

Logik

Vorlesung 2: Semantik der Aussagenlogik

Andreas Maletti

24. Oktober 2014

Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 Aussagenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- 3 Prädikatenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

heutige Vorlesung

- 1 Vertiefung Syntax
- 2 Semantik Aussagenlogik
- 3 Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen
- 4 Tautologien und Erfüllbarkeit

Bitte Fragen direkt stellen!

Organisation

Moduleinschreibung

- Einschreibeschluss: 26. Oktober 2014
- Anmeldung im TOOL

<https://almaweb.uni-leipzig.de/einschreibung>

Moduleinschreibung

- Einschreibeschluss: 26. Oktober 2014
- Anmeldung im TOOL

<https://almaweb.uni-leipzig.de/einschreibung>

- Abmeldefrist: 25. Januar 2015
- Abmeldung auch im TOOL

Wiederholung: Syntax

Inhalt

- 1 Motivation und mathematische Grundlagen
- 2 **Aussagenlogik**
 - **Syntax und Semantik**
 - Äquivalenz und Normalformen
 - Weitere Eigenschaften
 - Resolution
- 3 Prädikatenlogik
 - Syntax und Semantik
 - Äquivalenz und Normalformen
 - HERBRAND-Theorie
 - Unifikation und Resolution
- 4 Ausblick

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist
- Atome A_0, A_1, A_2, \dots

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist
- Atome A_0, A_1, A_2, \dots

\neg Negation $\neg F$	nicht
\wedge Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$	und
\vee Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$	oder

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist

- Atome A_0, A_1, A_2, \dots

\neg Negation $\neg F$ nicht

\wedge Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$ und

\vee Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$ oder

Definition (Formel)

- Jedes Atom ist eine Formel

Atome

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist
- Atome A_0, A_1, A_2, \dots
- \neg Negation $\neg F$ nicht
- \wedge Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$ und
- \vee Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$ oder

Definition (Formel)

- Jedes Atom ist eine Formel **Atome**
- $\neg F$ ist eine Formel gdw. F eine Formel ist
(nicht F) **Negation**

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist
- Atome A_0, A_1, A_2, \dots
- \neg Negation $\neg F$ nicht
- \wedge Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$ und
- \vee Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$ oder

Definition (Formel)

- Jedes Atom ist eine Formel **Atome**
- $\neg F$ ist eine Formel gdw. F eine Formel ist
(nicht F) **Negation**
- $(F_1 \wedge F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
 F_1 und F_2 **Konjunktion**

Wiederholung

- Aussage ist Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist
- Atome A_0, A_1, A_2, \dots
- \neg Negation $\neg F$ nicht
- \wedge Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$ und
- \vee Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$ oder

Definition (Formel)

- Jedes Atom ist eine Formel **Atome**
- $\neg F$ ist eine Formel gdw. F eine Formel ist
(nicht F) **Negation**
- $(F_1 \wedge F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
 F_1 und F_2 **Konjunktion**
- $(F_1 \vee F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
 F_1 oder F_2 **Disjunktion**

Notizen

- **Syntax** = Struktur und Aufbau von Formeln
- bisher haben Formeln noch keine Bedeutung
(sind bisher nur spezielle Zeichenketten)
- $1 + 1$ ist gültiger arithmetischer Ausdruck (Syntax)
- $1 + 1 = 2$ ist ein gültiger arithmetischer Ausdruck (Syntax)
- Wert von $1 + 1$ oder Gültigkeit der Gleichheit $1 + 1 = 2$
benötigt **Semantik**

Notizen

- \mathcal{F} = Menge aller Formeln
- wir lassen manchmal die äußersten Klammern weg
wir schreiben z.B. $f(F_1 \vee F_2)$ anstatt $f((F_1 \vee F_2))$

Notizen

- \mathcal{F} = Menge aller Formeln
- wir lassen manchmal die äußersten Klammern weg
wir schreiben z.B. $f(F_1 \vee F_2)$ anstatt $f((F_1 \vee F_2))$
- Definition Funktionen entspr. Fällen der Def. 'Formel'
wobei man die Funktionsergebnisse (strukturelle Rekursion)
der echten Teilformeln nutzen kann

Notizen

- \mathcal{F} = Menge aller Formeln
- wir lassen manchmal die äußersten Klammern weg
wir schreiben z.B. $f(F_1 \vee F_2)$ anstatt $f((F_1 \vee F_2))$
- Definition Funktionen entspr. Fällen der Def. 'Formel'
wobei man die Funktionsergebnisse (strukturelle Rekursion)
der echten Teilformeln nutzen kann

