Logik
Vorlesung 1: Einführung

Andreas Maletti

17. Oktober 2014

Überblick

Inhalt

1. Motivation und mathematische Grundlagen
2. Aussagenlogik
   - Syntax und Semantik
   - Äquivalenz und Normalformen
   - Weitere Eigenschaften
   - Resolution
3. Prädikatenlogik
   - Syntax und Semantik
   - Äquivalenz und Normalformen
   - HERBRAND-Theorie
   - Unifikation und Resolution
4. Ausblick

Überblick

Fähigkeiten

- Standardnotation lesen und schreiben
- Formalisieren von natürlichsprachlichen Aussagen
- Mechanische Beweisverfahren
- Bilden von mathematischen Modellen

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Motivation und Geschichte
2. Kurzüberblick: Anwendungen
3. Mathematische Grundlagen
4. Aussagen und Grundlagen Aussagenlogik
5. Syntax Aussagenlogik

Bitte Fragen direkt stellen!

Überblick

Organisation

Organisation

Materialien

- Folien und Ankündigungen auf der Kurs-Webseite:

  http://www.informatik.uni-leipzig.de/~quaas/ws2014logik.html

- Literatur (Selbststudium und Vertiefung):

Uwe Schöning
Logik für Informatiker
Spektrum Akademischer Verlag, 5. Auflage, 2000

Jürgen Dassow
Logik für Informatiker
B.G. Teubner Verlag, 1. Auflage, 2005

Organisation

Vorlesung

- freitags, 11:15–12:45 Uhr, Hörsaal 5
- keine VL am 31. Oktober 2014 — *Reformationstag*

Übungen

- Übungsgruppen (jede zweite Woche):

Wochentag	Zeit	Raum	Übungsleiter
mittwochs	9:15–10:45	SG 3-10	Karin Quaas
freitags	9:15–10:45	SG 3-12	Karin Quaas

- keine Übung: 13.–17.10., 31.10., 19.11.
  — bitte Alternativtermin wählen

Organisation

Übungen

- Hausaufgabenkontrolle:
  Danny Richter und Hannah Voget
- Übungs- und Hausaufgaben auf Kurswebseite

  http://www.informatik.uni-leipzig.de
  /~quaas/ws2014logik.html

Sprechstunden

- Andreas Maletti — mittwochs, 15-16 Uhr
- Karin Quaas — nach Vereinbarung

Prüfungsmodalitäten

Prüfungsvorleistung

- erfolgreiche Lösen der Hausaufgaben

Punkte (in %)	Konsequenz
$\leq$ 49	Prüfungsvorleistung nicht bestanden
$\geq$ 50	Prüfungsvorleistung bestanden
60–74	+1 Bonuspunkt ($\approx$ 3%) für die Prüfung
75–89	+2 Bonuspunkte ($\approx$ 7%) für die Prüfung
$\geq$ 90	+3 Bonuspunkte ($\approx$ 10%) für die Prüfung

- Abgabe der Hausaufgaben vor der Vorlesung

(Abgabedatum steht auf dem Aufgabenblatt)

Motivation

Logik

Inhalt

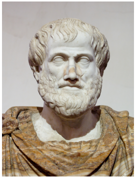
Motivation — Logik

Geschichte

- Aristoteles in Griechenland untersucht (formal) die Argumentation und das logische Schließen
- liefert mit dem Organon die Grundlage der Logik
  - *Kategorien* (Cat.)
  - *De interpretatione* (Int.)
  - *Analytica priora* (An. pr.)
  - *Analytica posteriora* (An. post.)
  - *Topik* (Top.)
  - *Sophistische Widerlegungen* (Soph. el.)

Aristoteles (* 384 v. Chr.; † 322 v. Chr.)

- bekanntester Philosoph der Antike
- Schüler von Platon
- Universalgelehrter
  (Logik, Biologie, Physik, Politik, Ethik, . . .)



