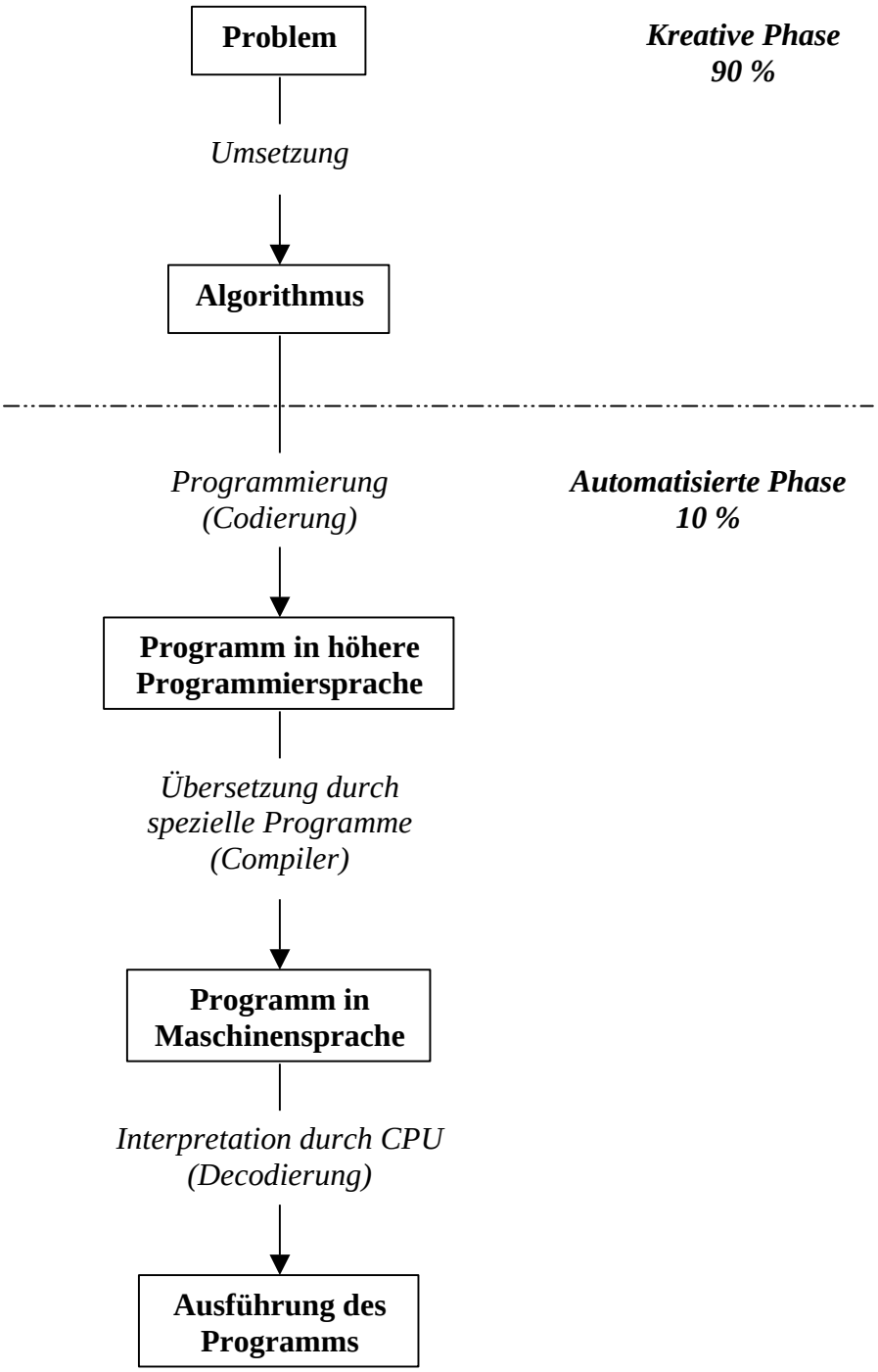
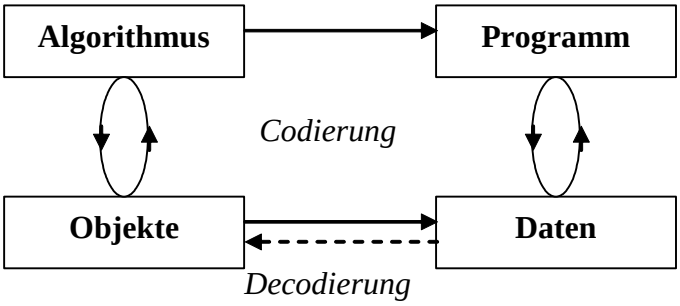
Inhalt

5 Datendarstellung im Rechner

Ein Programm ist ein codierter Algorithmus.