Theorem (Strukturelle Rekursion)

Für beliebige Mengen M und Funktionen $c: \mathbb{N} \rightarrow M$, $g: M \rightarrow M$
und $g', g'': M \times M \rightarrow M$ definieren

- $f(A_i) = c(i)$
- $f(\neg F) = g(f(F))$
- $f(F_1 \wedge F_2) = g'(f(F_1), f(F_2))$
- $f(F_1 \vee F_2) = g''(f(F_1), f(F_2))$

eindeutig eine (totale) Funktion $f: \mathcal{F} \rightarrow M$.

Definition (Atome einer Formel)

Wir definieren die Funktion $\text{Atome}: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\{A_0, A_1, \dots\})$

$$\text{Atome}(A_i) = \{A_i\}$$

$$\text{Atome}(\neg F) = \text{Atome}(F)$$

$$\text{Atome}(F_1 \wedge F_2) = \text{Atome}(F_1) \cup \text{Atome}(F_2)$$

$$\text{Atome}(F_1 \vee F_2) = \text{Atome}(F_1) \cup \text{Atome}(F_2)$$

Definition (Atome einer Formel)

Wir definieren die Funktion $\text{Atome}: \mathcal{F} \rightarrow \text{Pow}(\{A_0, A_1, \dots\})$

$$\text{Atome}(A_i) = \{A_i\}$$

$$\text{Atome}(\neg F) = \text{Atome}(F)$$

$$\text{Atome}(F_1 \wedge F_2) = \text{Atome}(F_1) \cup \text{Atome}(F_2)$$

$$\text{Atome}(F_1 \vee F_2) = \text{Atome}(F_1) \cup \text{Atome}(F_2)$$

Hier ist

- $c(i) = \{A_i\}$
- $g = \text{id}$
- $g' = g''$ mit $g'(S_1, S_2) = S_1 \cup S_2$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$\begin{aligned} & \text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ = & \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ = & \{A_1\} \cup \text{Atome}((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)) \\ = & \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\ = & \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\ = & \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\ = & \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\} \end{aligned}$$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$\begin{aligned} & \text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\ &= \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\} \end{aligned}$$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$\begin{aligned} & \text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\ &= \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\} \end{aligned}$$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$\begin{aligned} & \text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\ &= \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\} \end{aligned}$$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$\begin{aligned} & \text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\ &= \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\} \end{aligned}$$

Beispiele

- 1 Für die Formel $\neg A_2$ gilt $\text{Atome}(\neg A_2) = \{A_2\}$
- 2 $\text{Atome}(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))) = \{A_0, A_1, A_4\}$
- 3 $\text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) = \{A_0, \dots, A_4\}$

Nachweis für 3:

$$\begin{aligned} & \text{Atome}(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \text{Atome}(A_1) \cup \text{Atome}(\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3))) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}((A_2 \wedge A_0) \vee (A_4 \wedge \neg A_3)) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2 \wedge A_0) \cup \text{Atome}(A_4 \wedge \neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \text{Atome}(A_2) \cup \text{Atome}(A_0) \cup \text{Atome}(A_4) \cup \text{Atome}(\neg A_3) \\ &= \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_0\} \cup \{A_4\} \cup \text{Atome}(A_3) \\ &= \{A_1, A_2, A_0, A_4, A_3\} \end{aligned}$$

Theorem (Strukturelle Induktion)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ eine Eigenschaft von Formeln. Falls

- 1 $A_i \in \mathcal{E}$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- 2 $\neg F \in \mathcal{E}$ für alle $F \in \mathcal{E}$
- 3 $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$ und
- 4 $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$,

dann gilt $\mathcal{E} = \mathcal{F}$

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Beweis.

Sei \mathcal{E} die Menge der Formeln mit gerader Anzahl an Klammern.

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Beweis.

Sei \mathcal{E} die Menge der Formeln mit gerader Anzahl an Klammern.

- 1 Offenbar gilt $A_i \in \mathcal{E}$, denn 0 ist gerade

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Beweis.

Sei \mathcal{E} die Menge der Formeln mit gerader Anzahl an Klammern.

- 1 Offenbar gilt $A_i \in \mathcal{E}$, denn 0 ist gerade
- 2 $\neg F$ enthält die gleiche Zahl an Klammern wie F , somit $\neg F \in \mathcal{E}$ für alle $F \in \mathcal{E}$

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Beweis.

