**TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN**
Fachrichtung Mathematik
Institut für Algebra

# Verhalten gewichteter Automaten mit Deflationsparameter über Spurmonoiden

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades
**Diplommathematiker**

vorgelegt von: **Christian Mathissen**

geboren am: **12. Mai 1979**

Geburtsort: **Ludwigshafen am Rhein**

Betreuer: **Prof. Dr. Manfred Droste**

Tag der Einreichung: **30. September 2005**

## Thesen

Wir untersuchen in dieser Diplomarbeit gewichtete Automaten mit Deflationsparameter über Spurmonoiden.

Gewichtete Automaten werden in der theoretischen Informatik schon lange untersucht und haben in der Bildverarbeitung [CK93, CK97] und Sprachverarbeitung [Moh97] Anwendung gefunden. 2002 haben Droste und Kuske die Semantik gewichteter Automaten verallgemeinert und Deflationsparameter eingeführt [DK03].

Spurmonoide sind endlich erzeugte, freie, partiell kommutative Monoide. Sie werden in der Automatentheorie eingesetzt um nebenläufige Prozesse zu modellieren. Droste und Gastin zeigen in [DG99] ein grundlegendes Resultat vom Kleene–Schützenberger–Typ für gewichtete Automaten über Spurmonoiden.

Analog zu der Arbeit von Droste und Gastin untersuchen wir gewichtete Automaten über Spurmonoiden, jetzt allerdings mit der neuen Semantik. Wir können zeigen:

Sei $(\Sigma, I)$ ein Spuralphabet, $\mathbb{M} := \mathbb{M}(\Sigma, I)$ das zugehörige Spurmonoid und $C := \{a \in \Sigma \mid \exists b : aIb\}$. Sei weiter $\mathbb{K}$ ein Semiring und $\Phi : \mathbb{M} \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ ein Monoidhomomorphismus. Dann gilt:

- Ist $\mathbb{K}$ kommutativ und $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$, dann ist $\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ abgeschlossen unter dem $\Phi$–Cauchy–Produkt.
- Ist $\mathbb{K}$ kommutativ und $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$, dann ist $\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ abgeschlossen unter der Kleene–Iteration, angewendet auf monoalphabetische und zusammenhängende quasireguläre Potenzreihen.
- Alle $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen sind $\Phi$–mc–rational.

Aus diesen Resultaten können wir dann das folgende Hauptresultat dieser Diplomarbeit folgern:

**Satz (Hauptresultat)** *Sei* $(\Sigma, I)$ *ein Spuralphabet,* $\mathbb{M} := \mathbb{M}(\Sigma, I)$ *das zugehörige Spurmonoid und* $C := \{a \in \Sigma \mid \exists b : aIb\}$. *Sei weiter* $\mathbb{K}$ *ein Semiring und* $\Phi : \mathbb{M} \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ *ein Monoidhomomorphismus. Dann gilt*

1. $\mathbb{K}^{\mathrm{mc-rat}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle \supseteq \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$.
2. *Ist* $\mathbb{K}$ *kommutativ und* $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ *eine endliche Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$*, dann ist* $\mathbb{K}^{\mathrm{mc-rat}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle = \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$

Setzt man $I = \emptyset$, erhalten wir als Korollar das Resultat von Droste und Kuske. Mit $\Phi(u) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ für alle $u \in \mathbb{M}$ folgert man dagegen den Satz von Droste und Gastin.

