

## Inhalt

0	Maschinenzahlen.....	2
0.1	<i>Additionssysteme</i> .....	2
0.2	<i>Positionssysteme</i> .....	2
0.3	<i>Dezimal- und Dualsystem</i> .....	3
0.3.1	Dezimalsystem .....	3
0.3.2	Dualsystem .....	4
0.4	<i>Weitere Beispiele für Positionssysteme</i> .....	6
0.5	<i>Zusammenfassung Zahlendarstellung</i> .....	7
0.6	<i>Maschinenzahlen</i> .....	8
0.6.1	Interne Darstellung von ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ .....	8
0.6.2	Interne Darstellung von rationalen Zahlen $z \in \mathbb{Q}$ .....	9
0.7	<i>IEEE - Standard</i> .....	11

## 0 Maschinenzahlen

Die in dem Abschnitt verwendeten Aufgaben sind z.T. aus dem Mathematikbuch der Klasse 5 für Gymnasien des Landes Sachsen vom Oldenburg Verlag.

### 0.1 Additionssysteme

Jedes Zeichen einer Zahlendarstellung hat einen Wert. Der Zahlenwert wird durch Addition bzw. Subtraktion dieser Werte ermittelt.

#### Einfachstes Beispiel

<b>Grundzeichen</b>	I
<b>Werte</b>	1

#### Zahlendarstellung

<b>III</b>	1+1+1+1	<b>4</b>	Addition der Zeichenwerte
------------	---------	----------	---------------------------

#### Römische Zahlendarstellung

<b>Grundzeichen</b>	I	X	C	M
<b>Werte</b>	1	10	100	1000
<b>Hilfszeichen</b>	V	L	D	
<b>Werte</b>	5	50	500	

#### Zahlendarstellung

<b>VIII</b>	1+1+1+5	<b>8</b>	Addition der Zeichenwerte
<b>IX</b>	10-1	<b>9</b>	Subtraktion nur für Grundzeichenwerte erlaubt
<b>CML</b>	50+1000-100	<b>950</b>	LM wäre falsch, da L Hilfszeichen

### 0.2 Positionssysteme

Der Zahlenwert ist abhängig von der Position der Ziffern in der Zahlendarstellung.

#### Ziffern

<b>Endliche Menge von mindestens 2 Zeichen</b>	$Z$	
<b>Ziffer</b>	$z_i \in Z$	i.d.R. hindu-arabische Ziffern
	$0 \in Z$	ausgezeichnetes Element
<b>Basis</b>	$b = \text{card}(Z) =  Z  = \# Z > 1$	Anzahl der Ziffern
<b>Wert einer Ziffer</b>	$\omega_b(z_i)$	$\omega_b$ ist eine eindeutige Abbildung, welche jeder Ziffer eine Zahl zuordnet

#### natürliche Zahlen

<b>Zahlendarstellung</b>	$(z)_b = (z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b$ , wobei $z_n \neq 0$
<b>Zahlenwert</b>	$\omega_b(z) = \sum_{i=0}^n \omega_b(z_i) * b^i$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_b(z_n) * b^n + \omega_b(z_{n-1}) * b^{n-1} + \dots + \omega_b(z_1) * b + \omega_b(z_0) \\
 &= (\dots(\omega_b(z_n) * b + \omega_b(z_{n-1})) * b + \dots + \omega_b(z_1)) * b + \omega_b(z_0)
 \end{aligned}$$

**rationale Zahlen**

**Zahlendarstellung**  $(z)_b = (z'.z'')_b = (z')_b + (.z'')_b$   
 mit  $(z')_b = (z_n z_{n-1} \dots z_0)_b$  und  $(.z'')_b = (.z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_b$

