Logik
Vorlesung 2: Semantik der Aussagenlogik

Andreas Maletti

24. Oktober 2014

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Vertiefung Syntax
2. Semantik Aussagenlogik
3. Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen
4. Tautologien und Erfüllbarkeit

Bitte Fragen direkt stellen!

Überblick

Organisation

Organisation

Moduleinschreibung

- Einschreibeschluss: 26. Oktober 2014
- Anmeldung im TOOL

  `https://almaweb.uni-leipzig.de/einschreibung`

- Abmeldefrist: 25. Januar 2015
- Abmeldung auch im TOOL

Wiederholung: Syntax

Inhalt

Aussagenlogik — Syntax

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder wahr oder falsch ist
- Atome $A_0, A_1, A_2, \ldots$

$\neg$ Negation $\neg F$ — nicht

$\wedge$ Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$ — und

$\vee$ Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$ — oder

Definition (Formel)

- Jedes Atom ist eine Formel — Atome
- $\neg F$ ist eine Formel gdw. F eine Formel ist
  (nicht F) — Negation
- $(F_1 \wedge F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
  F_1 und F_2 — Konjunktion
- $(F_1 \vee F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
  F_1 oder F_2 — Disjunktion

Notizen

- Syntax = Struktur und Aufbau von Formeln
- bisher haben Formeln noch keine Bedeutung
  (sind bisher nur spezielle Zeichenketten)
- $1 + 1$ ist gültiger arithmetischer Ausdruck (Syntax)
- $1 + 1 = 2$ ist ein gültiger arithmetischer Ausdruck (Syntax)
- Wert von $1 + 1$ oder Gültigkeit der Gleichheit $1 + 1 = 2$ benötigt Semantik

Notizen

- $\mathcal{F}$ = Menge aller Formeln
- wir lassen manchmal die äußersten Klammern weg
  wir schreiben z.B. $f(F_1 \vee F_2)$ anstatt $f((F_1 \vee F_2))$
- Definition Funktionen entspr. Fällen der Def. 'Formel'
  wobei man die Funktionsergebnisse (strukturelle Rekursion)
  der echten Teilformeln nutzen kann

Theorem (Strukturelle Rekursion)

Für beliebige Mengen M und Funktionen $c\colon \mathbb{N} \to M$, $g\colon M \to M$ und $g', g''\colon M \times M \to M$ definieren

- $f(A_i) = c(i)$
- $f(\neg F) = g(f(F))$
- $f(F_1 \wedge F_2) = g'(f(F_1), f(F_2))$
- $f(F_1 \vee F_2) = g''(f(F_1), f(F_2))$

eindeutig eine (totale) Funktion $f\colon \mathcal{F} \to M$.

Aussagenlogik — Syntax

Definition (Atome einer Formel)

Wir definieren die Funktion $\text{Atome}\colon \mathcal{F} \to \text{Pow}(\{A_0, A_1, \ldots\})$

$$\begin{aligned}
\text{Atome}(A_i) &= \{A_i\} \\
\text{Atome}(\neg F) &= \text{Atome}(F) \\
\text{Atome}(F_1 \wedge F_2) &= \text{Atome}(F_1) \cup \text{Atome}(F_2) \\
\text{Atome}(F_1 \vee F_2) &= \text{Atome}(F_1) \cup \text{Atome}(F_2)
\end{aligned}$$

Hier ist

- $c(i) = \{A_i\}$
- $g = \text{id}$
- $g' = g''$ mit $g'(S_1, S_2) = S_1 \cup S_2$

Beispiele

1. Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
2. $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
3. $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \ldots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$
\begin{aligned}
& \text{Atome}\big(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))\big) \\
= {} & \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}\big(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))\big) \\
= {} & \{A_1\} \cup \text{Atome}\big((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)\big) \\
= {} & \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\
= {} & \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\
= {} & \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\
= {} & \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\}
\end{aligned}
$$

Theorem (Strukturelle Induktion)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ eine Eigenschaft von Formeln. Falls

1. $A_i \in \mathcal{E}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
2. $\neg F \in \mathcal{E}$ für alle $F \in \mathcal{E}$
3. $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$ und
4. $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$,

dann gilt $\mathcal{E} = \mathcal{F}$

Aussagenlogik — Syntax

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Beweis.

Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Formeln mit gerader Anzahl an Klammern.

1. Offenbar gilt $A_i \in \mathcal{E}$, denn 0 ist gerade
2. $\neg F$ enthält die gleiche Zahl an Klammern wie F, somit $\neg F \in \mathcal{E}$ für alle $F \in \mathcal{E}$
3. $(F_1 \wedge F_2)$ enthält 2 Klammern und die Klammern aus F_1 und F_2, somit $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$ (Summe gerader Zahlen ist wieder gerade)
4. $(F_1 \vee F_2)$ enthält 2 Klammern und die Klammern aus F_1 und F_2, somit $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$ $\square$

Zusammenfassung

- induktive Definition der Formeln
- strukturelle Rekursion für Definition von Funktionen $f : \mathcal{F} \to M$
- korrespondierendes Beweisprinzip: strukturelle Induktion

Aussagenlogik

Semantik

Überblick

- wir nutzen die Wahrheitswerte $0 \mathrel{\hat{=}}$ falsch und $1 \mathrel{\hat{=}}$ wahr
- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ = Menge der Wahrheitswerte

Definition (Interpretation)

Jede Teilmenge $I \subseteq \{A_0, A_1, \ldots\}$ ist eine Interpretation
Eine Interpretation enthält die wahren Atome (auch Belegung)

Aussagenlogik — Semantik

Definition (per struktureller Rekursion)

Sei $I \subseteq \{A_0, A_1, \dots\}$ eine Interpretation.
Wir definieren die Erweiterung $\cdot^I : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ der Interpretation I auf Formeln

$$(A_i)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } A_i \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg F)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } F^I = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(F_1 \wedge F_2)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } F_1^I = 1 \ \underline{\text{und}} \ F_2^I = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(F_1 \vee F_2)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } F_1^I = 1 \ \underline{\text{oder}} \ F_2^I = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aussagenlogik — Semantik

Variante (kürzer)

$$(A_i)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } A_i \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg F)^I = 1 - F^I$$

$$(F_1 \wedge F_2)^I = \min(F_1^I, F_2^I)$$

$$(F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I)$$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$:
  Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
  Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
  kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$
- Sei I Interpretation mit $A_2 \in I$:
  Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir wieder $A_2^I = 1$.
  Also gilt $(\neg A_2)^I = 0$
  kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 1 = 0$
- sei $A_1, A_4 \in I$ und $A_0 \notin I$
  Für $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I$ berechnen wir
  - $(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))^I$, wofür wir
    - $A_1^I = 1$ berechnen
    - $(A_0 \wedge A_4)^I = \min(A_0^I, A_4^I) = 0$ berechnen

  Letztlich $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I = 0$

Notizen

- bei Berechnung von F^I berechnen wir auch F_1^I für alle Teilformeln F_1 von F

$\rightarrow$ tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1^I für Teilformeln F_1

- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0^I	A_1^I	A_4^I	$(A_0 \wedge A_4)^I$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))^I$	F^I
0	1	1	0	1	0

- In solchen Tabellen lassen wir I auch weg

- wir können auch die Semantik der Junktoren so erfassen

Notizen

- Eine Formel F ist unter einer Interpretation I entweder wahr ($F^I = 1$) oder falsch ($F^I = 0$)
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus Wahrheit ihrer Atome

Definition (Modell, Widerlegung)

Sei F eine Formel und I eine Interpretation

- I ist ein Modell für F gdw. $F^I = 1$ kurz: $I \models F$
- I ist eine Widerlegung für F gdw. $F^I = 0$ kurz: $I \not\models F$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$: (Modell)
  Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
  Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
  kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$
- Sei I Interpretation mit $A_2 \in I$: (Widerlegung)
  Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir wieder $A_2^I = 1$.
  Also gilt $(\neg A_2)^I = 0$
  kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 1 = 0$
- sei $A_1, A_4 \in I$ und $A_0 \notin I$ (Widerlegung)
  Für $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I$ berechnen wir
  - $(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))^I$, wofür wir
    - $A_1^I = 1$ berechnen
    - $(A_0 \wedge A_4)^I = \min(A_0^I, A_4^I) = 0$ berechnen