Algorithmen dienen i.R. der Manipulation mathematischer Objekte. Sowohl die Objekte als auch der Algorithmus sind somit zu codieren.



Die *Daten* und *Programme* sollten weitestgehend mit den *Objekten* und den *Algorithmen* verträglich sein, d.h.

$$x + y = z \xrightarrow{\varphi} \varphi(x) \oplus \varphi(y) = \omega \text{ mit } \varphi^{-1}(\omega) = z,$$

wobei hier x, y, z die Objekte, φ die Codierungsfunktion, + für eine beliebige Operation und $\oplus$ für deren Interpretation im Rechner steht.

Durch die **Endlichkeit** des Rechners bestehen Einschränkungen im Wertebereich der darstellbaren Objekte und es werden mathematische Gesetze verletzt!

=> fehlerbehaftete Daten, Verfahrensfehler
=> fehlerbehaftete Ergebnisse
=> **Numerik**

Wir wollen uns der Frage zuwenden, wie weit Computerergebnisse überhaupt brauchbar sind.

Beispiel aus ***terms_a.c***

```
float a = 1e10, b = 1e10, c = 1e-10;
printf( "%f\n", a * ( a - b + c));
                                /* a*((a-b)+c)    => 1 */
printf( "%f\n", a * ( a + c - b));
                                /* a*((a+c)-b)    => 1 */
                                      /* Rechner => 0 */
```

Beispiel aus ***terms_b.c***

```
int x = 40, y; float a = 1e10;
y = a * x; printf( "%d\n", y);
                                  /* y=1e10*40 => 4e11 */
                               /* Rechner => 2147483647 */
```

5.1 Positionssysteme

Der Zahlenwert ist abhängig von der Position der Ziffern in der Zahlendarstellung.

Ziffern

Endliche Menge von mindestens 2 Zeichen Z

Ziffer	$z_i \in Z$	i.d.R. hindu-arabische Ziffern
	$0 \in Z$	ausgezeichnetes Element
Basis	$b = \text{card}(Z) = \lvert Z \rvert = \# Z > 1$	Anzahl der Ziffern
Wert einer Ziffer	$\omega_b(z_i)$	ω_b ist eine eindeutige Abbildung, welche jeder Ziffer eine Zahl zuordnet.

natürliche Zahlen

Zahlendarstellung $(z)_b = (z_n z_{n-1} \cdots z_1 z_0)_b$, wobei $z_n \neq 0$

Zahlenwert

$$\omega_b(z) = \sum_{i=0}^{n} \omega_b(z_i) * b^i$$
$$= \omega_b(z_n) * b^n + \omega_b(z_{n-1}) * b^{n-1} + \cdots + \omega_b(z_1) * b + \omega_b(z_0)$$
$$= (\cdots(\omega_b(z_n) * b + \omega_b(z_{n-1})) * b + \cdots + \omega_b(z_1)) * b + \omega_b(z_0)$$

Beispiel im Dualsystem

137 = 128 + 8 + 1 = 1 * 2^7 + 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = $(1000\ 1001)_2$ = $(211)_8$ = $(89)_{16}$

137 :	2 =	68	Rest	**1**
68 :	2 =	34	Rest	**0**
34 :	2 =	17	Rest	**0**
17 :	2 =	8	Rest	**1**
8 :	2 =	4	Rest	**0**
4 :	2 =	2	Rest	**0**
2 :	2 =	1	Rest	**0**
1 :	2 =	**0**	Rest	**1**

rationale Zahlen

Zahlendarstellung $(z)_b = (z'.z'')_b = (z')_b + (.z'')_b$

mit $(z')_b = (z_n z_{n-1} \cdots z_0)_b$ und $(.z'')_b = (.z_{-1} z_{-2} \cdots z_{-m})_b$

