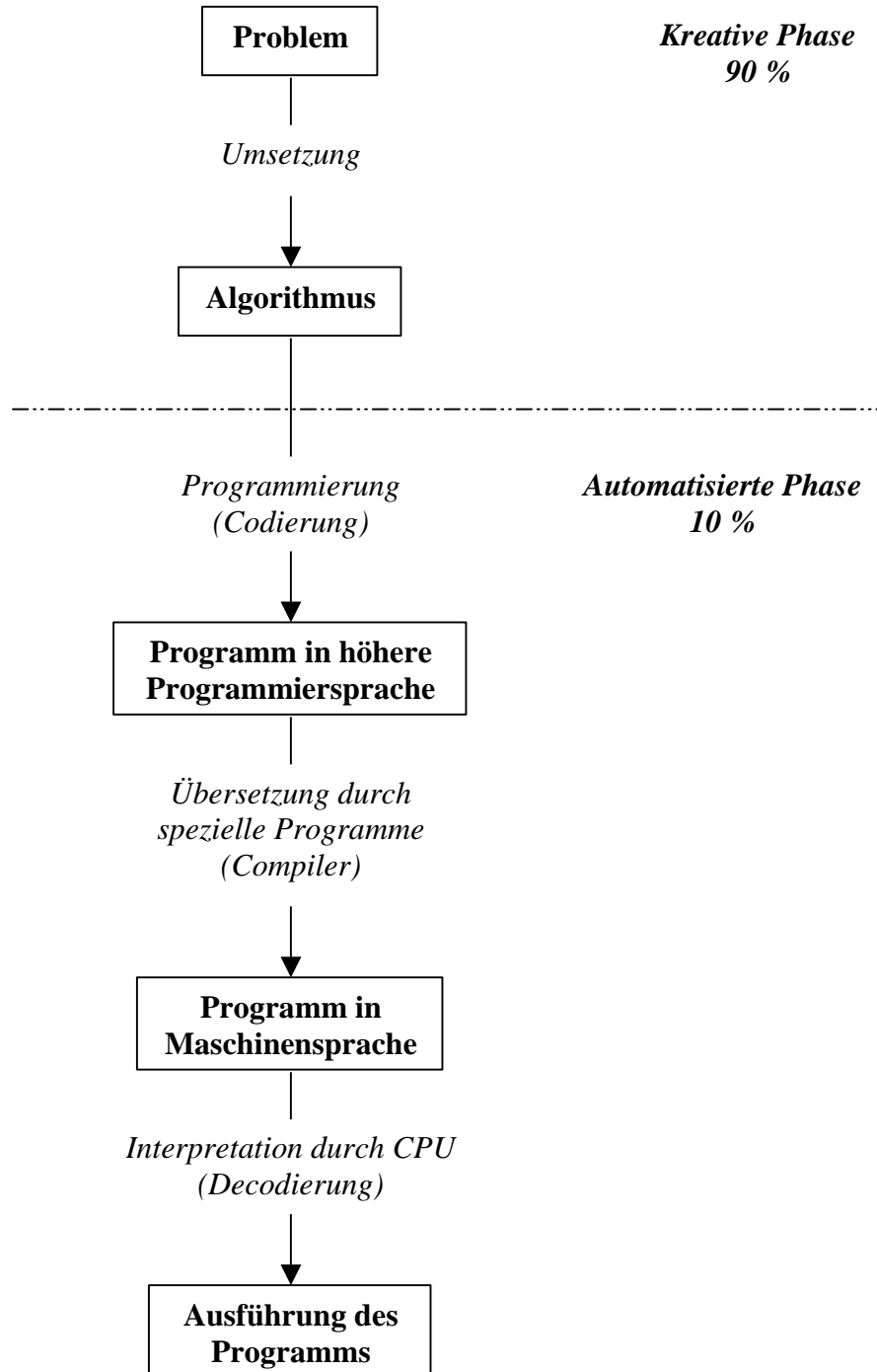


## Inhalt

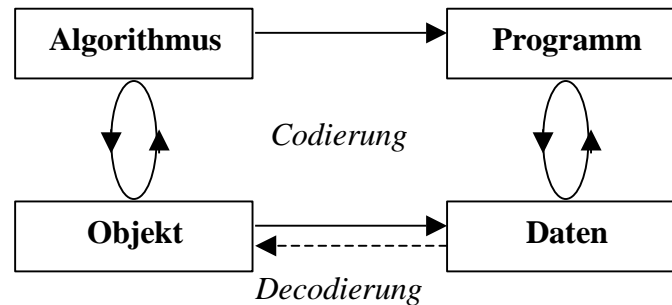
5	Datendarstellung im Rechner .....	5-2
5.1	Positionssysteme.....	5-4
5.2	Codierung natürlicher Zahlen .....	5-5
5.3	Codierung ganzer Zahlen.....	5-6
5.4	Codierung rationaler Zahlen .....	5-8

## 5 Datendarstellung im Rechner

Ein Programm ist ein codierter Algorithmus.