Motivation — Logik

Zitat [Int. 1, 16a3–8]

- Nun sind [i] die (sprachlichen) Äußerungen unserer Stimme Symbole für [ii] das, was (beim Sprechen) unserer Seele widerfährt, und [iii] unsere schriftlichen Äußerungen sind wiederum Symbole für die (sprachlichen) Äußerungen unserer Stimme.
- Und wie nicht alle Menschen mit denselben Buchstaben schreiben, so sprechen sie auch nicht dieselbe Sprache.
- Die seelischen Widerfahrnisse aber, für welche dieses (Gesprochene und Geschriebene) an erster Stelle ein Zeichen ist, sind bei allen Menschen dieselben; und überdies sind auch schon [iv] die Dinge, von denen diese (seelischen Widerfahrnisse) Abbildungen sind, für alle dieselben.

Motivation — Logik

Definition (Syllogismus) [An. Pr. I 1, 24B18–20]

Eine Deduktion *(syllogismos)* ist ein Argument *(logos)*, in welchem sich, wenn bestimmte Dinge vorausgesetzt werden [die Prämissen], etwas von dem Vorausgesetzten Verschiedenes [die Konsequenz] mit Notwendigkeit dadurch ergibt, dass dieses der Fall ist.

Motivation — Logik

Beispiele für Syllogismen

- Wenn $\underbrace{\text{es regnet}}_{\text{Prämisse}}$ und $\underbrace{\text{man im Freien steht}}_{\text{Prämisse}}$,

  dann $\underbrace{\text{wird man nass}}_{\text{Konsequenz}}$

- Wenn
  - alle Delfine Säugetiere sind und — Prämisse
  - alle Säugetiere Wirbeltiere sind, — Prämisse

  dann sind alle Delfine Wirbeltiere — Konsequenz

- Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist keine Primzahl
  Wenn eine natürliche Zahl gerade und größer 2 ist,
  dann ist sie keine Primzahl

Motivation — Logik

EStG §1(1) — Steuerpflicht [editiert]

- Natürliche Personen, die im Inland einen Wohnsitz oder ihren gewöhnlichen Aufenthalt haben,
  sind unbeschränkt einkommensteuerpflichtig
- Zum Inland gehört auch der deutsche Festlandsockel, soweit dort Naturschätze erforscht oder ausgebeutet werden oder dieser der Energieerzeugung dient

Frage

Sind Sie unbeschränkt einkommensteuerpflichtig?

Motivation — Logik

Kalkül

- ARISTOTELES entwickelte auch den ersten Kalkül
  (Menge von gültigen Deduktionsregeln)
- seine Regeln bestehen aus 2 Prämissen und 1 Konsequenz
  (Prämissen heißen Obersatz und Untersatz)

Illustration

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\text{Obersatz}\rangle\\ \langle\text{Untersatz}\rangle\end{array}}{\langle\text{Konsequenz}\rangle}$$

Motivation — Logik

Syllogismen erster Figur von ARISTOTELES

- modus bArbArA

$$\frac{\text{Alle Säugetiere sind Wirbeltiere} \quad \text{Alle Delfine sind Säugetiere}}{\text{Alle Delfine sind Wirbeltiere}} \qquad \frac{\text{Alle } X \text{ sind } Y \quad \text{Alle } Z \text{ sind } X}{\text{Alle } Z \text{ sind } Y}$$

- modus cElArEnt

$$\frac{\text{Kein Wal ist ein Lurch} \quad \text{Alle Delfine sind Wale}}{\text{Kein Delfin ist ein Lurch}} \qquad \frac{\text{Kein } X \text{ ist } Y \quad \text{Alle } Z \text{ sind } X}{\text{Kein } Z \text{ ist } Y}$$

- modus dArII

$$\frac{\text{Alle Delfine sind Säugetiere} \quad \text{Einige Wale sind Delfine}}{\text{Einige Wale sind Säugetiere}} \qquad \frac{\text{Alle } X \text{ sind } Y \quad \text{Einige } Z \text{ sind } X}{\text{Einige } Z \text{ sind } Y}$$

Motivation — Logik

Kritik (aus heutiger Sicht)

- benutzt weiterhin natürliche Sprache
- Fehler bei leeren Konzepten — inkorrekt
  (ungültige Abschwächung: *Alle X sind Y* zu *Einige X sind Y*)
- unvollständig
  d.h. nicht alle korrekten Schlussfolgerungen sind möglich
- keine großen Ketten von Schlussfolgerungen
- erst Leibniz lieferte vollständigen Kalkül 2.000 Jahre später

Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1646; † 1716)

- dtsch. Philosoph und Mathematiker
- Leipziger
- Universalgelehrter

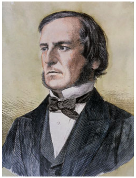
Motivation — Logik

Aussagenlogik

- entwickelt von BOOLE
- Rechnen mit atomaren Aussagen,
  die entweder wahr oder falsch sind
- Verknüpfung dieser atomaren Aussagen durch Operatoren
  (. . . und . . . , . . . oder . . . , wenn . . . dann . . . , nicht . . . , etc.)
- keine Quantoren (alle, jeder, einige, keiner, etc.)