Sei \mathcal{E} die Menge der Formeln mit gerader Anzahl an Klammern.

- 1 Offenbar gilt $A_i \in \mathcal{E}$, denn 0 ist gerade
- 2 $\neg F$ enthält die gleiche Zahl an Klammern wie F , somit $\neg F \in \mathcal{E}$ für alle $F \in \mathcal{E}$
- 3 $(F_1 \wedge F_2)$ enthält 2 Klammern und die Klammern aus F_1 und F_2 , somit $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$
(Summe gerader Zahlen ist wieder gerade)

Theorem

Jede Formel enthält eine gerade Anzahl Klammern

Beweis.

Sei \mathcal{E} die Menge der Formeln mit gerader Anzahl an Klammern.

- 1 Offenbar gilt $A_i \in \mathcal{E}$, denn 0 ist gerade
- 2 $\neg F$ enthält die gleiche Zahl an Klammern wie F , somit $\neg F \in \mathcal{E}$ für alle $F \in \mathcal{E}$
- 3 $(F_1 \wedge F_2)$ enthält 2 Klammern und die Klammern aus F_1 und F_2 , somit $(F_1 \wedge F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$
(Summe gerader Zahlen ist wieder gerade)
- 4 $(F_1 \vee F_2)$ enthält 2 Klammern und die Klammern aus F_1 und F_2 , somit $(F_1 \vee F_2) \in \mathcal{E}$ für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{E}$



Zusammenfassung

- induktive Definition der Formeln
- **strukturelle Rekursion** für Definition von Funktionen $f: \mathcal{F} \rightarrow M$
- korrespondierendes Beweisprinzip: **strukturelle Induktion**

Semantik

Überblick

- wir nutzen die Wahrheitswerte $0 \hat{=} \text{falsch}$ und $1 \hat{=} \text{wahr}$
- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ = Menge der Wahrheitswerte

Überblick

- wir nutzen die Wahrheitswerte $0 \hat{=} \text{falsch}$ und $1 \hat{=} \text{wahr}$
- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ = Menge der Wahrheitswerte

Definition (Interpretation)

Jede Teilmenge $I \subseteq \{A_0, A_1, \dots\}$ ist eine **Interpretation**

Eine Interpretation enthält die wahren Atome (auch Belegung)

Definition (per struktureller Rekursion)

Sei $I \subseteq \{A_0, A_1, \dots\}$ eine Interpretation.

Wir definieren die Erweiterung $\cdot^I: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ der Interpretation I auf Formeln

$$(A_i)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } A_i \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg F)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } F^I = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(F_1 \wedge F_2)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } F_1^I = 1 \text{ und } F_2^I = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(F_1 \vee F_2)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } F_1^I = 1 \text{ oder } F_2^I = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Variante (kürzer)

$$(A_i)^I = \begin{cases} 1 & \text{falls } A_i \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg F)^I = 1 - F^I$$

$$(F_1 \wedge F_2)^I = \min(F_1^I, F_2^I)$$

$$(F_1 \vee F_2)^I = \max(F_1^I, F_2^I)$$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$:
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$:
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$
- Sei I Interpretation mit $A_2 \in I$:
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir wieder $A_2^I = 1$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 0$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 1 = 0$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$:
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$
- Sei I Interpretation mit $A_2 \in I$:
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir wieder $A_2^I = 1$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 0$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 1 = 0$
- sei $A_1, A_4 \in I$ und $A_0 \notin I$
Für $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I$ berechnen wir
 - $(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))^I$, wofür wir
 - $A_1^I = 1$ berechnen
 - $(A_0 \wedge A_4)^I = \min(A_0^I, A_4^I) = 0$ berechnenLetztlich $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I = 0$

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F'_1 für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F'_1 für Teilformeln F_1

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F_1' für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1' für Teilformeln F_1
- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0'	A_1'	A_4'	$(A_0 \wedge A_4)'$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))'$	F'

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F_1' für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1' für Teilformeln F_1
- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0'	A_1'	A_4'	$(A_0 \wedge A_4)'$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))'$	F'
0	1	1			

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F_1' für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1' für Teilformeln F_1
- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0'	A_1'	A_4'	$(A_0 \wedge A_4)'$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))'$	F'
0	1	1			0

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F_1' für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1' für Teilformeln F_1
- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0'	A_1'	A_4'	$(A_0 \wedge A_4)'$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))'$	F'
0	1	1	0	1	