Algorithmen dienen i.R. der Manipulation mathematischer Objekte. Sowohl die Objekte als auch der Algorithmus sind somit zu codieren.



Die Daten und Programme sollten weitestgehend mit den Ausgangsobjekten und den Algorithmen verträglich sein, d.h.

$$x + y = z \xrightarrow{\varphi} \varphi(x) \oplus \varphi(y) = \omega \text{ mit } \varphi^{-1}(\omega) = z$$

wobei hier  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Objekte,  $\varphi$  die Codierungsfunktion,  $+$  für eine beliebige Operation und  $\oplus$  für deren Interpretation steht.

Durch die **Endlichkeit** des Rechners bestehen Einschränkungen im Wertebereich der darstellbaren Objekte und es werden mathematische Gesetze verletzt!

- => fehlerbehaftete Daten, Verfahrensfehler
- => fehlerbehaftete Ergebnisse
- => **Numerik**

Wir wollen uns der Frage zuwenden, wie weit Computerergebnisse überhaupt brauchbar sind.

Beispiel aus *terms\_a.c*

```

float a = 1e10, b = 1e10, c = 1e-10;
printf( "%f\n", a * ( a - b + c) );
/* a*((a-b)+c)    => 1 */
printf( "%f\n", a * ( a + c - b) );
/* a*((a+c)-b)    => 1 */
/* Rechner => 0 */

```

Beispiel aus *terms\_b.c*

```

int x = 40, y; float a = 1e10;
y = a * x; printf( "%d\n", y );
/* y=1e10*40 => 4e11 */
/* Rechner => 2147483647 */

```

## 5.1 Positionssysteme

Der Zahlenwert ist abhängig von der Position der Ziffern in der Zahlendarstellung.

### Ziffern

**Endliche Menge von mindestens 2 Zeichen**  $Z$

**Ziffer**  $z_i \in Z$  i.d.R. hindu-arabische Ziffern

$0 \in Z$  ausgezeichnetes Element

**Basis**  $b = \text{card}(Z) = |Z| = \#Z > 1$  Anzahl der Ziffern

**Wert einer Ziffer**  $\omega(z_i)$   $\omega$  ist eine eindeutige Abbildung, welche jeder Ziffer eine Zahl zuordnet.

### natürliche Zahlen

**Zahlendarstellung**  $(z)_b = (z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b$ , wobei  $z_n \neq 0$

**Zahlenwert** 
$$\begin{aligned} \omega(z) &= \sum_{i=0}^n \omega(z_i) * b^i \\ &= \omega(z_n) * b^n + \omega(z_{n-1}) * b^{n-1} + \dots + \omega(z_1) * b + \omega(z_0) \\ &= (\dots(\omega(z_n) * b + \omega(z_{n-1})) * b + \dots + \omega(z_1)) * b + \omega(z_0). \end{aligned}$$

#### Beispiel im Dualsystem

$$137 = 128 + 8 + 1 = 1 * 2^7 + 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = (1000 \ 1001)_2 = (211)_8 = (89)_{16}$$

137 :	2 =	68	Rest	<b>1</b>	
68 :	2 =	34	Rest	<b>0</b>	
34 :	2 =	17	Rest	<b>0</b>	
17 :	2 =	8	Rest	<b>1</b>	
8 :	2 =	4	Rest	<b>0</b>	
4 :	2 =	2	Rest	<b>0</b>	
2 :	2 =	1	Rest	<b>0</b>	
1 :	2 =	<b>0</b>	Rest	<b>1</b>	

### rationale Zahlen

**Zahlendarstellung**  $(z)_b = (z' . z'')_b = (z')_b + (.z'')_b$

mit  $(z')_b = (z_n z_{n-1} \dots z_0)_b$  und  $(.z'')_b = (.z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_b$