Zahlenwert

$$\omega_b(z) = \omega_b(z') + \omega_b(.z'') = \sum_{i=0}^{n} \omega_b(z_i) * b^i + \sum_{i=-m}^{-1} \omega_b(z_i) * b^i = \sum_{i=-m}^{n} \omega_b(z_i) * b^i$$

mit

$$\omega_b(z') = (\cdots(\omega_b(z_n) * b + \omega_b(z_{n-1})) * b + \cdots + \omega_b(z_1)) * b + \omega_b(z_0)$$

und

$$\omega_b(.z'') = \sum_{i=-m}^{-1} \omega_b(z_i) * b^i$$
$$= \omega_b(z_{-m}) / b^m + \omega_b(z_{-m+1}) / b^{m-1} + \cdots + \omega_b(z_{-1}) / b$$
$$= (\cdots(\omega_b(z_{-m}) / b + \omega_b(z_{-m+1})) / b + \cdots + \omega_b(z_{-1})) / b$$

Beispiel im Dualsystem

3.15625 = 3 + 0.15625 = $(11)_2$ + $(0.00101)_2$ = **$(11.00101)_2$**

0.15625 * 2 = **0**.31250
0.3125 * 2 = **0**.625
0.625 * 2 = **1**.25
0.25 * 2 = **0**.5
0.5 * 2 = **1**

5.2 Codierung natürlicher Zahlen

$z \in \mathrm{N}$:

```
unsigned char, unsigned short int,
unsigned int, unsigned long int
```

Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der natürlichen Zahlen als sogenannter direkter Code im Rechner dargestellt werden.

Direkter Code - Dualdarstellung mit festgelegter Bitanzahl:
Natürliche Daten werden als ihre **Dualdarstellung** in den für den Datentyp vorgesehenen Speicherbereich abgespeichert, wobei, je nach Länge der Dualzahl, mit Nullen auf die Bitanzahl des Datentyps aufgefüllt wird.
Die verwendete Bitanzahl *n* für die Datentypen legen die Grenzen der Zahlendarstellung fest.

`unsigned char` => $n = 8$

Dualdarstellung:	$59 = (11\ 1011)_2$
`unsigned char z = 59;`	`0011 1011`
`unsigned char` UCHAR_MAX `= 255;`	`1111 1111`
`unsigned char` UCHAR_MIN `= 0;`	`0000 0000`

(vgl. Anhang A)

Darstellbarer Zahlenbereich: => $0 \le z \le 2^n - 1$

Darstellbare natürlichen Zahlen mit maximal 4 Bit (n = 4):

z_3	z_2	z_1	z_0

Dezimalzahl	Computerzahl	Berechnung
0	0000	0
1	0001	$2^0 = 1$
2	0010	$2^1 = 2$
3	0011	$2^1 + 2^0 = 3$
4	0100	...
5	0101	...
6	0110	...
7	0111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
8	1000	$2^3 = 8$
9	1001	...
10	1010	...
11	1011	...
12	1100	...
13	1101	...
14	1110	...
15	1111	$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$

5.3 Codierung ganzer Zahlen

$z \in Z$:

```
signed char, signed short int,
signed int, signed long int
```

Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der ganzen Zahlen als direkter Code bzw. dessen Komplement im Rechner dargestellt werden.

$z \geq 0$	Direkter Code - Dualdarstellung mit festgelegter Bitanzahl
$z < 0$	Komplementdarstellung des direkten Codes von $\|z\|$

***Komplementbildung*:** $\bar{z} = z \,^{1}\!/_{0}\,^{0}\!/_{1} + 1$ $\qquad 1011\,^{1}\!/_{0}\,^{0}\!/_{1} + 1 = 0100 + 1 = 0101$

$\bar{\bar{z}} = z$ $\qquad \overline{\overline{1011}} = 0101 = 1010 + 1 = 1011$

`signed char` => n = 8, 8. Bit ist Vorzeichenbit s.