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F_1' für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1' für Teilformeln F_1
- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0'	A_1'	A_4'	$(A_0 \wedge A_4)'$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))'$	F'
0	1	1	0	1	0

Notizen

- bei Berechnung von F^I berechnen wir auch F_1^I für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1^I für Teilformeln F_1

- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0^I	A_1^I	A_4^I	$(A_0 \wedge A_4)^I$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))^I$	F^I
0	1	1	0	1	0

- In solchen Tabellen lassen wir I auch weg

Notizen

- bei Berechnung von F' berechnen wir auch F_1' für alle Teilformeln F_1 von F
- tabellarischer Ansatz; Auflistung aller F_1' für Teilformeln F_1

- am Beispiel $F = \neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$

A_0'	A_1'	A_4'	$(A_0 \wedge A_4)'$	$(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))'$	F'
0	1	1	0	1	0

- In solchen Tabellen lassen wir I auch weg
- wir können auch die Semantik der Junktoren so erfassen

Notizen

- Eine Formel F ist unter einer Interpretation I entweder **wahr** ($F^I = 1$) oder **falsch** ($F^I = 0$)
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus Wahrheit ihrer Atome

Notizen

- Eine Formel F ist unter einer Interpretation I entweder **wahr** ($F^I = 1$) oder **falsch** ($F^I = 0$)
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus Wahrheit ihrer Atome

Definition (Modell, Widerlegung)

Sei F eine Formel und I eine Interpretation

- I ist ein **Modell** für F gdw. $F^I = 1$ kurz: $I \models F$

Notizen

- Eine Formel F ist unter einer Interpretation I entweder **wahr** ($F^I = 1$) oder **falsch** ($F^I = 0$)
- Wahrheit einer Formel ergibt sich aus Wahrheit ihrer Atome

Definition (Modell, Widerlegung)

Sei F eine Formel und I eine Interpretation

- I ist ein **Modell** für F gdw. $F^I = 1$ kurz: $I \models F$
- I ist eine **Widerlegung** für F gdw. $F^I = 0$ kurz: $I \not\models F$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$: (Modell)
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$: (Modell)
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$
- Sei I Interpretation mit $A_2 \in I$: (Widerlegung)
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir wieder $A_2^I = 1$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 0$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 1 = 0$

Beispiel

- Sei I Interpretation mit $A_2 \notin I$: (Modell)
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir zunächst $A_2^I = 0$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 1$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 0 = 1$
- Sei I Interpretation mit $A_2 \in I$: (Widerlegung)
Für $(\neg A_2)^I$ berechnen wir wieder $A_2^I = 1$.
Also gilt $(\neg A_2)^I = 0$
kürzer: $(\neg A_2)^I = 1 - A_2^I = 1 - 1 = 0$
- sei $A_1, A_4 \in I$ und $A_0 \notin I$ (Widerlegung)
Für $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I$ berechnen wir
 - $(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))^I$, wofür wir
 - $A_1^I = 1$ berechnen
 - $(A_0 \wedge A_4)^I = \min(A_0^I, A_4^I) = 0$ berechnenLetztlich $(\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4)))^I = 0$

Notizen

- Modelle und Widerlegungen lassen sich aus Wahrheitstabelle ablesen
- **Wahrheitstabelle** für Junktoren (diesmal ohne \perp)

Notizen

- Modelle und Widerlegungen lassen sich aus Wahrheitstabelle ablesen
- **Wahrheitstabelle** für Junktoren (diesmal ohne I)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Notation und Abkürzungen

- der Übersicht halber erlauben wir auch A, B, C, \dots ,
längere Bezeichner und mathematische Ausdrücke als Atome

$$(x \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{R})$$

Notation und Abkürzungen

- der Übersicht halber erlauben wir auch A, B, C, \dots ,
längere Bezeichner und mathematische Ausdrücke als Atome
 $(x \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{R})$
- **Implikation:** $(F_1 \rightarrow F_2)$ ist eine Abkürzung für $(\neg F_1 \vee F_2)$
wenn F_1 wahr ist, dann auch F_2

Notation und Abkürzungen

- der Übersicht halber erlauben wir auch A, B, C, \dots ,
längere Bezeichner und mathematische Ausdrücke als Atome
 $(x \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{R})$
- **Implikation:** $(F_1 \rightarrow F_2)$ ist eine Abkürzung für $(\neg F_1 \vee F_2)$
wenn F_1 wahr ist, dann auch F_2
- **Äquivalenz:** $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ ist eine Abkürzung für

$$((F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1))$$

F_1 ist genau dann wahr, wenn F_2 wahr ist

erweiterte Wahrheitwertetabelle:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Schwierigkeit: Implikation $F_1 \rightarrow F_2$