**Zahlenwert** 
$$\omega(z) = \omega(z') + \omega(.z'') = \sum_{i=0}^n \omega(z_i) * b^i + \sum_{i=-m}^{-1} \omega(z_i) * b^i = \sum_{i=-m}^n \omega(z_i) * b^i.$$

mit

$$\omega(z') = (\dots(\omega(z_n) * b + \omega(z_{n-1})) * b + \dots + \omega(z_1)) * b + \omega(z_0) \quad (\text{s. o.})$$

und

$$\begin{aligned} \omega(.z'') &= \sum_{i=-m}^{-1} \omega(z_i) * b^i \\ &= \omega(z_{-m}) / b^m + \omega(z_{-m+1}) / b^{m-1} + \dots + \omega(z_{-1}) / b \\ &= (\dots(\omega(z_{-m}) / b + \omega(z_{-m+1})) / b + \dots + \omega(z_{-1})) / b. \end{aligned}$$

#### Beispiel im Dualsystem

$$3.15625 = 3 + 0.15625 = (11)_2 + (0.00101)_2 = (11.00101)_2$$

0.15625	* 2 =	0.31250
0.3125	* 2 =	0.625
0.625	* 2 =	1.25
0.25	* 2 =	0.5
0.5	* 2 =	1

## 5.2 Codierung natürlicher Zahlen

$z \in \mathbb{N}$ :

`unsigned char, unsigned short int,  
unsigned int, unsigned long int`

*Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der natürlichen Zahlen als sogenannter direkter Code im Rechner dargestellt werden.*

### Direkter Code - Dualdarstellung mit festgelegter Bitanzahl:

Natürliche Daten werden als ihre **Dualdarstellung** in den für den Datentyp vorgesehenen Speicherbereich abgespeichert, wobei, je nach Länge der Dualzahl, mit Nullen auf die Bitanzahl des Datentyps aufgefüllt wird.

Die verwendete Bitanzahl  $n$  für die Datentypen legen die Grenzen der Zahlendarstellung fest.

`unsigned char`  $\Rightarrow n = 8$

Dualdarstellung:

`unsigned char z = 59;`

`unsigned char UCHAR_MAX = 255;`

`unsigned char UCHAR_MIN = 0;`

$59 = (11\ 1011)_2$

0011 1011

0111 1111

0000 0000

(vgl. Anhang A)

**Darstellbarer Zahlenbereich:**

$\Rightarrow$

$0 \leq z \leq 2^n - 1$

### Darstellbare natürlichen Zahlen mit maximal 4 Bit ( $n = 4$ ):

$z_3$	$z_2$	$z_1$	$z_0$
-------	-------	-------	-------

Dezimalzahl	Computerzahl	Berechnung
0	0000	0
1	0001	$2^0 = 1$
2	0010	$2^1 = 2$
3	0011	$2^1 + 2^0 = 3$
4	0100	...
5	0101	...
6	0110	...
7	0111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
8	1000	$2^3 = 8$
9	1001	...
10	1010	...
11	1011	...
12	1100	...
13	1101	...
14	1110	...
15	1111	$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$

### 5.3 Codierung ganzer Zahlen

$z \in \mathbb{Z}$ :

**signed char, signed short int,  
signed int, signed long int**

*Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der ganzen Zahlen als direkter Code bzw. dessen Komplement im Rechner dargestellt werden.*

$z \geq 0$                       Direkter Code - Dualdarstellung mit festgelegter Bitanzahl  
 $z < 0$                       Komplementdarstellung des direkten Codes von  $|z|$

**Komplementbildung:**      $\bar{z} = z \text{ 1/0/1} + 1$                        $1011 \text{ 1/0/1} + 1 = 0100 + 1 = 0101$   
                                       $\overline{\bar{z}} = z$                                        $\overline{0101} = 1010 + 1 = 1011$

**signed char**  $\Rightarrow n = 8$ , 8. Bit ist Vorzeichenbit  $s$ .

Dualdarstellung:

signed char  $z = 59$ ;

signed char  $z = -59$ ;

signed char **CHAR\_MAX** = 127;

signed char **CHAR\_MIN** = -128;

$59 = (11\ 1011)_2$

0011 1011

1100 0001

0111 1111

1000 0001

(vgl. Anhang A)