Dualdarstellung:	$59 = (11\ 1011)_2$
`signed char z = 59;`	`0011 1011`
`signed char z = -59;`	`1100 0001`
`signed char` CHAR_MAX `= 127;`	`0111 1111`
`signed char` CHAR_MIN `= -128;`	`1000 0000`

(vgl. Anhang A)

Darstellbarer Zahlenbereich: => $\underline{-2^{n-1} \leq z \leq 2^{n-1} - 1}$

Darstellbare ganzen Zahlen mit maximal 4 Bit (n = 4):

s	z_2	z_1	z_0

Dezimalzahl	Computerzahl	Berechnung
7	0111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
6	0110	$2^2 + 2^1 = 6$
5	0101	...
4	0100	...
3	0011	...
2	0010	...
1	0001	$2^0 = 1$
0	0000	0
-1	1111	$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
-2	1110	$2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$
-3	1101	...
-4	1100	...
-5	1011	...
-6	1010	...
-7	1001	$2^4 - 7 = 16 - 7 = 9$
-8	1000	$2^4 - 8 = 16 - 8 = 8$

Beispiel aus ***terms_b.c***

```
int x = 40, y; float a = 1e10;
y = a * x; printf( "%d\n", y);
                                    /* y=1e10*40 => 4e11 */
                /* Rechner => 2147483647=2^31-1=INT_MAX */
```

5.4 Codierung rationaler Zahlen

$z \in Q$**:**

`float, double, long double`

Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der rationalen Zahlen als sogenannte Gleitpunktzahlen im Rechner dargestellt werden.

Darstellung einer rationalen Zahl als Gleitpunktzahl mit Mantisse *M* und Exponent *E*:

1. **Ausgangspunkt ist die *Dualdarstellung* der Zahl.**
   3.15625 = 3 + 0.15625 = $(11)_2 + (0.00101)_2$ = $\mathbf{(11.00101)_2}$

2. **Einführung der *wissenschaftlichen Notation*.**
   Es erfolgt eine Normalisierung durch Stellenverschiebung auf **1.** ··· , man erhält eine ***Mantisse M*** und einen ***Exponenten E***:
   $\mathbf{(11.00101)_2} = (1.100101)_2 * (10)_2 = (1.100101)_2 * 2^1 \Rightarrow \boldsymbol{M = (1.100101)_2, E = 1}$

3. **Darstellung als *Maschinenzahl*.**
   Die Mantisse ***M*** ist in ihrer **Stellenzahl *t*** beschränkt. Sie wird auf die entsprechende Stellenzahl gerundet. Da die Mantisse stets mit **1.** beginnt, lässt man aus Platzgründen diese **1** weg (*hidden bit*):

   $$\boldsymbol{M \approx 1.M'}$$

   Exponenten ***E*** sind nur bis zu einer festgelegten Größe darstellbar, $\boldsymbol{E \in [r, R]}$. Es können nicht beliebig kleine und beliebig große Zahlen dargestellt werden. Die Exponenten werden durch Addition einer Konstanten in den positiven Bereich verschoben:

   $$\boldsymbol{E' = E + C > 0 \Rightarrow C = -r + 1}$$

   Maschineninterne Darstellung: mit ***s*** als Vorzeichenbit **+** .. **0; -** .. **1**.

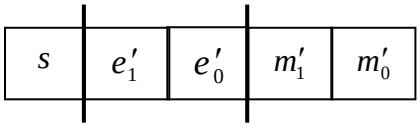
   $$\boldsymbol{s \mid E' \mid M'}$$

   Eine ***Sonderbehandlung*** erfährt die Zahl **0**, sie wird nur durch Nullen codiert:

   0 | 0...0 | 0...0

Die Menge der Maschinenzahlen ist durch die Stellenzahl *t* der Mantisse und durch den kleinsten und größten darstellbaren Exponenten *r* und *R* eindeutig bestimmt.
$\boldsymbol{M_z(t, r, R)}$

Beispiel Mz(3, -1, 1): Darstellbare positive rationale Zahlen mit 5 Bit (1 Vorzeichenbit, 2 Exponentenbits und 2 Mantissenbits):



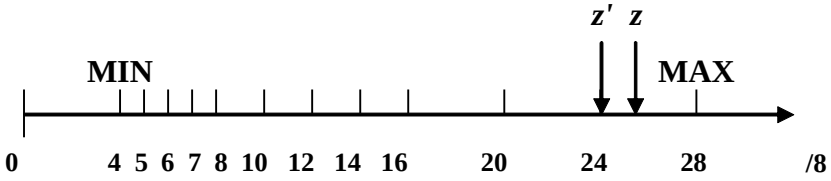
$M' = m'_1 m'_0$ mit $M \approx 1,M'$ und $E' = e'_1 e'_0$ mit $E' = E + \mathbf{2}$.