- $F_1 \rightarrow F_2$ besteht aus **Prämisse** F_1 und **Konsequenz** F_2
- $F_1 \rightarrow F_2$ ist genau dann **falsch**, wenn die Prämisse F_1 wahr ist, aber die Konsequenz F_2 falsch ist

Schwierigkeit: Implikation $F_1 \rightarrow F_2$

- $F_1 \rightarrow F_2$ besteht aus **Prämisse** F_1 und **Konsequenz** F_2
- $F_1 \rightarrow F_2$ ist genau dann **falsch**, wenn die Prämisse F_1 wahr ist, aber die Konsequenz F_2 falsch ist

Beispiel

- “Wer sich nicht anmeldet, schreibt die Klausur nicht mit.”
- Formalisierung: $\neg\text{Anmeldung} \rightarrow \neg\text{Klausur}$

Schwierigkeit: Implikation $F_1 \rightarrow F_2$

- $F_1 \rightarrow F_2$ besteht aus **Prämisse** F_1 und **Konsequenz** F_2
- $F_1 \rightarrow F_2$ ist genau dann **falsch**, wenn die Prämisse F_1 wahr ist, aber die Konsequenz F_2 falsch ist

Beispiel

- “Wer sich nicht anmeldet, schreibt die Klausur nicht mit.”
- Formalisierung: $\neg\text{Anmeldung} \rightarrow \neg\text{Klausur}$
- Prämisse **falsch**: wer sich anmeldet, kann die Klausur mitschreiben oder auch nicht
(bei ‘ $\neg\text{Anmeldung}$ ’ falsch (d.h. ‘Anmeldung’ wahr)
fordert die Regel nichts) **Abmeldung bis 25.01.2015**

Schwierigkeit: Implikation $F_1 \rightarrow F_2$

- $F_1 \rightarrow F_2$ besteht aus **Prämisse** F_1 und **Konsequenz** F_2
- $F_1 \rightarrow F_2$ ist genau dann **falsch**, wenn die Prämisse F_1 wahr ist, aber die Konsequenz F_2 falsch ist

Beispiel

- “Wer sich nicht anmeldet, schreibt die Klausur nicht mit.”
- Formalisierung: $\neg\text{Anmeldung} \rightarrow \neg\text{Klausur}$
- Prämisse **falsch**: wer sich anmeldet, kann die Klausur mitschreiben oder auch nicht
(bei ‘ $\neg\text{Anmeldung}$ ’ falsch (d.h. ‘Anmeldung’ wahr) fordert die Regel nichts) **Abmeldung bis 25.01.2015**
- Prämisse **wahr**: eine nichtangemeldete Person, die die Klausur mitschreibt (‘Anmeldung’ **falsch** und ‘Klausur’ **wahr**) würde die Implikation (Regel) nicht erfüllen

Formalisierung

Beispiele

- *“Wer A sagt, muss auch B sagen”*
Asagen \rightarrow Bsagen

Beispiele

- *“Wer A sagt, muss auch B sagen”*

Asagen → *Bsagen*

- *“Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer.”*

Atome: HenneSchlachten, KrankeHenne, KrankerBauer

Beispiele

- *“Wer A sagt, muss auch B sagen”*

Asagen \rightarrow *Bsagen*

- *“Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer.”*

Atome: HenneSchlachten, KrankeHenne, KrankerBauer

HenneSchlachten \rightarrow (*KrankeHenne* \vee *KrankerBauer*)

Beispiele

- *“Wer A sagt, muss auch B sagen”*

Asagen \rightarrow Bsagen

- *“Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer.”*

Atome: HenneSchlachten, KrankeHenne, KrankerBauer

HenneSchlachten \rightarrow (KrankeHenne \vee KrankerBauer)

- *“Im Februar Schnee und Eis,
macht den Sommer lang und heiß”*

Atome: FebSchnee, FebEis, LangerSommer, HeißerSommer

Beispiele

- *“Wer A sagt, muss auch B sagen”*

Asagen \rightarrow Bsagen

- *“Schlachtet der Bauer eine Henne,
so ist die Henne krank oder der Bauer.”*

Atome: HenneSchlachten, KrankeHenne, KrankerBauer

HenneSchlachten \rightarrow (KrankeHenne \vee KrankerBauer)