**Darstellbarer Zahlenbereich:**  $\Rightarrow \underline{\underline{-2^{n-1} \leq z \leq 2^{n-1} - 1}}$

**Darstellbare ganzen Zahlen mit maximal 4 Bit ( $n = 4$ ):**

s	$z_2$	$z_1$	$z_0$
---	-------	-------	-------

Dezimalzahl	Computerzahl	Berechnung
7	0111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
6	0110	$2^2 + 2^1 = 6$
5	0101	...
4	0100	...
3	0011	...
2	0010	...
1	0001	$2^0 = 1$
0	0000	0
-1	1111	$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
-2	1110	$2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$
-3	1101	...
-4	1100	...
-5	1011	...
-6	1010	...
-7	1001	$2^4 - 7 = 16 - 7 = 9$
-8	1000	$2^4 - 8 = 16 - 8 = 8$

Beispiel aus *terms\_b.c*

```
int x = 40, y; float a = 1e10;  
y = a * x; printf( "%d\n", y);  
/* y=1e10*40 => 4e11 */  
/* Rechner => 2147483647=2^31-1=INT_MAX */
```

## 5.4 Codierung rationaler Zahlen

$z \in \mathbb{Q}$ :

`float, double, long double`

*Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der rationalen Zahlen als sogenannte Gleitpunktzahlen im Rechner dargestellt werden.*

**Darstellung einer rationalen Zahl als Gleitpunktzahl mit Mantisse  $M$  und Exponent  $E$ :**

**1. Ausgangspunkt ist die Dualdarstellung der Zahl.**

$$3.15625 = 3 + 0.15625 = (11)_2 + (0.00101)_2 = (11.00101)_2$$

**2. Einführung der wissenschaftlichen Notation.**

Es erfolgt eine Normalisierung durch Stellenverschiebung auf **1.** ..., man erhält eine **Mantisse  $M$**  und einen **Exponenten  $E$** :

$$(11.00101)_2 = (1.100101)_2 * (10)_2 = (1.100101)_2 * 2^1 \Rightarrow M = (1.100101)_2, E = 1$$

**3. Darstellung als Maschinenzahl.**

Die Mantisse  $M$  ist in ihrer **Stellenzahl  $t$**  beschränkt. Sie wird auf die entsprechende Stellenzahl gerundet. Da die Mantisse stets mit **1.** beginnt, lässt man aus Platzgründen diese **1** weg (*hidden bit*):

$$M \approx 1.M'$$

Exponenten  $E$  sind nur bis zu einer festgelegten Größe darstellbar,  $E \in [r, R]$ . Es können nicht beliebig kleine und beliebig große Zahlen dargestellt werden. Die Exponenten werden durch Addition einer Konstanten in den positiven Bereich verschoben:

$$E' = E + C > 0 \Rightarrow C = -r + 1$$

**Maschineninterne Darstellung:**

mit  $s$  als Vorzeichenbit + .. **0**; - .. **1**.

$$s \mid E' \mid M'$$

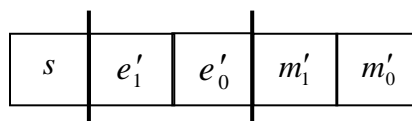
Eine **Sonderbehandlung** erfährt die Zahl **0**, sie wird nur durch Nullen codiert:

$$0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0$$

**Die Menge der Maschinenzahlen ist durch die Stellenzahl  $t$  der Mantisse und durch den kleinsten und größten darstellbaren Exponenten  $r$  und  $R$  eindeutig bestimmt.**

$$M_z(t, r, R)$$

**Beispiel  $M_z(3, -1, 1)$ : Darstellbare positive rationale Zahlen mit 5 Bit (1 Vorzeichenbit, 2 Exponentenbits und 2 Mantissenbits):**



$$M' = m'_1 m'_0 \text{ mit } M \approx 1.M' \text{ und } E' = e'_1 e'_0 \text{ mit } E' = E + 2.$$

$$z = 3.15625 = (11.00101)_2$$

$$\Rightarrow \text{Mantisse } M = (1.100101)_2, \text{ Exponent } E = 1$$

$$\Rightarrow M' = (10)_2, E' = 3$$

$$\Rightarrow \text{Interne Darstellung: } 0 \mid 11 \mid 10$$

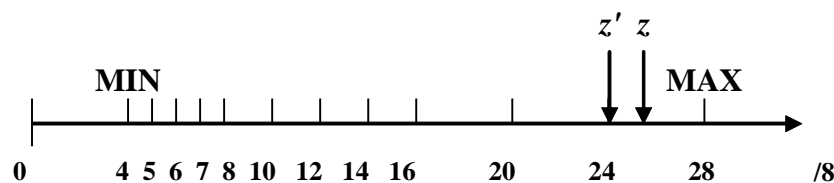
$$\Rightarrow z' = (1.10)_2 * 2^1 = (11)_2 = 3, \text{ d.h. intern wird 3.15625 auf 3 gerundet!}$$