GEORGE BOOLE (* 1815; † 1864)

- engl. Philosoph und Mathematiker
- symbolische Aussagenlogik
- nur Grundschulausbildung



Motivation — Logik

Beispiele

- Wenn $\left(\underbrace{\text{es regnet}}_{\text{Aussage}} \text{ und } \underbrace{\text{man im Freien steht}}_{\text{Aussage}} \right)$
  dann $\underbrace{\text{wird man nass}}_{\text{Aussage}}$

- Wenn (eine natürliche Zahl gerade und größer 2 ist)
  dann ist sie keine Primzahl

- Natürliche Personen, die im Inland einen Wohnsitz oder ihren gewöhnlichen Aufenthalt haben,
  sind unbeschränkt einkommensteuerpflichtig

- Zum Inland gehört auch der deutsche Festlandsockel,
  soweit dort Naturschätze erforscht oder ausgebeutet werden
  oder dieser der Energieerzeugung dient

Motivation — Logik

Aussagenlogik

- Jede atomare Aussage kann entweder wahr oder falsch sein
- dadurch entstehen verschiedene Situationen oder “Welten”
  1. “es regnet” ist wahr und “stehe im Freien” ist auch wahr
  2. “es regnet” ist wahr und “stehe im Freien” ist falsch
  3. “es regnet” ist falsch und “stehe im Freien” ist wahr
  4. “es regnet” ist falsch und “stehe im Freien” ist auch falsch

Beispiel

$$\text{Wenn } \Big(\underbrace{\text{es regnet}}_{\text{Aussage}} \text{ und } \underbrace{\text{man im Freien steht}}_{\text{Aussage}} \Big)$$

$$\text{dann } \underbrace{\text{wird man nass}}_{\text{Aussage}}$$

sagt, dass ich in der ersten Situation 1 nass werde
d.h., dass dann die Aussage “werde nass” wahr ist

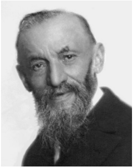
Motivation — Logik

Gottlob Frege (* 1848; † 1925)

- dtsch. Philosoph, Logiker, Mathematiker
- Logik als Basis der Mathematik
- entwickelte die Quantoren

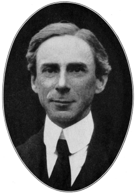
Guiseppe Peano (* 1858; † 1932)

- ital. Mathematiker und Logiker
- Begründer der axiomatischen Mengenlehre
- Formalisierung der vollständigen Induktion



Betrand Russell (* 1872; † 1970)

- engl. Philosoph, Logiker, Mathematiker
- Autor der *Principia Mathematica*
- Nobelpreisträger für Literatur



Motivation — Logik

Entwicklung

- Logik als Grundlage der Mathematik
- Vermeidung Widersprüche
- rigorose Prüfung der Gültigkeit von Beweisen und Aussagen
- Aussagenlogik oder Syllogismen nicht ausreichend

Prädikatenlogik

- Prädikate sind Aussagen über Objekte
  (nicht zwingend nur ein Objekt) $x = y$
- Quantoren erlauben Aussagen, die für
  - Allquantor: alle Objekte einer Klasse gelten
    alle nat. Zahlen sind größer 0 $(\forall x \in \mathbb{N}).(x \geq 0)$
  - Existenzquantor: zumindest ein Objekt der Klasse gelten
    für jede nat. Zahl gibt es eine echt größere nat. Zahl
    $(\forall x \in \mathbb{N}).(\exists y \in \mathbb{N}).(x < y)$

Motivation — Logik

Anwendungen

- Schaltkreisentwurf: Modellierung und Minimierung
- Künstliche Intelligenz:
  Basis des automatischen logischen Schließens
- Spezifikation: (formale) automatisch bearbeitbare Beschreibung gewünschter Funktionalität
- Verifikation: Nachweis der Einhaltung der Spezifikation
- Datenbanken: Abfragesprachen (SQL)
- ...