- *“Im Februar Schnee und Eis,
macht den Sommer lang und heiß”*

Atome: FebSchnee, FebEis, LangerSommer, HeiBerSommer

(FebSchnee \wedge FebEis) \rightarrow (LangerSommer \wedge HeiBerSommer)

StGB 19, §242 Diebstahl [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

StGB 19, §242 Diebstahl [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Formalisierung

Atome: SacheFremd, SacheBeweglich, SichAneignen, DrittenAneignen, Dieb

StGB 19, §242 Diebstahl [editiert]

Wer eine fremde bewegliche Sache einem anderen in der Absicht wegnimmt, die Sache sich oder einem Dritten rechtswidrig zuzueignen, ist ein Dieb.

Formalisierung

Atome: SacheFremd, SacheBeweglich, SichAneignen, DrittenAneignen, Dieb

$$\left((SacheFremd \wedge SacheBeweglich) \wedge (SichAneignen \vee DrittenAneignen) \right) \rightarrow Dieb$$

StGB 16, §211 Mord [editiert]

Mörder sind genau die Personen, die

- *aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstrieb, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,*
- *heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder*
- *um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken, einen Menschen töten.*

StGB 16, §211 Mord [editiert]

Mörder sind genau die Personen, die

- *aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstrieb, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,*
- *heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder*
- *um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken, einen Menschen töten.*

Formalisierung

$$\text{Mörder} \leftrightarrow \left((\text{Person} \wedge \text{Tötung}) \wedge \right. \\ \left. (\text{Mordlust} \vee (\text{GeschlTrieb} \vee (\text{Habgier} \vee \dots))) \right)$$

StGB 16, §212 Totschlag [editiert]

*Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.*

StGB 16, §212 Totschlag [editiert]

*Wer einen Menschen tötet, ohne Mörder zu sein,
wird als Totschläger verurteilt.*

Formalisierung

$(\text{Person} \wedge (\text{Tötung} \wedge \neg \text{Mörder})) \rightarrow \text{Totschläger}$

Tautologien und Erfüllbarkeit

Definition

Eine Formel F ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,
gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. sie immer wahr ist; unabh. von Interpretation der Atome)

Definition

Eine Formel F ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,
gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. sie immer wahr ist; unabh. von Interpretation der Atome)
- **unerfüllbar**, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Atome)

Definition

Eine Formel F ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,
gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. sie immer wahr ist; unabh. von Interpretation der Atome)
- **unerfüllbar**, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Atome)
- **erfüllbar**, gdw. $I \models F$ für eine Interpretation I

Definition

Eine Formel F ist

- eine **Tautologie** oder **allgemeingültig**,
gdw. $I \models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. sie immer wahr ist; unabh. von Interpretation der Atome)
- **unerfüllbar**, gdw. $I \not\models F$ für alle Interpretationen I
(d.h. immer falsch; unabh. von Interpretation der Atome)
- **erfüllbar**, gdw. $I \models F$ für eine Interpretation I
- **widerlegbar**, gdw. $I \not\models F$ für eine Interpretation I

Problem

- Wie weist man eine Tautologie nach?
- es wären unendliche viele Interpretationen zu überprüfen

Problem

- Wie weist man eine Tautologie nach?
- es wären unendliche viele Interpretationen zu überprüfen
- relevant sind zum Glück nur die Atome der Formel

Problem

- Wie weist man eine Tautologie nach?
- es wären unendliche viele Interpretationen zu überprüfen
- relevant sind zum Glück nur die Atome der Formel

Theorem

Sei F eine Formel und I eine Interpretation. Dann gilt

$$F^I = F^J \quad \text{wobei} \quad J = I \cap \text{Atome}(F)$$

Problem

- Wie weist man eine Tautologie nach?
- es wären unendliche viele Interpretationen zu überprüfen
- relevant sind zum Glück nur die Atome der Formel

Theorem

Sei F eine Formel und I eine Interpretation. Dann gilt

$$F^I = F^J \quad \text{wobei} \quad J = I \cap \text{Atome}(F)$$

Beweis.

in der Übung



Wahrheitstabelle

- Beweisschema für komplexe Aussagen
- tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten
(basierend auf den Atomen der Formel)
- **wird schnell sehr groß**

Wahrheitstabelle

- Beweisschema für komplexe Aussagen
- tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten
(basierend auf den Atomen der Formel)
- **wird schnell sehr groß**