**Übersicht über alle darstellbaren positiven rationalen Zahlen mit 5 Bit als Maschinenzahlen**

$M_z(3, -1, 1)$

Maschinenzahl	Wert	interne Darstellung	
$(0.00)_2 * 2^0$	$= 0$	0   00   00	
$(1.00)_2 * 2^{-1}$	$= 4/8$	0   01   00	<b>MIN</b>
$(1.01)_2 * 2^{-1}$	$= 5/8$	0   01   01	
$(1.10)_2 * 2^{-1}$	$= 6/8$	0   01   10	
$(1.11)_2 * 2^{-1}$	$= 7/8$	0   01   11	
$(1.00)_2 * 2^0$	$= 8/8$	0   10   00	
$(1.01)_2 * 2^0$	$= 10/8$	0   10   01	
$(1.10)_2 * 2^0$	$= 12/8$	0   10   10	
$(1.11)_2 * 2^0$	$= 14/8$	0   10   11	
$(1.00)_2 * 2^1$	$= 16/8$	0   11   00	
$(1.01)_2 * 2^1$	$= 20/8$	0   11   01	
<b><math>(1.10)_2 * 2^1</math></b>	<b><math>= 24/8</math></b>	<b>0   11   10</b>	$\Rightarrow z'$
$(1.11)_2 * 2^1$	$= 28/8$	0   11   11	<b>MAX</b>



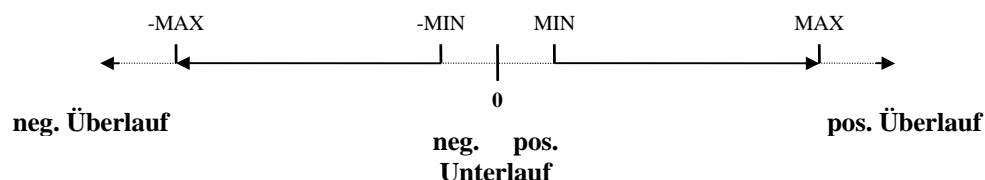
Der Zahlenstrahl mit den darstellbaren Zahlen lässt erkennen, dass es Bereiche gibt, in denen Zahlen nicht darstellbar sind und dass die Abstände der darstellbaren Zahlen von **MIN** nach **MAX** größer werden.

Die gleichen Aussagen treffen auch für die *negativen* Gleitpunktzahlen zu.

### Zusammenfassung

- Wertebereich für Gleitpunkttypen:

$$[-MAX, -MIN] \cup \{0\} \cup [MAX, MIN], \text{ vgl. Kapitel 2: } [-10^{37}, -10^{-37}] \cup \{0\} \cup [10^{-37}, 10^{37}]$$



- Gleitpunktzahlen werden mit zunehmender Größe dünner darstellbar.
- Je größer Mantissenstellenanzahl  $t$ , desto dichter die Zahlendarstellung.
- Das Intervall  $[r, R]$  der Exponenten bestimmt die größte und die kleinste darstellbare Zahl.

**Behandlung nicht darstellbarer Zahlen:**

1.  $z > \text{MAX}$  oder  $z < -\text{MAX}$ :  
Überlauf ( **Infinity**, **-Infinity** )  $\Rightarrow$  Abbruch: **Laufzeitfehler**
2.  $-\text{MIN} < z < 0$  oder  $0 < z < \text{MIN}$ :  
Unterlauf  $\Rightarrow$  **Sonderbehandlung**, Runden auf darstellbare Zahlen: **Rundungsfehler**
3.  $-\text{MAX} < z < -\text{MIN}$  oder  $\text{MIN} < z < \text{MAX}$ :  
Maschinenzahlbereich  $\Rightarrow$  Runden auf darstellbare Zahlen: **Rundungsfehler**

**Standard für rationalen Zahlenbereiche:**(IEEE – Standard<sup>1</sup>, Institute of Electrical and Electronics Engineers)

32 – Bit – Format ( 4 Byte) für einfach genaue Zahlen oder auch „single“

64 – Bit – Format ( 8 Byte) für doppelt genaue Zahlen oder auch „double“

80 – Bit – Format ( 10 Byte) für erweitert genaue Zahlen oder auch „double-extended“

Bezeichnung	Byteanzahl	$s$ [Bit]	$M$ [Bit]	$E$ [Bit]	$r$	$R$	$C$
<b>single</b>	4	1	24	8	-126	127	127
<b>double</b>	8	1	53	11	-1022	1023	1023

