Von LTL-Formeln zu Generalisierten Büchi-Automaten

Sei φ eine LTL-Formel in NNF.

Ziel: Konstruktion eines GBA $\mathcal{A}_\varphi$ sodass $L(\mathcal{A}_\varphi) = L(\varphi)$.

Beispiel: $\mathsf{G}(p \to \mathsf{F}q) \equiv \mathtt{false}\mathsf{R}(\neg p\mathsf{U}(\mathtt{true}\mathsf{U}q))$

Wiederholung

Sei φ eine LTL-Formel.

Teilf(φ) ... Menge aller Teilformeln von φ
X(φ) ... Menge aller Teilformeln der Form Xψ
U(φ) ... Menge aller Teilformeln der Form φ_1Uφ_2
AP(φ) ... Menge der in φ vorkommenden prop. Variablen
Lit(φ) ... Menge der in φ vorkommenden Literale

Beispiel: $\varphi = \texttt{false}\mathsf{R}(\neg p\mathsf{U}(\texttt{true}\mathsf{U}q))$

Teilf$(\varphi) = \{\varphi, \texttt{false}, \neg p\mathsf{U}(\texttt{true}\mathsf{U}q), \neg p, \texttt{true}\mathsf{U}q, \texttt{true}, q, p\}$
X$(\varphi) = \emptyset$
U$(\varphi) = \{\texttt{true}\mathsf{U}q)$

Alphabet des GBA

- $\Sigma = 2^{\mathsf{AP}(\varphi)}$

- Sei ψ eine AL-Formel. Definiere $\Sigma_\psi := \{I \in \Sigma \mid I \models_{\mathsf{AL}} \psi\}$.

Beispiele:
$\Sigma_p = \{I \in \Sigma \mid p \in I\} = \{I \subseteq \mathsf{AP} \mid p \in I\}$
$\Sigma_{\neg p} = \Sigma \backslash \Sigma_p$
$\Sigma_{p \vee q} = \Sigma_p \cup \Sigma_q$
$\Sigma_{p \wedge q} = \Sigma_p \cap \Sigma_q$
$\Sigma_{p \wedge \neg q} = \Sigma_p \backslash \Sigma_q$

Zustände des GBA

- Q...Teilmengen von Teilf(φ)

- Sei Z eine Menge von LTL-Formeln. Wir schreiben $\bigwedge Z$ als Abkürzung für $\bigwedge_{\psi \in Z} \psi$.

- Die in Z vorkommenden Formeln sind *obligatorisch* im folgenden Sinne:
  Wenn von Z aus ein akz. Lauf über Wort u existiert, so gilt $u \models \bigwedge Z$.

Transitionsrelation des GBA: Vorbereitungen

Sei Z eine Menge von LTL-Formeln.

- Z konsistent falls Z weder `false` noch gleichzeitig ψ und $\neg\psi$ enthält.

- Z reduziert falls Z lediglich `true`, Literale oder Formeln der Form $\mathsf{X}\psi$ enthält

Beispiele:

- $\{\mathtt{false}\mathsf{R}(\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q))\}$ ✓, X
- $\{\mathtt{false}, \neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q)\}$ X, X
- $\{\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\}$ ✓, X
- $\{\neg p, \mathsf{X}\varphi\}$ ✓, ✓

Transitionsrelation des GBA: Vorbereitungen

Sei Z eine Menge von LTL-Formeln.

- Z konsistent falls Z weder `false` noch gleichzeitig ψ und $\neg\psi$ enthält.

- Z reduziert falls Z lediglich `true`, Literale oder Formeln der Form $\mathsf{X}\psi$ enthält

Sei $Z \subseteq \mathsf{Teilf}(\varphi)$ konsistent und reduziert. Definiere

$$\Sigma_Z := \bigcap_{p \in Z} \Sigma_p \cap \bigcap_{\neg p \in Z} \Sigma_{\neg p} \qquad \mathsf{next}(Z) := \{\psi \mid \mathsf{X}\psi \in Z\}$$

- Idee: $Z \xrightarrow{I} \mathsf{next}(Z)$ für alle $I \in \Sigma_Z$.
- Problem: Nicht alle $Y \subseteq \mathsf{Teilf}(\varphi)$ sind konsistent und reduziert.

Transitionsrelation des GBA: Vorbereitungen

Zwischenschritt: Umwandlung von nicht-reduzierten in reduzierte Mengen unter Bewahrung der Semantik.

Sei Y konsistent aber nicht reduziert.
Dann existiert $\psi \in Y$ sodass ψ nicht-reduziert und maximal bzgl. syntaktischer Teilformelordnung. Wähle ein solches ψ.

- Wenn $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$, dann $Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_1\}$ und $Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_2\}$.
- Wenn $\psi = \psi_1 \mathsf{U} \psi_2$, dann $Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_2\}$ und $Y \xrightarrow{\varepsilon}_{!\psi} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_1, \mathsf{X}\psi\}$.
- Wenn $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$, dann $Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_1, \psi_2\}$.
- Wenn $\psi = \psi_1 \mathsf{R} \psi_2$, dann $Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_1, \psi_2\}$ und $Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_2, \mathsf{X}\psi\}$