  Letztlich $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I = 0$

Aussagenlogik — Semantik

Notizen

- Modelle und Widerlegungen lassen sich aus Wahrheitswertetabelle ablesen
- Wahrheitswertetabelle für Junktoren (diesmal ohne I)

A	B	$\neg A$	$A \land B$	$A \lor B$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Aussagenlogik — Semantik

Notation und Abkürzungen

- der Übersicht halber erlauben wir auch A, B, C, ..., längere Bezeichner und mathematische Ausdrücke als Atome

  $(x \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{R})$

- Implikation: $(F_1 \to F_2)$ ist eine Abkürzung für $(\neg F_1 \vee F_2)$

  wenn F_1 wahr ist, dann auch F_2

- Äquivalenz: $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ ist eine Abkürzung für

$$((F_1 \to F_2) \wedge (F_2 \to F_1))$$

  F_1 ist genau dann wahr, wenn F_2 wahr ist erweiterte Wahrheitswertetabelle:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Aussagenlogik — Semantik

Schwierigkeit: Implikation $F_1 \to F_2$

- $F_1 \to F_2$ besteht aus Prämisse F_1 und Konsequenz F_2
- $F_1 \to F_2$ ist genau dann falsch, wenn die Prämisse F_1 wahr ist, aber die Konsequenz F_2 falsch ist

Beispiel

- "Wer sich nicht anmeldet, schreibt die Klausur nicht mit."
- Formalisierung: $\neg$Anmeldung $\to$ $\neg$Klausur
- Prämisse falsch: wer sich anmeldet, kann die Klausur mitschreiben oder auch nicht
  (bei '$\neg$Anmeldung' falsch (d.h. 'Anmeldung' wahr) fordert die Regel nichts)
  Abmeldung bis 25.01.2015
- Prämisse wahr: eine nichtangemeldete Person, die die Klausur mitschreibt ('Anmeldung' falsch und 'Klausur' wahr) würde die Implikation (Regel) nicht erfüllen

Aussagenlogik

Formalisierung

Aussagenlogik — Formalisierung

Beispiele

- *"Wer A sagt, muss auch B sagen"*
  $\text{Asagen} \rightarrow \text{Bsagen}$

- *"Schlachtet der Bauer eine Henne,*
  so ist die Henne krank oder der Bauer."
  Atome: HenneSchlachten, KrankeHenne, KrankerBauer

$$\text{HenneSchlachten} \rightarrow (\text{KrankeHenne} \vee \text{KrankerBauer})$$

- *"Im Februar Schnee und Eis,*
  macht den Sommer lang und heiß"
  Atome: FebSchnee, FebEis, LangerSommer, HeißerSommer

$$(\text{FebSchnee} \wedge \text{FebEis}) \rightarrow (\text{LangerSommer} \wedge \text{HeißerSommer})$$

Aussagenlogik — Formalisierung

StGB 19, §242 Diebstahl [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Formalisierung

Atome: SacheFremd, SacheBeweglich, SichAneignen, DrittenAneignen, Dieb

$$\Big((\mathsf{SacheFremd} \land \mathsf{SacheBeweglich}) \land (\mathsf{SichAneignen} \lor \mathsf{DrittenAneignen})\Big) \to \mathsf{Dieb}$$

Aussagenlogik — Formalisierung

StGB 16, §211 Mord [editiert]

Mörder sind genau die Personen, die

- *aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,*
- *heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder*
- *um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,*

einen Menschen töten.

Formalisierung

$$\begin{aligned}\text{Mörder} \leftrightarrow \Big(& (\text{Person} \wedge \text{Tötung}) \wedge \\ & (\text{Mordlust} \vee (\text{GeschlTrieb} \vee (\text{Habgier} \vee \ldots)))\Big)\end{aligned}$$

Aussagenlogik — Formalisierung

StGB 16, §212 Totschlag [editiert]

Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.