SELECT $\star$ **FROM** Personen
WHERE Abteilung = 'Entw' **AND**
(Ort = 'Düren' **OR** Ort = 'Köln')

Motivation — Logik

Beschreibung

- natürliche Sprache ist nur bedingt geeignet
  zur formalen Beschreibung
- natürliche Sprachen haben (immer) Mehrdeutigkeiten

$\rightarrow$ wir nutzen formale Beschreibung

- aber Spezifikation ist oft natürlichsprachlich

Modellierung

- Natürliche Personen, die im Inland einen Wohnsitz oder ihren gewöhnlichen Aufenthalt haben,
  sind unbeschränkt einkommensteuerpflichtig

$$(\forall x \in \mathsf{NatP}).\Big((\exists y \in \mathsf{Inland}).(\mathsf{Wohnt}(x,y) \vee \mathsf{GewAuf}(x,y))\Big)$$
$$\rightarrow \mathsf{StPfl}(x)$$

Motivation — Zwischenfrage

Mehrdeutigkeiten

Erkennen Sie Mehrdeutigkeiten in:

- ...zu dem Palast, in dem lange Wandteppiche hingen
- die Beschimpfungen dieses Schriftstellers sind unerträglich
- die Bäuerin verkauft die Kuh, wenn sie alt und krank ist
- Paul kaufte das Schloss
- Er liest das Buch seiner Schwester vor
- Funken setzten das Dach des Hauses in Brand und vernichteten es vollständig
- das Auto wird das Kind umfahren
- ein Fräulein ist eine Frau, der zum Glück der Mann fehlt
- Wenn deine Augen eine Frau erblicken, schlage sie nieder
- Mädchenhandelsschule und Bauernleberwurst

Motivation

Mathematische Grundlagen

Definition (Menge)

- Menge als Zusammenfassung von bestimmten Objekten
  (ihren Elementen)
- für jede Menge M und jedes Objekt m ist m entweder
  - ein Element von M $m \in M$
  - oder nicht $m \notin M$
- jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente
  $\{3\} \neq 3$

Notation zur Definition von Mengen

- Leere Menge: $\emptyset$ hat keine Elemente
- Basismengen: sei $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen

  textuelle Definition
- Einschränkung: $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ enthält genau die Elemente r von $\mathbb{R}$, für die $r > 0$ wahr ist
- vollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$

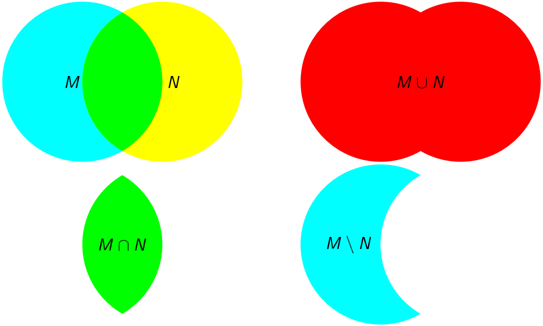
  funktioniert nur bei endlichen Mengen
- unvollständige Aufzählung: $\{0, 1, 2, \ldots\}$

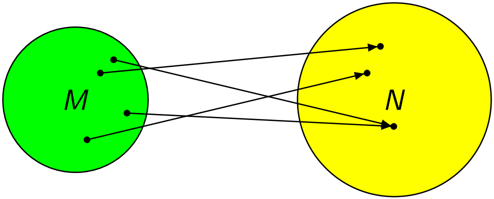
  Muster muss klar erkennbar sein

Mathematische Grundlagen — Mengen

Notation

- $x \in X$ heißt "x ist Element der Menge X" sonst: $x \notin X$
- Teilmenge $M \subseteq N$ genau dann wenn (gdw.) jedes Element von M auch Element von N ist
- Mengeneinschränkung $\{x \in X \mid F\}$
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$