**Zahlenwert**  $\omega_b(z) = \omega_b(z') + \omega_b(.z'') = \sum_{i=0}^n \omega_b(z_i) * b^i + \sum_{i=-m}^{-1} \omega_b(z_i) * b^i = \sum_{i=-m}^n \omega_b(z_i) * b^i$

mit  $\omega_b(z') = (\dots(\omega_b(z_n) * b + \omega_b(z_{n-1})) * b + \dots + \omega_b(z_1)) * b + \omega_b(z_0)$

und  $\omega_b(.z'') = \sum_{i=-m}^{-1} \omega_b(z_i) * b^i$   
 $= \omega_b(z_{-m}) / b^m + \omega_b(z_{-m+1}) / b^{m-1} + \dots + \omega_b(z_{-1}) / b$   
 $= (\dots(\omega_b(z_{-m}) / b + \omega_b(z_{-m+1})) / b + \dots + \omega_b(z_{-1})) / b$

**0.3 Dezimal- und Dualsystem**

**0.3.1 Dezimalsystem**

*Zehnersystem, Dezimalsystem (lat.: decem = zehn), dekadisches Positionssystem*

$Z = \{0,1,\dots,9\} \Rightarrow$  Basis  $b = 10$

$z_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_{10}(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**natürliche Zahlen**

**Beispiel**  $(137)_{10} = 1 * 10^2 + 3 * 10^1 + 7 * 10^0 = 100 + 30 + 7$

**Stellenwerttafel**

Zahlendarstellung	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zahlenwert
$b = 10$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	
$(137)_{10}$	0	1	3	7	100+30+7

**rationale Zahlen**

**Beispiel**  $(3.15625)_{10} = 3 + 0.15625$   
 $= 3 * 10^0 + 1 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2} + 6 * 10^{-3} + 2 * 10^{-4} + 5 * 10^{-5}$   
 $= 3 + 1/10 + 5/100 + 6/1000 + 2/10\ 000 + 5/100\ 000$

**Stellenwerttafel**

Zahlendarstellung	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	Zehntausendstel	Hunderttausendstel
$b = 10$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$(0.15625)_{10}$	1	5	6	2	5

Vereinbarung

Im Zehnersystem werden die Zahlen ungeklammert dargestellt, d.h.  $z = (z)_{10}$ .

**0.3.2 Dualsystem**

*Zweiersystem, Dualsystem (lat.: duo = zwei)*

$Z = \{0,1\} (= \{O,L\}) \Rightarrow$  Basis  $b = 2$

$z_i$	0	1
$\omega_2(z_i)$	0	1



natürliche Zahlen

**Zweierpotenzen**      1 2 4 8 16 32 64 128 256 ...

**Beispiel**       $137 = (1000\ 1001)_2$

**Umrechnung**

**2 → 10**

$(1000\ 1001)_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = 128 + 8 + 1 = 137$       oder  
 $(1000\ 1001)_2 = ((((((1 * 2 + 0) * 2 + 0) * 2 + 0) * 2 + 1) * 2 + 0) * 2 + 0) * 2 + 1) = 137$

**10 → 2**

$137 = 128 + 8 + 1 = 1 * 2^7 + 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = (1000\ 1001)_2$       oder

137 :	2 =	68	Rest	<b>1</b>	↑
68 :	2 =	34	Rest	<b>0</b>	
34 :	2 =	17	Rest	<b>0</b>	
17 :	2 =	8	Rest	<b>1</b>	
8 :	2 =	4	Rest	<b>0</b>	
4 :	2 =	2	Rest	<b>0</b>	
2 :	2 =	1	Rest	<b>0</b>	
1 :	2 =	<u>0</u>	Rest	<b>1</b>	

rationale Zahlen

**Umrechnung**

$z = (z'.z'')_{10} = (z')_{10} + (0.z'')_{10} = (z_n z_{n-1} \dots z_0)_2 + (0.z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_2 = (z_n z_{n-1} \dots z_0 . z_{-1} z_{-2} \dots z_{-m})_2$

**2 → 10**

$(11.00101)_2 = (11)_2 + (0.00101)_2 = 3 + 0.15625 = 3.15625$

Berechnung der Dezimaldarstellung der Zahl  $(0.00101)_2$ :

