_2 \land \neg A_3) \lor (A_3 \land \neg A_2))
\end{array}
$$

$A_1 \land ((A_2 \land \neg A_3) \lor (A_3 \land \neg A_2))$ ist in Negationsnormalform

Definition

Eine Formel F ist

- ein Konjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Konjunktion von Literalen)

Definition

Eine Formel F ist

- ein Konjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Konjunktion von Literalen)
- ein Disjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Disjunktion von Literalen)

Definition

Eine Formel F ist

- ein Konjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Konjunktion von Literalen)
- ein Disjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Disjunktion von Literalen)

Beispiele

- $(\neg A_5 \wedge A_2) \wedge (A_1 \wedge \neg A_0)$ ist ein Konjunktionsglied
- $\neg\neg A_3$ ist kein Konjunktionsglied

Aussagenlogik — Normalformen

Definition

Eine Formel F ist

- ein Konjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n = \bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Konjunktion von Literalen)
- ein Disjunktionsglied gdw.
  $F = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ für Literale $L_1, L_2, \ldots, L_n$
  (Disjunktion von Literalen)

Beispiele

- $(\neg A_5 \wedge A_2) \wedge (A_1 \wedge \neg A_0)$ ist ein Konjunktionsglied
- $\neg\neg A_3$ ist kein Konjunktionsglied

- $A_1 \vee (A_3 \vee \neg A_0)$ ist ein Disjunktionsglied
- $\neg(A_0 \vee A_4) \vee A_3$ ist kein Disjunktionsglied

Theorem

Sei F eine Formel und I eine Interpretation.

1. Wenn F ein Konjunktionsglied ist,
   dann ist $F^I = 1$ gdw. $L^I = 1$ für alle Literale L in F
2. Wenn F ein Disjunktionsglied ist,
   dann ist $F^I = 0$ gdw. $L^I = 0$ für alle Literale L in F

Theorem

Sei F eine Formel und I eine Interpretation.

1. Wenn F ein Konjunktionsglied ist,
   dann ist $F^I = 1$ gdw. $L^I = 1$ für alle Literale L in F
2. Wenn F ein Disjunktionsglied ist,
   dann ist $F^I = 0$ gdw. $L^I = 0$ für alle Literale L in F

Notizen

Konventionen zu leeren Gliedern:

- leere Konjunktion: $\left(\bigwedge_{i \in \emptyset} L_i\right)^I = 1$
- leere Disjunktion: $\left(\bigvee_{i \in \emptyset} L_i\right)^I = 0$

Definition

Eine Formel F ist in

- konjunktiver Normalform gdw.
  $F = D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ für Disjunktionsglieder $D_1, D_2, \ldots, D_n$
  (Konjunktion von Disjunktionsgliedern)

Definition

Eine Formel F ist in

- konjunktiver Normalform gdw.
  $F = D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ für <u>Disjunktionsglieder</u> $D_1, D_2, \ldots, D_n$
  (Konjunktion von Disjunktionsgliedern)
- disjunktiver Normalform gdw.
  $F = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_n$ für <u>Konjunktionsglieder</u> $K_1, K_2, \ldots, K_n$
  (Disjunktion von Konjunktionsgliedern)

Theorem

Für jede Formel F existieren

- eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und
- eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform.

Beweis (1/4).

Seien

$$F_1 = \bigwedge_{\substack{I \subseteq \text{Atome}(F) \\ F^I = 0}} \Big(\bigvee_{A \in I} (\neg A) \vee \bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A \Big)$$

$$F_2 = \bigvee_{\substack{I \subseteq \text{Atome}(F) \\ F^I = 1}} \Big(\bigwedge_{A \in I} A \wedge \bigwedge_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} (\neg A) \Big)$$

F_1 und F_2 sind in konjunktiver bzw. disjunktiver Normalform.

Beweis (2/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F, F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1:

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.
Wir zeigen $F^I = 0$ gdw. $F_1^I = 0$

Beweis (2/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F, F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1:

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.
Wir zeigen $F^I = 0$ gdw. $F_1^I = 0$

($\rightarrow$) Sei $F^I = 0$. Offenbar ist $\left(\bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A\right)^I = 0$, denn $A^I = 0$ für alle $A \in \text{Atome}(F) \setminus I$, und $\left(\bigvee_{A \in I} (\neg A)\right)^I = 0$, denn $A^I = 1$ für alle $A \in I$.