Beispiel

- Formel $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$ ist eine Tautologie

Wahrheitstabelle

- Beweisschema für komplexe Aussagen
- tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten (basierend auf den Atomen der Formel)
- **wird schnell sehr groß**

Beispiel

- Formel $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$ ist eine Tautologie
- Tautologie-Beweis durch Wahrheitstabelle:

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Wahrheitstabelle

- Beweisschema für komplexe Aussagen
- tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten (basierend auf den Atomen der Formel)
- **wird schnell sehr groß**

Beispiel

- Formel $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$ ist eine Tautologie
- Tautologie-Beweis durch Wahrheitstabelle:

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Wahrheitstabelle

- Beweisschema für komplexe Aussagen
- tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten (basierend auf den Atomen der Formel)
- **wird schnell sehr groß**

Beispiel

- Formel $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$ ist eine Tautologie
- Tautologie-Beweis durch Wahrheitstabelle:

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Theorem

Folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\underbrace{(A \vee (B \wedge C))}_{F_1} \leftrightarrow \underbrace{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}_{F_2}$$

Beweis mit Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0				
$A_0 \vee \neg A_0$				
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	\times			
$A_0 \vee \neg A_0$				
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X		
$A_0 \vee \neg A_0$				
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	\times	\times	\checkmark	
$A_0 \vee \neg A_0$				
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$				
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓			
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X		
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$				
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X			
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓		
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$				
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X			
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X		
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$				

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓			

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓	X		

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓	X	✓	

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓	X	✓	X

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓	X	✓	X

Notizen

- Nachweis **Tautologie**: Beweis (z.B. Wahrheitstabelle)
- Nachweis **Unerfüllbarkeit**: Beweis (z.B. Wahrheitstabelle)

Frage

Formel	Tautologie	unerf.	erfüllbar	widerlegbar
A_0	X	X	✓	✓
$A_0 \vee \neg A_0$	✓	X	✓	X
$A_0 \wedge \neg A_0$	X	✓	X	✓
$A_0 \rightarrow A_1$	X	X	✓	✓
$A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_0)$	✓	X	✓	X

Notizen

- Nachweis **Tautologie**: Beweis (z.B. Wahrheitstabelle)
- Nachweis **Unerfüllbarkeit**: Beweis (z.B. Wahrheitstabelle)
- Nachweis **Erfüllbarkeit**: Angabe Modell
- Nachweis **Widerlegbarkeit**: Angabe Widerlegung

klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow C$	Fallunterscheidung
$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$	<i>modus ponens</i>
$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Syllogismus (Transitivität von \rightarrow)
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Kontraposition
$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$	<i>reductio ad absurdum</i> (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \rightarrow A$	Abschwächung für \wedge
$A \rightarrow (A \vee B)$	Abschwächung für \vee

Theorem (modus ponens)

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und “wenn A , dann B ”, dann gilt auch B)

Theorem (modus ponens)

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und “wenn A , dann B ”, dann gilt auch B)

Beweis.

Mit Fallunterscheidung:

- falls B wahr ist, dann ist $F = \dots \rightarrow B$ wahr

Theorem (modus ponens)

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und “wenn A , dann B ”, dann gilt auch B)

Beweis.

Mit Fallunterscheidung:

- falls B wahr ist, dann ist $F = \dots \rightarrow B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
 - A wahr, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ falsch ist

Theorem (modus ponens)

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und “wenn A , dann B ”, dann gilt auch B)

Beweis.

Mit Fallunterscheidung:

- falls B wahr ist, dann ist $F = \dots \rightarrow B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
 - A wahr, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ falsch ist
 - A falsch, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ auch falsch ist

Theorem (modus ponens)

$F = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und “wenn A , dann B ”, dann gilt auch B)

Beweis.

Mit Fallunterscheidung:

- falls B wahr ist, dann ist $F = \dots \rightarrow B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
 - A wahr, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ falsch ist
 - A falsch, womit $A \wedge (A \rightarrow B)$ auch falsch ist

Da $F' = A \wedge (A \rightarrow B)$ falsch ist, ist $F = F' \rightarrow B$ wahr □

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar



Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar
- Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie



Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar 
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ 

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓
- Für jede Tautologie F ist $\neg F$ unerfüllbar

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓
- Für jede Tautologie F ist $\neg F$ unerfüllbar ✓

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓
- Für jede Tautologie F ist $\neg F$ unerfüllbar ✓
- Für jede erfüllbare Formel F ist auch $\neg F$ erfüllbar

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓
- Für jede Tautologie F ist $\neg F$ unerfüllbar ✓
- ~~Für jede erfüllbare Formel F ist auch $\neg F$ erfüllbar~~ ✗

Frage

Welche Zusammenhänge gelten?