$(0.00101)_2 = 1 * 2^{-3} + 1 * 2^{-5} = 1/8 + 1/32 = 0.125 + 0.03125 = 0.15625$       oder  
 $(0.00101)_2 = (((((1 / 2 + 0) / 2 + 1) / 2 + 0) / 2 + 0) / 2) = 0.15625$

**10 → 2**

$3.15625 = 3 + 0.15625 = (11)_2 + (0.00101)_2 = (11.00101)_2$

Berechnung der Dualdarstellung der Zahl 0.15625:

$$0.15625 = 0.125 + 0.03125 = 1/8 + 1/32 = (0.00101)_2$$

oder

0.15625	* 2 =	↓	0.3125
0.3125	* 2 =		0.625
0.625	* 2 =		1.25
0.25	* 2 =		0.5
0.5	* 2 =		<u>1.0</u>

**Ein weiteres Beispiel**

$$0.1 = (0.00011)_2$$

0.1	* 2 =	↓	0.2
0.2	* 2 =		0.4
0.4	* 2 =		0.8
0.8	* 2 =		1.6
0.6	* 2 =		1.2
0.2	* 2 =		0.4
			...

**Satz**

Sei  $z = 0.z_{-1}z_{-2}...z_{-m}$  ein endlicher Dezimalbruch, so ist  $Z = 10^m * z \in \mathbb{N}$ .

Es gilt:  $z$  lässt sich als endlicher Dualbruch darstellen, genau dann wenn  $5^m | Z$  ist.

$$(z)_2 = \left( \frac{Z}{5^m} \right)_2 * 2^{-m}.$$

**Beweis**

Allgemein lässt sich  $z$  als endlicher Bruch zur Basis  $b$  darstellen gdw.  $\exists k (b^k * z \in \mathbb{N})$ .

( $\Leftarrow$ )  $5^m | Z \Rightarrow \frac{Z}{5^m} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{Z}{5^m} = \frac{10^m * z}{5^m} = 2^m * z \in \mathbb{N} \Rightarrow z$  ist als endlicher Dualbruch darstellbar.

( $\Rightarrow$ )  $z$  ist als endlicher Dualbruch darstellbar  $\Rightarrow \exists k (2^k * z \in \mathbb{N})$ , setze  $Z' = 2^k * z \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow Z = 10^m * z = 10^m * \frac{Z'}{2^k} = 5^m * 2^{m-k} * Z' \in \mathbb{N}$

1. Fall:  $m \geq k \Rightarrow 2^{m-k} \in \mathbb{N} \Rightarrow 5^m | Z$ .

2. Fall:  $m < k \Rightarrow$  Sei  $k = m + l$ , so  $l > 0$  und  $Z = 5^m * 2^{-l} * Z' \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^l * Z = 5^m * Z' \in \mathbb{N} \Rightarrow 5^m | Z$ , wegen Teilerfremdheit von 2 und 5.

**Beispiele**

$$z = .1875 \Rightarrow m = 4, Z = z * 10^4 = 1875, 5^4 = 625 \Rightarrow 625 | 1875 \text{ und } (z)_2 = (.0011)_2.$$

$$z = .15625 \Rightarrow m = 5, Z = z * 10^5 = 15625, 5^5 = 3125 \Rightarrow 3125 | 15625 \text{ und } (z)_2 = (.00101)_2.$$

$$z = .1 \Rightarrow m = 1, Z = z * 10^1 = 1, 5^1 = 5 \Rightarrow 5 \nmid 1 \text{ und } (z)_2 = (\overline{0.00011})_2$$

$$z = .3 \Rightarrow m = 1, Z = z * 10^1 = 3, 5^1 = 5 \Rightarrow 5 \nmid 3 \text{ und } (z)_2 = (\overline{.01001})_2$$

### 0.4 Weitere Beispiele für Positionssysteme

In den Beispielen beschränken wir uns hier auf die Darstellung natürlicher Zahlen. Analog den Dualzahlen lassen sich auch rationale Zahlen in anderen Positionssystemen beschreiben.

