Dr. Karin Quaas
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~quaas

WS 2014/15
Institut für Informatik

Logik
Übungsserie 5

Die folgenden Übungsaufgaben müssen am Freitag 09.01.2015 *vor der Vorlesung* abgegeben werden. Alternativ und bitte nur im Ausnahmefall können Sie die Aufgaben bis zum Donnerstag 08.01.2015 13:00 im Briefkasten der Abteilung (!) *Automaten und Sprachen* in der Poststelle Augusteum Zimmer A514 abgeben. Bitte beschriften Sie Ihre Zettel mit Ihrem Namen und Ihrer Übungsgruppe.

1. Seien

   - $F_1 = \exists x \forall y (R_0(f_0(y,x),y) \wedge R_1(x,y))$,
   - $F_2 = \neg\exists x \forall y (R_1(f_0(x,y), f_0(y,x)) \rightarrow R_1(f_0(x,y),y))$, und
   - $F_3 = (R_1(x,y) \wedge R_1(y,z)) \rightarrow R_1(f_0(x,y),z)$.

   Über die Interpretationen $I_1 = (\mathbb{N}, \cdot^{I_1})$ und $I_2 = (\mathsf{Pow}(\mathbb{N}), \cdot^{I_2})$ sei weiterhin bekannt:

   - $(R_0)^{I_i} = \{(x,y) \mid x = y\}$ für $i = 1,2$,
   - $(R_1)^{I_1} = \{(x,y) \mid x \leq y\}$, $(f_0)^{I_1}(n_1,n_2) = n_1 + n_2$ für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,
   - $(R_1)^{I_2} = \{(x,y) \mid x \subseteq y\}$, $(f_0)^{I_2}(M_1,M_2) = M_1 \cap M_2$ für alle $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{N}$.

   Hierbei bezeichnet $\mathsf{Pow}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Prüfen Sie für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2\}$, ob F_i unter der Interpretation I_j wahr oder falsch ist. Geben Sie weiterhin je eine Variableninterpretation an, sodass $(F_3)^{I_j} = 1$ und $(F_3)^{I_j} = 0$.

   (4 Punkte)

2. Sei $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ mit

   - $F_1 = \forall x \forall y \forall z ((R_0(x,y) \wedge R_0(y,z)) \rightarrow R_0(x,z))$
   - $F_2 = \exists x \forall y R_0(x,y)$
   - $F_3 = \forall x \forall y \forall z (R_0(x,y) \rightarrow R_0(f_0(x,z), f_0(y,z)))$

   (a) Geben Sie ein unendliches Modell (d.h. eines mit unendlichem Universum) für F an.

   (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein endliches Modell (d.h. eines mit endlichem Universum) für F. (2 Punkte)

3. Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln sind Tautologien? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   (a) $\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$

   (b) $\exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$

   (2 Punkte)

4. Sind die folgenden Paare von Formeln jeweils semantisch äquivalent? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   (a) $\exists x (R_0(x) \wedge R_1(x))$ und $\exists x (R_0(x) \rightarrow R_1(x))$

   (b) $\forall x \neg\exists y \exists z (\neg R_0(x,y) \wedge R_1(z,y))$ und $\forall x \forall y \forall z (R_1(z,y) \rightarrow R_0(x,y))$

   (2 Punkte)