Transitionsrelation des GBA: Vorbereitungen

Beispiel: $\varphi = \mathtt{false}\mathsf{R}(\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q))$

$$\{\varphi\} \xrightarrow{\varepsilon} \{\mathtt{false}, \neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q)\}$$

$$\{\varphi\} \xrightarrow{\varepsilon} \{\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\}$$

$$\{\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\} \xrightarrow{\varepsilon} \{\neg p, \mathsf{X}\varphi\}$$

$$\{\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\} \xrightarrow{\varepsilon} \{\mathtt{true}\mathsf{U}q, \mathsf{X}\varphi\}$$

$$\{\mathtt{true}\mathsf{U}q, \mathsf{X}\varphi\} \xrightarrow{\varepsilon} \{q, \mathsf{X}\varphi\}$$

$$\{\mathtt{true}\mathsf{U}q, \mathsf{X}\varphi\} \xrightarrow{\varepsilon} !\{\mathtt{true}, \mathsf{X}(\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\}$$

Transitionsrelation des GBA: Vorbereitungen

Zwischenschritt: Umwandlung von nicht-reduzierten in reduzierte Mengen unter Bewahrung der Semantik.

Sei $Y \subseteq \mathsf{Teilf}(\varphi)$ konsistent aber nicht reduziert.
Dann existiert $\psi \in Y$ sodass ψ nicht-reduziert und maximal bzgl. syntaktischer Teilformelordnung. Wähle ein solches ψ.

- Wenn $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$, dann $Y \stackrel{\varepsilon}{\to} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_1\}$ und $Y \stackrel{\varepsilon}{\to} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_2\}$.
- Wenn $\psi = \psi_1 \mathsf{U} \psi_2$, dann $Y \stackrel{\varepsilon}{\to} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_2\}$ und $Y \stackrel{\varepsilon}{\to}_{!\psi} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_1, \mathsf{X}\psi\}$.
- Wenn $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$, dann $Y \stackrel{\varepsilon}{\to} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_1, \psi_2\}$.
- Wenn $\psi = \psi_1 \mathsf{R} \psi_2$, dann $Y \stackrel{\varepsilon}{\to} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_1, \psi_2\}$ und $Y \stackrel{\varepsilon}{\to} Y \backslash \{\psi\} \cup \{\psi_2, \mathsf{X}\psi\}$

$$\mathsf{Red}(Y) := \{Z \mid Y \stackrel{\varepsilon}{\to}^* Z, Z \text{ konsistent und reduziert}\}$$

Für alle $\psi \in \mathsf{U}(\varphi)$:

$$\mathsf{Red}_\psi(Y) := \{Z \mid Y \stackrel{\varepsilon}{\to}^* Z \text{ ohne mit } !\psi \text{ markierte Transitionen}, \\ Z \text{ konsistent und reduziert}\}$$

Definition des GBA

Definiere $\mathcal{A}_\varphi := (Q, \Sigma, I, T, (T_\psi)_{\psi \in \mathsf{U}(\varphi)})$, wobei

- $Q = 2^{\mathsf{Teilf}(\varphi)}$
- $\Sigma = 2^{\mathsf{AP}}$
- $I = \{\{\varphi\}\}$
- $T = \{(Y, I, Y') \mid \exists Z \in \mathsf{Red}(Y), Y' = \mathsf{next}(Z), I \in \Sigma_Z\}$
- $T_\psi = \{(Y, I, Y') \mid \exists Z \in \mathsf{Red}_\psi(Y), Y' = \mathsf{next}(Z), I \in \Sigma_Z\}$

Transitionsrelation des GBA: Vorbereitungen

Beispiel: $\varphi = \mathtt{false}\mathsf{R}(\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q))$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{\mathtt{false}, \neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q)\} & & \\
\{\varphi\} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \{\neg p, \mathsf{X}\varphi\} & \\
 & \{\neg p \vee (\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \{q, \mathsf{X}\varphi\} \\
 & & \{\mathtt{true}\mathsf{U}q, \mathsf{X}\varphi\} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\
 & & & !\{\mathtt{true}, \mathsf{X}(\mathtt{true}\mathsf{U}q), \mathsf{X}\varphi\}
\end{tikzcd}$$

$T = \{(Y, I, Y') \mid \exists Z \in \mathsf{Red}(Y), Y' = \mathsf{next}(Z), I \in \Sigma_Z\}$

- $(\{\varphi\}, I, \{\varphi\}) \in T$ für alle $I \in \Sigma_{\neg p} \cup \Sigma_q$.
- $(\{\varphi\}, I, \{\mathtt{true}\mathsf{U}q, \varphi\}) \in T$ für alle $I \in \Sigma$

Definition des GBA

Definiere $\mathcal{A}_\varphi := (Q, \Sigma, I, T, (T_\psi)_{\psi \in \mathsf{U}(\varphi)})$, wobei

- $Q = 2^{\mathsf{Teilf}(\varphi)}$
- $\Sigma = 2^{\mathsf{AP}}$
- $I = \{\{\varphi\}\}$
- $T = \{(Y, I, Y') \mid \exists Z \in \mathsf{Red}(Y), Y' = \mathsf{next}(Z), I \in \Sigma_Z\}$
- $T_\psi = \{(Y, I, Y') \mid \exists Z \in \mathsf{Red}_\psi(Y), Y' = \mathsf{next}(Z), I \in \Sigma_Z\}$

Falls $\rho = Y_0, I_1, Y_1, I_2, \ldots$ ein Lauf in $\mathcal{A}_\varphi$, so gilt für alle $i \geq 1$:
es existiert $Z \in \mathsf{Red}(Y_{i-1})$ (Z also konsistent und reduziert) sodass $Y_i = \mathsf{next}(Z)$ und $I_i \in \Sigma_Z$.