Beweis (2/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F, F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1:

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.
Wir zeigen $F^I = 0$ gdw. $F_1^I = 0$

($\rightarrow$) Sei $F^I = 0$. Offenbar ist $\left(\bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A\right)^I = 0$, denn $A^I = 0$ für alle $A \in \text{Atome}(F) \setminus I$, und $\left(\bigvee_{A \in I} (\neg A)\right)^I = 0$, denn $A^I = 1$ für alle $A \in I$.

Also gilt $F_1^I = 0$, denn das Disjunktionsglied

$$D = \bigvee_{A \in I} (\neg A) \vee \bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus I} A$$

kommt in der Konjunktion von F_1 vor und $D^I = 0$.

Beweis (3/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F, F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1:

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.
Wir zeigen $F^I = 0$ gdw. $F_1^I = 0$

Beweis (3/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F, F_1 und F_2 äquivalent sind. Wir beginnen mit der Äquivalenz von F und F_1:

Sei $I \subseteq \text{Atome}(F)$ eine Interpretation.
Wir zeigen $F^I = 0$ gdw. $F_1^I = 0$

($\leftarrow$) Sei $F_1^I = 0$. Also existiert eine Interpretation $J \subseteq \text{Atome}(F)$ und ein Disjunktionsglied

$$D = \bigvee_{A \in J} (\neg A) \vee \bigvee_{A \in \text{Atome}(F) \setminus J} A$$

mit $F^J = 0$ und $D^I = 0$. Da $D^I = 0$ muss jedes Literal in D falsch sein. Folglich gilt $A^I = 0$ für alle $A \in \text{Atome}(F) \setminus J$. Damit $A \notin I$ für alle $A \notin J$. Andererseits $(\neg A)^I = 0$ für alle $A \in J$, womit $A \in I$ für alle $A \in J$. Also gilt $I = J$ und damit $F^I = F^J = 0$

Beweis (4/4).

Es bleibt zu zeigen, dass F, F_1 und F_2 äquivalent sind. Die Äquivalenz von F und F_1 ist bewiesen.

Die Äquivalenz zwischen F und F_2 beweist man analog. $\square$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- konjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 0$ als Disjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 0$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 1$

$$(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- konjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 0$ als Disjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 0$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 1$

$$(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- konjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 0$ als Disjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 0$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 1$

$$(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$
$$\wedge\ (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$$

Aussagenlogik — Normalform

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- disjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 1$ als Konjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 1$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 0$

$$\begin{aligned} & (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\ \vee\ & (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\ \vee\ & (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \end{aligned}$$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- disjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 1$ als Konjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 1$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 0$

$$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- disjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 1$ als Konjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 1$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 0$

$$
\begin{aligned}
&(\neg A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3) \\
\lor\ &(\neg A_1 \land A_2 \land A_3) \lor (A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3) \\
\lor\ &(A_1 \land \neg A_2 \land A_3) \lor (A_1 \land A_2 \land A_3)
\end{aligned}
$$

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- disjunktiven Normalform
    - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 1$ als Konjunktionsglieder
    - Literal A für Atome A mit $A^I = 1$
    - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 0$

$$
\begin{aligned}
& (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\
\vee\ & (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\
\vee\ & (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)
\end{aligned}
$$

Aussagenlogik — Normalform

A_1	A_2	A_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ablesen der

- disjunktiven Normalform
  - Kodierung der Zeilen mit $F^I = 1$ als Konjunktionsglieder
  - Literal A für Atome A mit $A^I = 1$
  - Literal $\neg A$ für Atome A mit $A^I = 0$

$$
\begin{aligned}
&(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\
\vee\ &(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\
\vee\ &(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

- Äquivalenz und klassiche Äquivalenzen
- Probleme der Aussagenlogik
- Negationsnormalform
- konjunktive und disjunktive Normalform

Zweite Übungsserie ist bereits verfügbar.