- Jede Tautologie ist erfüllbar ✓
- ~~Jede erfüllbare Formel ist eine Tautologie~~ ✗
- Unerfüllbare Formeln sind nicht allgemeingültig ✓
- Für jede Tautologie F ist $\neg F$ unerfüllbar ✓
- ~~Für jede erfüllbare Formel F ist auch $\neg F$ erfüllbar~~ ✗

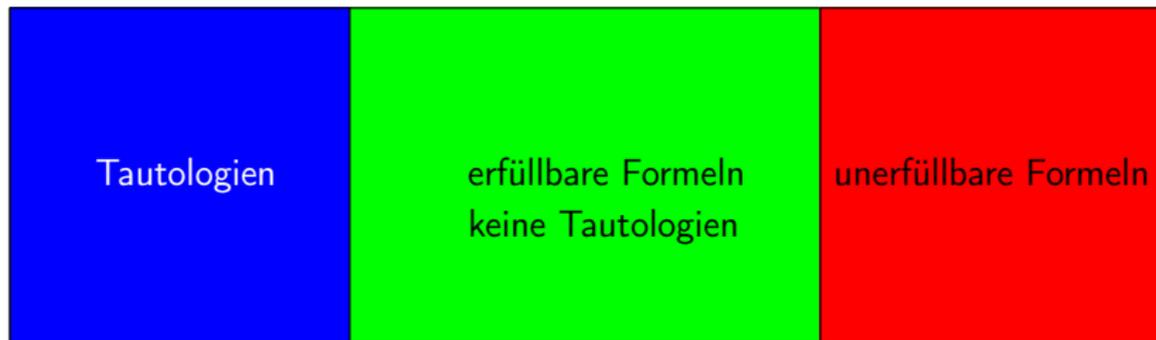
Notizen

- Vorsicht mit der Negation:
 - 1 $\neg F$ ist unerfüllbar für jede Tautologie F
($\neg F$ ist für jede Interpretation falsch)
 - 2 F kann erfüllbar sein, falls F keine Tautologie ist
(F ist nicht für jede Interpretation wahr)

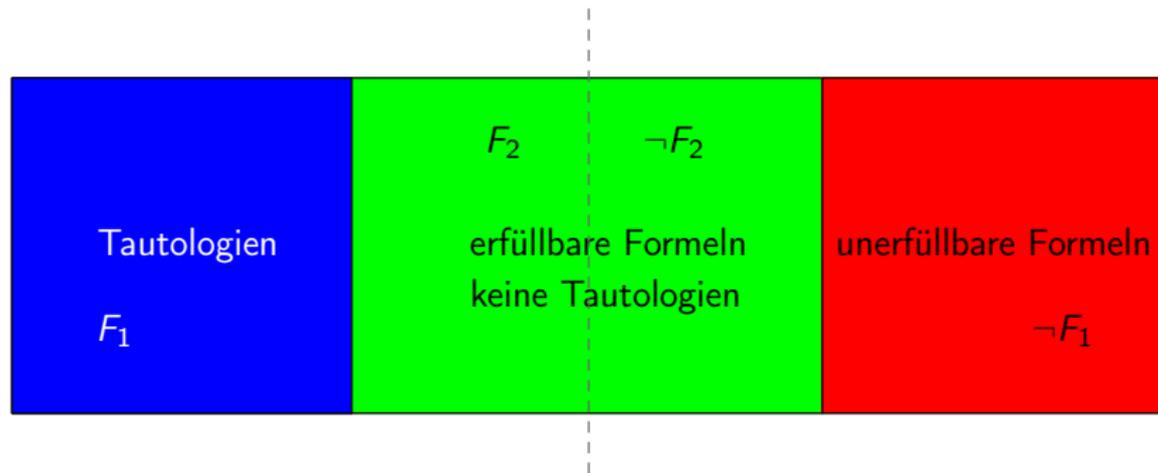
Spiegelbildprinzip:



Spiegelbildprinzip:



Spiegelbildprinzip:



- Strukturelle Rekursion und Induktion
- Interpretationen und Semantik von Formeln
- Formalisierungen von Aussagen
- Tautologien und Erfüllbarkeit

Erste Übungserie läuft bereits.