$\boldsymbol{z = 3.15625} = (11.00101)_2$
=> ***Mantisse*** $M = (1,100101)_2$, ***Exponent*** $E = 1$
=> $M' = (\mathbf{10})_2$, $E' = \mathbf{3}$
=> Interne Darstellung: **0 | 11 | 10**
=> $\boldsymbol{z' = (1.10)_2 * 2^1 = (11)_2 = 3}$, d.h. intern wird 3.15625 auf 3 gerundet!

Übersicht über alle darstellbaren positiven rationalen Zahlen mit 5 Bit als Maschinenzahlen

***Mz*(3, -1, 1)**

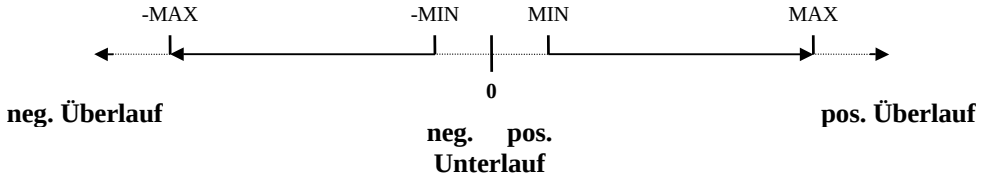
Maschinenzahl	Wert	interne Darstellung	
$(0.00)_2 * 2^0$	= 0	0 | 00 | 00	
$(1.00)_2 * 2^{-1}$	= 4/8	0 | 01 | 00	**MIN**
$(1.01)_2 * 2^{-1}$	= 5/8	0 | 01 | 01	
$(1.10)_2 * 2^{-1}$	= 6/8	0 | 01 | 10	
$(1.11)_2 * 2^{-1}$	= 7/8	0 | 01 | 11	
$(1.00)_2 * 2^0$	= 8/8	0 | 10 | 00	
$(1.01)_2 * 2^0$	= 10/8	0 | 10 | 01	
$(1.10)_2 * 2^0$	= 12/8	0 | 10 | 10	
$(1.11)_2 * 2^0$	= 14/8	0 | 10 | 11	
$(1.00)_2 * 2^1$	= 16/8	0 | 11 | 00	
$(1.01)_2 * 2^1$	= 20/8	0 | 11 | 01	
$(1.10)_2 * 2^1$	**= 24/8**	**0 | 11 | 10**	***⇒z'***
$(1.11)_2 * 2^1$	= 28/8	0 | 11 | 11	**MAX**



Der Zahlenstrahl mit den darstellbaren Zahlen lässt erkennen, dass es Bereiche gibt, in denen Zahlen nicht darstellbar sind und dass die Abstände der darstellbaren Zahlen von **MIN** nach **MAX** größer werden.
Die gleichen Aussagen treffen auch für die *negativen* Gleitpunktzahlen zu.

Zusammenfassung

1. Wertebereich für Gleitpunkttypen:
   $[-MAX,-MIN]\cup\{0\}\cup[MAX,MIN]$, vgl. Kapitel 2: $[-10^{37},-10^{-37}]\cup\{0\}\cup[10^{-37},10^{37}]$



2. Gleitpunktzahlen werden mit zunehmender Größe dünner darstellbar.
3. Je größer Mantissenstellenanzahl *t*, desto dichter die Zahlendarstellung.
4. Das Intervall [*r*, *R*] der Exponenten bestimmt die größte und die kleinste darstellbare Zahl.

Behandlung nicht darstellbarer Zahlen:

1. z > MAX oder z < -MAX:
   Überlauf (**Infinity**, **-Infinity**) ⇒ Abbruch: ***Laufzeitfehler***
2. -MIN < z < 0 oder 0 < z < MIN:
   Unterlauf ⇒ ***Sonderbehandlung***, Runden auf darstellbare Zahlen: ***Rundungsfehler***
3. -MAX < z < -MIN oder MIN < z < MAX:
   Maschinenzahlbereich ⇒ Runden auf darstellbare Zahlen: ***Rundungsfehler***

Standard für rationalen Zahlenbereiche:

(IEEE – *Standard*[1]*, Institute of Electrical and Electronics Engineers***)**

32 – Bit – Format (4 Byte) für einfach genaue Zahlen oder auch „single“
64 – Bit – Format (8 Byte) für doppelt genaue Zahlen oder auch „double“
80 – Bit – Format (10 Byte) für erweitert genaue Zahlen oder auch „double-extended“

