Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Karin Quaas

WS 2014/15
Institut für Informatik

Prüfungsklausur Logik (Nachklausur)

Allgemeine Hinweise

- Bearbeitungszeit 60 Minuten, Gesamtpunktzahl 30
- Jedes Blatt ist mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf, d.h. mit Füller oder Kugelschreiber.
- Als Hilfsmittel ist nur ein von Ihnen erstelltes DIN A4 Blatt ("Cheat Sheet") zugelassen.

Aussagenlogik

1. Sind die folgenden Aussagen über aussagenlogische Formeln wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre jeweilige Antwort kurz und prägnant.

   (a) Für jede unerfüllbare Formel F hat deren Negation $\neg F$ unendlich viele Modelle.
   (b) Für jede Formel gibt es eine semantisch äquivalente Formel, die keine Konjunktion enthält.
   (c) Die Formel $A_1 \vee A_2$ ist in konjunktiver Normalform.
   (d) Die Formel $A_1 \vee A_2$ ist in disjunktiver Normalform.

   (4 Punkte)

2. Formalisieren Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Hannah geht nur zur Party wenn sie gesund ist.
   (b) Entweder Hannah geht zur Demo oder sie geht zur Party.

   Verwenden Sie dabei die Aussagenvariablen P, G und D, mit den Bedeutungen:

   - P ist wahr gdw. Hannah zur Party geht,
   - G ist wahr gdw. Hannah gesund ist,
   - D ist wahr gdw. Hannah zur Demo geht.

   (2 Punkte)

3. Sind die beiden folgenden aussagenlogischen Formeln semantisch äquivalent? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   - $(\neg A_2 \vee A_1) \rightarrow A_1$
   - $A_2 \vee A_1$

   (3 Punkte)

4. Ist die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie? Beweisen Sie Ihre Antwort.

$$(A_1 \vee \neg A_2) \rightarrow ((A_3 \wedge A_4 \wedge \neg A_5) \vee (A_1 \wedge \neg A_4))$$

   (3 Punkte)

5. Verwenden Sie das Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass folgende Formel unerfüllbar ist: $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg B\}\}_\wedge$ (2 Punkte)

Prädikatenlogik

6. Sind die folgenden Aussagen über prädikatenlogische Formeln wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre jeweilige Antwort kurz und prägnant.

   (a) Die Formel $\big(\forall x.(P(x) \vee Q(x))\big) \wedge \big(Q(x) \rightarrow a\big)$ ist eine Aussage.

   (b) Es existieren keine unerfüllbaren Aussagen.

   (c) Für jede Formel gibt es eine semantisch äquivalente Formel in Skolemform.

   (3 Punkte)

7. Ist die Formel $\forall x.P(x) \wedge \neg\exists y P(y)$ erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

8. Geben Sie eine erfüllbare Formel an, die *nur* endliche Modelle (d.h. Modelle mit endlichem Universum) besitzt. (2 Punkte)

9. Geben Sie ein Modell für die Formel $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ an, wobei :

   (a) $F_1 : \forall x(g(x,e) = x)$,

   (b) $F_2 : \forall x \forall y \forall z(g(g(x,y),z)) = (g(x,g(y,z)))$,

   (c) $F_3 : \forall x \exists y(g(x,y) = e)$.

   Hierbei ist $=$ ein zweistelliges Relationssymbol (das wir der Einfachheit halber in Infixschreibweise verwenden), g ist ein zweistelliges Funktionssymbol, und e ist eine Konstante. (3 Punkte)

10. Übersetzen Sie die folgende Aussage in eine prädikatenlogische Formel: *Formeln in konjunktiver Normalform sind genau dann unerfüllbar wenn jede semantisch äquivalente Formel, die ein Implikationszeichen enthält, auch unerfüllbar ist.* Verwenden Sie dabei die folgenden Relationssymbole:

    - F, einstellig, mit der Bedeutung: $F(x)$ gilt gdw. x eine Formel ist,
    - I, einstellig, mit der Bedeutung: $I(x)$ gilt gdw. x ein Implikationszeichen enthält,
    - A, zweistellig, mit der Bedeutung: $A(x,y)$ gilt gdw. x und y semantisch äquivalent sind,
    - K, einstellig, mit der Bedeutung: $K(x)$ gilt gdw. x in konjunktiver Normalform ist.
    - U, einstellig, mit der Bedeutung: $U(x)$ gilt gdw. x unerfüllbar ist.

    (3 Punkte)

11. Welche der folgenden Literale sind unifizierbar? Geben Sie gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator an.

    (a) $P(y, f(x,y))$ und $P(g(z), f(a,z))$

    (b) $P(a,z)$, $P(y, g(x))$ und $P(y, g(f(a,y)))$

    (2 Punkte)

12. Überführen Sie die folgende Formel in Skolemform: $\forall z \exists u \exists x \forall y(P(f(u,x),y) \rightarrow R(x,z))$. (2 Punkte)

Viel Erfolg!