

**Lemma 3.** Sei  $Y \subseteq \text{Teil}(\varphi)$  und sei  $w \in \Sigma^\omega$ . Falls  $w \models \bigwedge Y$ , dann existiert  $Z \in \text{Red}(Y)$  sodass  $w \models \bigwedge Z$ . Für jede Teilformel  $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \in \mathcal{U}(\varphi)$  gilt: Falls  $w \models \psi_2$ , dann  $Z \in \text{Red}_\psi(Y)$ .

In der Übung haben Sie gezeigt, was wir nun als Lemma 4 bezeichnen wollen.

**Lemma 4.** Sei  $Z$  konsistent und reduziert. Sei  $w = I_1 I_2 I_3 \dots \in \Sigma^\omega$  und  $i \geq 1$ . Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$(w, i) \models \bigwedge Z \quad \Leftrightarrow \quad (w, i+1) \models \bigwedge \text{next}(Z) \quad \text{und} \quad I_i \in \Sigma_Z.$$

Kommen wir nun zur anderen Richtung:

**Lemma 5.**  $L(\varphi) \subseteq L(\mathcal{A}_\varphi)$ .

*Beweis.* Sei  $w = I_1 I_2 I_3 \dots \in \Sigma^\omega$  mit  $w \models \varphi$ . Wir werden einen erfolgreichen Lauf von  $\mathcal{A}_\varphi$  über  $w$  konstruieren.

Wähle  $Y_0 = \{\varphi\}$  (Initialzustand von  $\mathcal{A}_\varphi$ ). Es gilt  $(w, 1) \models \varphi$  nach Voraussetzung, also auch  $(w, 1) \models \bigwedge Y_0$ . Wende Lemma 3 an: es gibt ein  $Z_0 \in \text{Red}(Y_0)$  sodass  $(w, 1) \models \bigwedge Z_0$ ; Falls  $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \in Y_0$  und  $(w, 1) \models \psi_2$ , wähle  $Z_0$  so, dass  $Z_0 \in \text{Red}_\psi(Y_0)$ .  $Z_0$  ist also konsistent und reduziert. Wende Lemma 4 an:  $(w, 2) \models \bigwedge \text{next}(Z_0)$  und  $I_1 \in \Sigma_{Z_0}$ . Setze  $Y_1 = \text{next}(Z_0)$ . Es gilt  $(Y_0, I_1, Y_1) \in T$ . Weiterhin gilt  $(w, 2) \models Y_1$ . Wir können die gleiche Abfolge von Argumenten benutzen um  $Y_2, Y_3, \dots$  zu konstruieren und erhalten einen Lauf  $Y_0, I_1, Y_1, I_2, \dots$ . Nun noch zu zeigen: dieser Lauf ist erfolgreich. Dies erledigen Sie bitte in Aufgabe 2 der Übungsserie 3.

**Lemma 6: Für jede endliche und totale Kripkestruktur  $K$ , Zustand  $s$  in  $K$ , und LTL-Formel  $\varphi$  kann in Platz polynomiell in  $|\varphi| + \log |K|$  entschieden werden, ob  $K, s \models_{\forall} \varphi$  und  $K, s \models_{\exists} \varphi$ , und in Platz polynomiell in  $|\varphi|$ , ob  $\varphi$  erfüllbar oder gültig ist.**

*Beweis.* Das universelle Model Checking-Problem  $(K, s) \models_{\forall} \varphi$  kann auf das Leerheitsproblem von Büchi-Automaten reduziert werden:

- Konstruiere Büchi-Automat  $\mathcal{A}_K$  mit  $L(\mathcal{A}_K) = \text{Lab}(K, s)$ .
- Konstruiere Büchi-Automat  $\mathcal{A}_{\neg\varphi}$ . Laut Lemmas 2 und 5 gilt  $L(\mathcal{A}_{\neg\varphi}) = L(\neg\varphi)$ .
- Konstruiere Büchi-Automat  $\mathcal{A}$  sodass  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_K) \cap L(\mathcal{A}_{\neg\varphi})$  (siehe Produktkonstruktion für Büchi-Automaten).

Dann gilt:  $L(\mathcal{A}) = \emptyset$  gdw  $K, s \models_{\forall} \varphi$  (siehe auch Aufgabe 6 in der 1. Übungsserie). Man beachte:

- Grösse von  $\mathcal{A}_K$ :  $\mathcal{O}(|K|)$
- Grösse von  $\mathcal{A}_{\neg\varphi}$ :  $2^{\mathcal{O}(|\varphi|)}$ ,
- $\mathcal{A}$  besitzt Grösse  $|K| \cdot 2^{\mathcal{O}(|\varphi|)}$ .
- Leerheit von  $\mathcal{A}$  wird “on the fly” geprüft in *nichtdeterministisch* polynomiellem Platz

– Aus dem Satz von Savitch folgt:  $\text{NPSpace} = \text{PSPACE}$ .

Den entsprechenden Beweis für das existentielle Model Checking-Problem, das Erfüllbarkeitsproblem, sowie das Gültigkeitsproblem geben Sie bitte in der Übungsserie 3 an (Aufgabe 3).