Bezeichnung	**Byteanzahl**	***s* [Bit]**	***M* [Bit]**	***E* [Bit]**	***r***	***R***	***C***
`single`	4	1	24	8	-126	127	127
`double`	8	1	53	11	-1022	1023	1023

- ***s*** Vorzeichenbit: 0 ... +, 1 ... -
- ***M*** Länge der Mantisse, einschließlich *hidden bit*
- ***E*** Anzahl der Exponentenbit
- ***r*** kleinster Exponent
- ***R*** größter Exponent
- ***C*** Verschiebungskonstante

***Sonderbehandlung*:**

	***M'* = 0**	***M'* ≠ 0**
***E'* = 0 (*E* = *r* - 1)**	$z = 0.0$	$z = (-1)^s * 2^r * (0.M')_2$; zusätzliche Zahlen im Unterlauf
***E'* = *E'*$_{max}$ (*E* = *R* + 1)**	$z = (-1)^s * \infty$; `-Infinity, Infinity`	`NaN` (Not a Number); keine gültige Gleitpunktzahl

C, Java:

Typ	`float` ⇒ `single`	`double`
MAX < 2^{R+1}	±3.40282347 E +38	±1.797693138462315750 E +308
MIN = 2^r	±1.17549435 E -38	±2.225073858507201383 E -308
Unterlauf (Sonderbehandlung)	±1.40239846 E -45	±4.940656458412465 E -324
gültige Dezimalstellen	7	15

[1] http://www.h-schmidt.net/FloatApplet/IEEE754de.html

Beispiel für single-Zahlendarstellung(C, Java: `float`):

Dezimalzahl => Maschinenzahl

$3.15625 = (11.0010\ 1)_2 = (1.1001\ 01)_2 * 2^1$

$\Rightarrow$ M' = 1001 01, E' = E + **C** = 1 + 127 = 128

$\Rightarrow$ 0|100 0000 0|100 1010 0000 0000 0000 0000

$0.1 = (0.0\overline{0011})_2 = (1.\overline{1001})_2 * 2^{-4}$

$\Rightarrow$ M' = 100 1100 1100 11001100 1100, E' = E + **C** = -4 + 127 = 123

$\Rightarrow$ 0|011 1101 1|100 1100 1100 11001100 1100

$\Rightarrow$ **Die Zahl 0.1 ist als Maschinenzahl nicht exakt darstellbar.**

Maschinenzahl => Dezimalzahl

1|011 1111 1|000 0000 0000 0000 0000 0000

$\Rightarrow$ M' = 0, E' = 127 $\Rightarrow$ M = 1.0, E = E' - **C** = 127 + 127 = 0

$\Rightarrow$ $-1. * 2^0 = -1.0$

Intern sind Datendarstellungen fehlerbehaftet.

Beispiel aus ***terms_a.c***

```
float a = 1e10, b = 1e10, c = 1e-10;

printf( "%f\n", a * ( a - b + c));
                                  /* a*((a-b)+c)    => 1 */
printf( "%f\n", a * ( a + c - b));
                                  /* a*((a+c)-b)    => 1 */
                                        /* Rechner => 0 */
     /* Addition sehr groesser mit sehr kleiner Zahl */
```

Beispiel ***fraction.c*** liefert durch Umformen des Bruchs $f(x)=\frac{x-1}{x+1}:\frac{x^2-1}{x^2+1}$ in $g(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ unterschiedliche Ergebnisse:

fraction.out

```
x: -10.000000,  f:   1.246914,  g:    1.246914
...
x:  -1.500000,  f:  13.000000,  g:   13.000000
x:  -1.000000,  f:       -Inf,  g:        Inf
x:  -0.500000,  f:   5.000000,  g:    5.000000
x:   0.000000,  f:   1.000000,  g:    1.000000
x:   0.500000,  f:   0.555556,  g:    0.555556
x:   1.000000,  f:        NaN,  g:    0.500000
x:   1.500000,  f:   0.520000,  g:    0.520000
...
x:  10.000000,  f:   0.834711,  g:    0.834711
```

Inf ≙ ∞, positiver Überlauf

-Inf ≙ -∞, negativer Überlauf

NaN ≙ **N**ot **a** **N**umber