#### Zwölfersystem, Duodezimalsystem (lat.: duodecim = zwölf)

$$Z = \{0,1,\dots,9,A,B\} \Rightarrow \text{Basis } b = 12$$

$z_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
$\omega_{12}(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

**Beispiel**  $137 = (B5)_{12}$

#### Umrechnung

**12 → 10**

$$(B5)_{12} = 11 * 12 + 5 * 12 = 132 + 5 = 137$$

**10 → 12**

$$137 = 132 + 5 = 11 * 12 + 5 = (B5)_{12}$$

oder

$$\begin{array}{r} 137 : 12 = 11 \quad \text{Rest } 5 \\ 11 : 12 = \underline{0} \quad \text{Rest } 11 \end{array} \quad \uparrow \quad \Rightarrow 137 = (B5)_{12}$$

#### Sechzehnersystem, Hexadezimalsystem

$$Z = \{0,1,\dots,9,A,B,C,D,E,F\} \Rightarrow \text{Basis } b = 16$$

$z_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\omega_{16}(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

**Beispiel**  $137 = (89)_{16}$



#### Achtersystem, Oktalsystem (lat.: octo = acht)

$$Z = \{0,1,\dots,7\} \Rightarrow \text{Basis } b = 8$$

*Sandmännchen hat nur acht Finger.  
Wie rechnet es?*

$z_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\omega_8(z_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7

**Beispiel**  $137 = (211)_8$

#### Umrechnung zwischen nichtdezimalen Positionssystemen

$$b \leftrightarrow b': \quad b \leftrightarrow 10 \leftrightarrow b'$$

Beispiel  $(211)_8 = (?)_{12}$  :

$$(211)_8 = 137 = (B5)_{12}$$

**Zusammenhang zwischen Dual-, Oktal und Hexadezimalzahlen**

**8 ↔ 2 ↔ 16:**

Beispiel:  $(572)_8 = (1\ 0111\ 1010)_2 = (17A)_{16}$

dual	$2^1$	:	(	1	0	1	1	1	1	0	1	0	)	$_2$	
oktal	$2^3$	:	(		5			7			2	)	$_8$	=	$(572)_8$
hexadezimal	$2^4$	:	(	1				7				A	)	$_{16}$	= $(17A)_{16}$

Kontrolle durch Umrechnung ins Dezimalsystem (378).

**Beweisskizze für  $2 \rightarrow 8$ :**

Ausgehend von der Dualdarstellung sei  $(z)_2 = (z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0)_2$ .

$$\begin{aligned} \omega_2(z) = \sum_{i=0}^n \omega_2(z_i) * 2^i &= \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_2(z_8) * 2^8 + \omega_2(z_7) * 2^7 + \omega_2(z_6) * 2^6] \\ &\quad + [\omega_2(z_5) * 2^5 + \omega_2(z_4) * 2^4 + \omega_2(z_3) * 2^3] \\ &\quad + [\omega_2(z_2) * 2^2 + \omega_2(z_1) * 2^1 + \omega_2(z_0) * 2^0] \end{aligned}$$

Bilde, von rechts beginnend, Dreiergruppen und klammere dabei die höchstmögliche Zweierpotenz aus:

$$\begin{aligned} &= \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_2(z_8) * 2^2 + \omega_2(z_7) * 2^1 + \omega_2(z_6) * 2^0] * 2^6 \\ &\quad + [\omega_2(z_5) * 2^2 + \omega_2(z_4) * 2^1 + \omega_2(z_3) * 2^0] * 2^3 \\ &\quad + [\omega_2(z_2) * 2^2 + \omega_2(z_1) * 2^1 + \omega_2(z_0) * 2^0] \end{aligned}$$

Fasse die drei Dualziffern als eine Oktalziffer zusammen:

$$\begin{aligned} &= \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_8(z'_2) * (2^3)^2 + \omega_8(z'_1) * (2^3)^1 + \omega_8(z'_0) * (2^3)^0] \\ &= \omega_2(z_n) * 2^n + \dots + [\omega_8(z'_2) * 8^2 + \omega_8(z'_1) * 8^1 + \omega_8(z'_0) * 8^0] \\ &= \sum_{i=0}^m \omega_8(z'_i) * 8^i \end{aligned}$$

Wie man sieht, ergibt sich somit für die Oktaldarstellung  $(z)_8 = (z'_m z'_{m-1} \dots z'_1 z'_0)_8$ .