Notation

Sei $f \subseteq M \times N$ eine Funktion von M nach N

- Kurzschreibweise: $f : M \to N$
- üblicherweise Kleinbuchstaben für Funktionen
- für jedes $m \in M$ und $n \in N$ mit $(m, n) \in f$ schreiben

  wir $n = f(m)$ alternativ: $f : m \mapsto n$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$

  in Worten: f bildet m auf n ab

Beispiele

- sei $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ die Funktion, so dass für alle $m \in M$

$$\mathrm{id}_M(m) = m$$

- sei $\mathrm{verdoppeln} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{verdoppeln}(n) = 2n$$

Aussagenlogik

Syntax

Inhalt

Aussagenlogik — Aussagen

Definition (Aussage)

Aussage ist eine Repräsentation eines Satzes (einer Äußerung), der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist

(genau ein Wahrheitswert, auch wenn evtl. unbekannt)

Beispiele

- *“P passt gerade auf”* ist eine Aussage

  für jeden VL-Teilnehmer P
- *“Heute ist ein Feiertag”* ist eine Aussage

  in Sachsen, Deutschland
- *“2 ist eine Primzahl”* ist eine wahre Aussage
- “$2 + 2 = 5$” ist eine falsche Aussage

Aussagenlogik — Aussagen

Gegenstand der Logik

- nicht die Wahrheitsbestimmung von Basis-Aussagen
  genannt: Atome (dies ist Aufgabe der Fachgebiete)
- Formalisierung von (komplexen) Aussagenverknüpfungen
  genannt: Formeln
- Bewertung von Aussagenverknüpfungen
  basierend auf Wahrheitswerten der Teilaussagen
- Schlussregeln

Notation

- wir schreiben atomare Aussagen oder Atome
  (Aussagen, die wir nicht weiter in ihrer Struktur zerlegen)
  als A_0, A_1, A_2, ...

Aussagenlogik — Formeln

Definition (Formel)

- Jedes Atom ist eine Formel — Atome
- $\neg F$ ist eine Formel gdw. F eine Formel ist
  (nicht F) — Negation
- $(F_1 \wedge F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
  F_1 und F_2 — Konjunktion
- $(F_1 \vee F_2)$ ist eine Formel gdw. F_1 und F_2 Formeln sind
  F_1 oder F_2 — Disjunktion
- Es gibt keine weiteren Formeln

Erklärungsversuch Notation

- Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$ — F_1 und F_2
  - entspricht $F_1 \cap F_2$ (unten offen)
  - Elemente von $F_1 \cap F_2$ müssen in F_1 und F_2 liegen
- Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$ — F_1 oder F_2
  - entspricht $F_1 \cup F_2$ (oben offen)
  - Elemente von $F_1 \cup F_2$ müssen in F_1 oder F_2 liegen

Aussagenlogik — Formeln

Beispiele

1. $\neg A_2$ ist eine Formel
2. $\neg(A_1 \vee (A_0 \wedge A_4))$ ist eine Formel
3. $(A_1 \vee A_2 \vee A_3)$ ist (strikt) keine Formel
4. $(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_5 \wedge \neg A_4)))$ ist eine Formel

Verfikation am Beispiel 4:

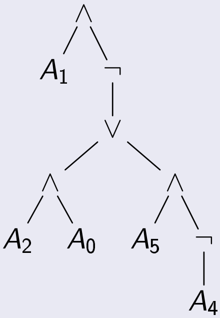
- Atom A_1 ist Formel ✓
- Ist $\neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_5 \wedge \neg A_4))$ Formel? ✓
- Ist $((A_2 \wedge A_0) \vee (A_5 \wedge \neg A_4))$ Formel? ✓
  - Ist $(A_2 \wedge A_0)$ Formel? ✓
    - Atom A_2 ist Formel ✓
    - Atom A_0 ist Formel ✓
  - Ist $(A_5 \wedge \neg A_4)$ Formel? ✓
    - Atom A_5 ist Formel ✓
    - Ist $\neg A_4$ Formel? ✓
    - Atom A_4 ist Formel ✓

Aussagenlogik — Formeln

Syntaxbaum

$$(A_1 \wedge \neg((A_2 \wedge A_0) \vee (A_5 \wedge \neg A_4)))$$

Teilformeln sind Teilbäume



Zusammenfassung

- Geschichte und Anwendungen Logik
- Auffrischung Mengen und Funktionen
- Aussagen
- Aussagenlogische Formeln

Erste Übungsserie ist demnächst verfügbar.