Formalisierung

$$\Big(\text{Person} \wedge (\text{Tötung} \wedge \neg\text{Mörder})\Big) \rightarrow \text{Totschläger}$$

Tautologien und Erfüllbarkeit

Definition

Eine Formel F ist

- eine Tautologie oder allgemeingültig,
  gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
  (d.h. sie immer wahr ist; unabh. von Interpretation der Atome)
- unerfüllbar, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen I
  (d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Atome)
- erfüllbar, gdw. $I \models F$ für eine Interpretation I
- widerlegbar, gdw. $I \not\models F$ für eine Interpretation I

Problem

- Wie weist man eine Tautologie nach?
- er wären unendliche viele Interpretationen zu überprüfen
- relevant sind zum Glück nur die Atome der Formel

Theorem

Sei F eine Formel und I eine Interpretation. Dann gilt

$$F^I = F^J \qquad \text{wobei} \qquad J = I \cap \mathrm{Atome}(F)$$

Beweis.

in der Übung $\square$

Aussagenlogik — Tautologien

Wahrheitswertetabelle

- Beweisschema für komplexe Aussagen
- tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten
  (basierend auf den Atomen der Formel)
- wird schnell sehr groß

Beispiel

- Formel $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$ ist eine Tautologie
- Tautologie-Beweis durch Wahrheitswertetabelle:

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \lor (B \land C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \lor B) \land (A \lor C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \land C$	F_1	$A \lor B$	$A \lor C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

□

Aussagenlogik — Tautologien

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	✗	✗	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	✗	✓	✗
$A_0 \wedge \neg A_0$	✗	✓	✗	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	✗	✗	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓	✗	✓	✗

Notizen

- Nachweis Tautologie: Beweis (z.B. Wahrheitswertetabelle)
- Nachweis Unerfüllbarkeit: Beweis (z.B. Wahrheitswertetabelle)
- Nachweis Erfüllbarkeit: Angabe Modell
- Nachweis Widerlegbarkeit: Angabe Widerlegung

Aussagenlogik — Tautologien

klassische Tautologien	**Bezeichnung**
$A \lor \neg A$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \lor B) \land (A \to C) \land (B \to C)) \to C$	Fallunterscheidung
$(A \land (A \to B)) \to B$	*modus ponens*
$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$	Syllogismus (Transitivität von $\to$)
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \land B) \to A$	Abschwächung für $\land$
$A \to (A \lor B)$	Abschwächung für $\lor$

Aussagenlogik — Tautologien

Theorem (modus ponens)

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und "wenn A, dann B", dann gilt auch B)

Beweis.

Mit Fallunterscheidung:

- falls B wahr ist, dann ist $F = \cdots \rightarrow B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
  - A wahr, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ falsch ist
  - A falsch, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ auch falsch ist

Da $F' = A \wedge (A \rightarrow B)$ falsch ist, ist $F = F' \rightarrow B$ wahr $\square$

Aussagenlogik — Tautologien

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

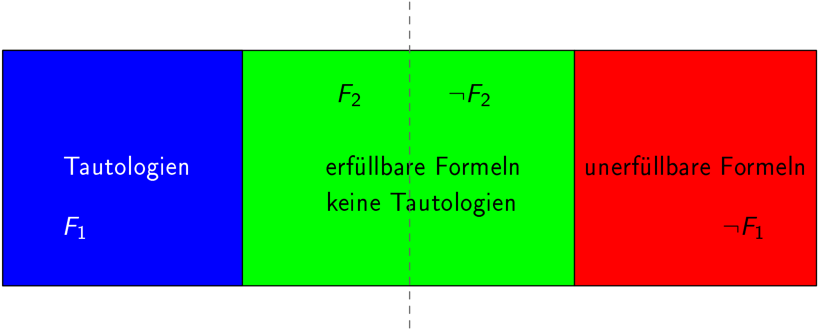
- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓
- Für jede Tautologie F ist $\neg F$ unerfüllbar ✓
- ~~Für jede erfüllbare Formel F ist auch $\neg F$ erfüllbar~~ ✗

Notizen

- Vorsicht mit der Negation:
  1. $\neg F$ ist unerfüllbar für jede Tautologie F
     ($\neg F$ ist für jede Interpretation falsch)
  2. F kann erfüllbar sein, falls F keine Tautologie ist
     (F ist nicht für jede Interpretation wahr)

Aussagenlogik — Tautologien

Spiegelbildprinzip:



Zusammenfassung

- Strukturelle Rekursion und Induktion
- Interpretationen und Semantik von Formeln
- Formalisierungen von Aussagen
- Tautologien und Erfüllbarkeit

Erste Übungsserie läuft bereits.