 $s$  Vorzeichenbit: 0 ... +, 1 ... - $M$  Länge der Mantisse, einschließlich *hidden bit* $E$  Anzahl der Exponentenbit $r$  kleinster Exponent $R$  größter Exponent $C$  Verschiebungskonstante**Sonderbehandlung:**

	$M' = 0$	$M' \neq 0$
$E' = 0$ ( $E = r - 1$ )	$z = 0.0$	$z = (-1)^s * 2^r * (0.M')_2$ ; zusätzliche Zahlen im Unterlauf
$E' = E'_{\max}$ ( $E = R + 1$ )	$z = (-1)^s * \infty$ ; <b>-Infinity, Infinity</b>	<b>NaN</b> (Not a Number); keine gültige Gleitpunktzahl

**C, Java:**

Typ	float $\Rightarrow$ single	double
$\text{MAX} < 2^{R+1}$	$\pm 3.40282347 \text{ E } +38$	$\pm 1.797693138462315750 \text{ E } +308$
$\text{MIN} = 2^r$	$\pm 1.17549435 \text{ E } -38$	$\pm 2.225073858507201383 \text{ E } -308$
Unterlauf (Sonderbehandlung)	$\pm 1.40239846 \text{ E } -45$	$\pm 4.940656458412465 \text{ E } -324$
gültige Dezimalstellen	7	15

<sup>1</sup> <http://www.h-schmidt.net/FloatApplet/IEEE754de.html>

**Beispiel für single-Zahlendarstellung(C, Java: float):****Dezimalzahl => Maschinenzahl**

$$3.15625 = (11.0010\ 1)_2 = (1.1001\ 01)_2 * 2^1$$

$$\Rightarrow M' = 1001\ 01, E' = E + C = 1 + 127 = 128$$

$$\Rightarrow 0|100\ 0000\ 0|100\ 1010\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

$$0.1 = (0.00011)_2 = (1.1001)_2 * 2^{-4}$$

$$\Rightarrow M' = 100\ 1100\ 1100\ 11001100\ 1100, E' = E + C = -4 + 127 = 123$$

$$\Rightarrow 0|011\ 1101\ 1|100\ 1100\ 1100\ 11001100\ 1100$$

$\Rightarrow$  **Die Zahl 0.1 ist als Maschinenzahl nicht exakt darstellbar.**

**Maschinenzahl => Dezimalzahl**

$$1|011\ 1111\ 1|000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

$$\Rightarrow M' = 0, E' = 127 \Rightarrow M = 1.0, E = E' - C = 127 + 127 = 0$$

$$\Rightarrow -1. * 2^0 = -1.0$$

**Intern sind Datendarstellungen fehlerbehaftet.**
**Beispiel aus *terms\_a.c***

```
float a = 1e10, b = 1e10, c = 1e-10;
```

```
printf( "%f\n", a * ( a - b + c) );
```

```
/* a*((a-b)+c)    => 1 */
```

```
printf( "%f\n", a * ( a + c - b) );
```

```
/* a*((a+c)-b)    => 1 */
```

```
/* Rechner => 0 */
```

```
/* Addition sehr groesser mit sehr kleiner Zahl */
```

Beispiel *fraction.c* liefert durch Umformen des Bruchs  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} : \frac{x^2-1}{x^2+1}$  in  $g(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

unterschiedliche Ergebnisse:

***fraction.out***

```
x: -10.000000, f: 1.246914, g: 1.246914
```

```
...
```

```
x: -1.500000, f: 13.000000, g: 13.000000
```

<b>x: -1.000000,</b>	<b>f: -Inf,</b>	<b>g: Inf</b>
----------------------	-----------------	---------------

```
x: -0.500000, f: 5.000000, g: 5.000000
```

```
x: 0.000000, f: 1.000000, g: 1.000000
```

```
x: 0.500000, f: 0.555556, g: 0.555556
```

<b>x: 1.000000,</b>	<b>f: NaN,</b>	<b>g: 0.500000</b>
---------------------	----------------	--------------------

```
x: 1.500000, f: 0.520000, g: 0.520000
```

```
...
```

```
x: 10.000000, f: 0.834711, g: 0.834711
```

**Inf**  $\triangleq$   $\infty$ , positiver Überlauf

**-Inf**  $\triangleq$   $-\infty$ , negativer Überlauf

**NaN**  $\triangleq$  **Not a Number**