**0.5 Zusammenfassung Zahlendarstellung**

- Ein und dieselbe Zahl lässt sich unterschiedlich darstellen:  
 $137 = (211)_8 = (1000\ 1001)_2 = (B5)_{12} = (89)_{16} = CXXXVII$ .
- Zu jeder natürlichen Basis  $b > 1$  kann man ein Positionssystem zur Zahlendarstellung festlegen.
- Die Darstellung einer Zahl in einem Positionssystem ist stets eindeutig.

## 0.6 Maschinenzahlen

### 0.6.1 Interne Darstellung von ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$

$z \geq 0$  Direkter Code - Dualdarstellung mit festgelegter Bitanzahl  
 $z < 0$  Komplementdarstellung des direkten Codes von  $|z|$

**Komplementbildung:**  $\bar{z} = z \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} / \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} + 1$   $1011 \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} / \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} + 1 = 0100 + 1 = 0101$   
 $\overline{\bar{z}} = z$   $\overline{0101} = 1010 + 1 = 1011$

Dualdarstellung  $63 = (11\ 1111)_2$   
 byte a = 63; 0011 1111  
 byte b = -63; 1100 0001  
 byte MAX = 127; 0111 1111  
 byte MIN = -128; 1000 0000

**Beispiel: Darstellbare ganze Zahlen mit maximal 4 Bit (Vierbitzahl):**

s	$z'_2$	$z'_1$	$z'_0$
---	--------	--------	--------

Dezimalzahl	Computerzahl	Berechnung
7	0111	$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
6	0110	$2^2 + 2^1 = 6$
5	0101	...
4	0100	...
3	0011	...
2	0010	...
1	0001	$2^0 = 1$
0	0000	0
-1	1111	$0001 \Rightarrow 1110 + 1$
-2	1110	$0010 \Rightarrow 1101 + 1$
-3	1101	...
-4	1100	...
-5	1011	...
-6	1010	...
-7	1001	$0111 \Rightarrow 1000 + 1$
-8	1000	$1000 \Rightarrow 0111 + 1$

**Java:**

Typ	kleinster Wert (MIN_VALUE)	größter Wert (MAX_VALUE)	Byte	Codierung
<b>byte</b>	-128 ( $2^7$ )	127 ( $2^7-1$ )	<b>1</b>	<b>Direktcode</b> / <b>Komplement</b>
<b>short</b>	-32'768 ( $2^{15}$ )	32'767 ( $2^{15}-1$ )	<b>2</b>	
<b>int</b>	-2'147'483'648 ( $2^{31}$ )	2'147'483'647 ( $2^{31}-1$ )	<b>4</b>	
<b>long</b>	-9'223'372'036'854'775'808 ( $2^{63}$ )	9'223'372'036'854'775'807 ( $2^{63}-1$ )	<b>8</b>	<b>UTF-16</b>
<b>char</b>	0	65535 ( $2^{16}-1$ )	<b>2</b>	



### 0.6.2 Interne Darstellung von rationalen Zahlen $z \in \mathbb{Q}$

Wegen der Endlichkeit des Speichers kann nur ein Teil der rationalen Zahlen als sogenannte Gleitpunktzahlen im Rechner dargestellt werden.

Darstellung einer rationalen Zahl als Gleitpunktzahl mit Mantisse  $M$  und Exponent  $E$ :

1. Ausgangspunkt ist die Dualdarstellung der Zahl.

$$3.15625 = 3 + 0.15625 = (11)_2 + (0.00101)_2 = (11.00101)_2$$

2. Einführung der wissenschaftlichen Notation.

Es erfolgt eine Normalisierung durch Stellenverschiebung auf  $1.\dots$ , man erhält eine Mantisse  $M$  und einen Exponenten  $E$ :

$$(11.00101)_2 = (1.100101)_2 * (10)_2 = (1.100101)_2 * 2^1 \Rightarrow M = (1.100101)_2, E = 1$$

3. Darstellung als Maschinenzahl.

Die Maschinemantisse  $M'$  ist in ihrer Stellenzahl  $t$  beschränkt. Sie wird auf die entsprechende Stellenzahl gerundet. Da die Mantisse  $M$  stets mit  $1.$  beginnt, lässt man aus Platzgründen diese  $1$  in der Maschinemantisse weg (hidden bit):

$$M \approx 1.M'$$

Exponenten  $E$  sind nur bis zu einer festgelegten Größe darstellbar,  $E \in [r, R]$ . Die Maschinexponenten  $E'$  werden durch Addition einer Konstanten in den positiven Bereich verschoben:

$$E' = E + C > 0 \Rightarrow C = -r + 1$$

Maschineninterne Darstellung:

mit  $s$  als Vorzeichenbit + ..  $0$ ; - ..  $1$ .

$$s \mid E' \mid M'$$

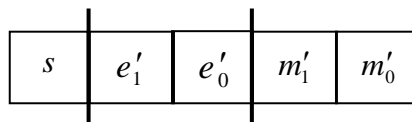
Eine Sonderbehandlung erfährt die Zahl  $0$ , sie wird nur durch Nullen codiert:

$$0 \mid 0\dots0 \mid 0\dots0$$

Die Menge der Maschinenzahlen ist durch die Stellenzahl  $t$  der Mantisse und durch den kleinsten und größten darstellbaren Exponenten  $r$  und  $R$  eindeutig bestimmt.

$$M_z(t, r, R)$$

Beispiel  $M_z(3, -1, 1)$ : Darstellbare positive rationale Zahlen mit 5 Bit (1 Vorzeichenbit, 2 Exponentenbits und 2 Mantissenbits):



$$M' = m'_1 m'_0 \quad \text{und} \quad E' = e'_1 e'_0 \quad \text{mit} \quad C = 2.$$

$$z = 3.15625 = (11.00101)_2$$

$$\Rightarrow \text{Mantisse } M = (1.100101)_2, \text{ Exponent } E = 1$$

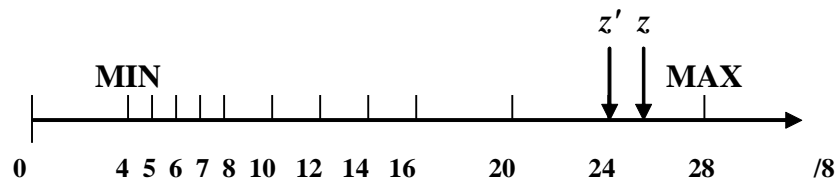
$$\Rightarrow M' = (10)_2, E' = 3 = (11)_2$$

$$\Rightarrow \text{Interne Darstellung: } 0 \mid 11 \mid 10$$

$$\Rightarrow z' = (1.10)_2 * 2^1 = (11)_2 = 3, \text{ d.h. intern wird } 3.15625 \text{ auf } 3 \text{ gerundet!}$$

**Übersicht über alle darstellbaren positiven rationalen Zahlen mit 5 Bit als  
Maschinenzahlen**  
 $M_z(3, -1, 1)$

Maschinenzahl	Wert	interne Darstellung	
$(0.00)_2 * 2^0$	= 0	0   00   00	
$(1.00)_2 * 2^{-1}$	= 4/8	0   01   00	
$(1.01)_2 * 2^{-1}$	= 5/8	0   01   01	
$(1.10)_2 * 2^{-1}$	= 6/8	0   01   10	
$(1.11)_2 * 2^{-1}$	= 7/8	0   01   11	
$(1.00)_2 * 2^0$	= 8/8	0   10   00	
$(1.01)_2 * 2^0$	= 10/8	0   10   01	
$(1.10)_2 * 2^0$	= 12/8	0   10   10	
$(1.11)_2 * 2^0$	= 14/8	0   10   11	
$(1.00)_2 * 2^1$	= 16/8	0   11   00	
$(1.01)_2 * 2^1$	= 20/8	0   11   01	
<b><math>(1.10)_2 * 2^1</math></b>	<b>= 24/8</b>	<b>0   11   10</b>	$\Rightarrow z'$
$(1.11)_2 * 2^1$	= 28/8	0   11   11	

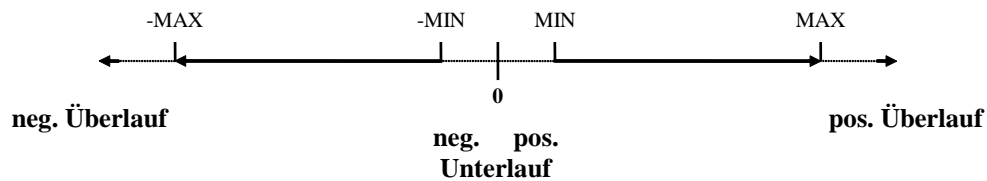


Der Zahlenstrahl mit den darstellbaren Zahlen lässt erkennen, dass es Bereiche gibt, in denen Zahlen nicht darstellbar sind und dass die Abstände der darstellbaren Zahlen von **MIN** nach **MAX** größer werden.

Die gleichen Aussagen treffen auch für die *negativen* Gleitpunktzahlen zu.

**Zusammenfassung**

1. Wertebereich für Gleitpunkttypen:  $[- \text{MAX}, - \text{MIN}] \cup \{0\} \cup [\text{MIN}, \text{MAX}]$



2. Gleitpunktzahlen sind mit größer werdendem Betrag dünner darstellbar.
3. Je größer die Mantissenstellenanzahl  $t$ , desto dichter die Zahlendarstellung.

Dichte der Gleitpunktzahlen im ungünstigsten Fall:

$M_z(3, -1, 1)$

$t - 1$	Anzahl der Nachpunktstellen (ohne 1.)	<b>2</b>
$\Rightarrow 2^{-(t-1)}$	Differenz zwischen zwei benachbarten Mantissen	<b>1/4</b>
$\Rightarrow 2^{-(t-1)} \cdot 2^R$	Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen mit höchstem Exponenten	<b>1/2</b>
$\Rightarrow 2^{R-t+1} / 2$	Fehler einer Zahlendarstellung im ungünstigsten Fall im Maschinenzahlbereich	<b>1/4</b>
$= 2^{R-t}$		



**Maschinenzahl => Dezimalzahl**

1|011 1111 1|000 0000 0000 0000 0000 0000

$$\Rightarrow M' = 0, E' = 127 \Rightarrow M = 1.0, E = E' - C = 127 + 127 = 0$$

$$\Rightarrow -1. * 2^0 = -1.0$$

**Intern sind Datendarstellungen fehlerbehaftet.**

**IEEE:**

Typ	single	double
MAX < 2 <sup>R+1</sup>	±3.40282347 E +38	±1.797693138462315750 E +308
MIN = 2 <sup>r</sup>	±1.17549435 E -38	±2.225073858507201383 E -308
MIN Sonderbehandlung	±1.40239846 E -45	±4.940656458412465 E -324
gültige Dezimalstellen	7	15

**Java:**

Typ	kleinster Wert (MIN_VALUE)	größter Wert (MAX_VALUE)	Dezimalstellen	Byte	Codierung
float	±1.40129846 E -45	±3.40282347 E +38	7	4	IEEE 754 <sup>2</sup> single
double	±4.940656458412465 E -324	±1.797693138462315750 E +308	15	8	IEEE 754 double

<sup>2</sup> <http://www.h-schmidt.net/FloatApplet/IEEE754de.html>