Um die Schärfe der Voraussetzungen zu zeigen, konstruieren wir darüber hinaus Gegenbeispiele, die zeigen, dass sowohl die Endlichkeit von $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ als auch die Einschränkung auf Automorphismen im Allgemeinen notwendig ist.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Seit den fünfziger Jahren untersucht man endliche Automaten als Modelle für terminierende Prozesse auf endlichen Systemen. 1956 zeigte Kleene den fundamentalen Satz über die Äquivalenz von erkennbaren und rationalen Sprachen [Kle56]. Dieser Satz wurde dann in verschiedene Richtungen verallgemeinert bzw. erweitert.
Büchi untersuchte unendliche Wörter über endlichen Automaten und konnte hier die die Äquivalenz der so genannten $\omega$–rationalen und $\omega$–erkennbaren Sprachen zeigen [Büc60].
Schützenberger untersuchte gewichtete Automaten, d. h. Automaten, deren Aktionen zusätzlich mit Kosten aus einem Semiring ausgestattet sind. Die Kosten werden entlang eines Laufs eines solchen Automaten multipliziert. Für ein gegebenes Wort werden die Kosten durch die Summe über alle Läufe des Wortes gebildet. Schützenberger zeigte für Abbildungen vom freien Monoid in einen Semiring, so genannten formalen Potenzreihen, die Gleichheit der Klassen der erkennbaren und rationalen Potenzreihen [Sch61].
Gewichtete Automaten haben erst kürzlich wegen Ihrer Anwendungen im Bereich der Sprachverarbeitung [Moh97] und der Bildkompression (siehe z. B. [CK93, CK97]), aber auch wegen Ihres Nutzens im Model-Checking große Aufmerksamkeit erhalten.

Um unendliche Wörter über gewichteten Automaten zu betrachten, muss man mit abzählbaren Produkten und überabzählbaren Summen umgehen.
Droste und Kuske schlagen in [DK03] ein neues Konzept vor. Sie verallgemeinern die Semantik gewichteter Automaten und führen im tropischen Semiring $\mathbb{R}_{\max}$ einen Deflationsparameter $0 \leq q < 1$ ein. Die Kosten einer Transition werden mit einer Potenz von $q$ multipliziert (Multiplikation im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ), wobei die Potenz umso mehr wächst, je später die Transition ausgeführt wird. Das hat zur Folge, dass unendliche Produkte gebildet werden können (geometrische Reihe in $\mathbb{R}$). Die Summe über alle Pfade wird durch das Supremum gebildet. Damit können Droste und Kuske ein Büchi–Resultat für gewichtete Automaten zeigen.
Zusätzlich wird es hierdurch möglich auch Prozesse in den Wirtschaftswissenschaften zu modellieren, wo üblicherweise die Kosten abhängig von der Zeit abgezinst werden.

Die Multiplikation mit $q$ ist ein Endomorphismus von $\mathbb{R}_{\max}$ und insofern kann dieses Konzept auf beliebige Automaten mit Kosten erweitert werden. Droste und Kuske, sowie Ulbrich in [Ulb03] zeigen eine Verallgemeinerung des Satzes von Schützenberger für dieses Konzept.

Eine andere Verallgemeinerung endlicher Automaten sind Automaten über so genannten Spurmonoiden. Die immer größer werdenden Ansprüche an Computer haben dazu geführt, dass rechenzeitintensive Aufgaben auf Multiprozessorsystemen gelöst werden oder große Systeme auf Clustern implementiert werden, wo Aufgaben unabhängig voneinander parallel ablaufen.

Nicht zuletzt das Internet hat diesen Trend noch verstärkt. Deshalb ist es wichtig Modelle für nebenläufige Prozesse zu haben. Mazurkiewicz führte daher Spurmonoide ein; das sind Quotienten des freien Monoids nach einer Kongruenz. Man fasst Wörter, die bis auf Vertauschung unabhängiger Aktionen gleich sind, zu einem Objekt zusammen.
Ochmański zeigte 1984 [Och84, DM97, DR95] ein Kleene-Resultat für Spurmonoide. Droste und Gastin entwickelten 1999 eine gemeinsame Verallgemeinerung der Resultate von Schützenberger [Sch61] und Ochmański [Och84] und zeigten, dass die Klasse der erkennbaren formalen Potenzreihen über Mazurkiewicz Spuren äquivalent ist zu der Klasse der so genannten mc–rationalen Potenzreihen [DG99]. Diese ist die kleinste Klasse formaler Potenzreihen, die Monome enthält, abgeschlossen ist unter punktweiser Addition, dem Cauchy–Produkt und der auf quasireguläre, monoalphabetische und zusammenhängende Potenzreihen eingeschränkten Kleene–Iteration.

In dieser Diplomarbeit untersuchen wir gewichtete Automaten mit Deflationsparameter über Spurmonoiden. Ziel ist eine Verallgemeinerung der Resultate von Droste und Kuske sowie Droste und Gastin.

Wir führen zunächst in die Theorie der formalen Potenzreihen über Mazurkiewicz Spuren ein und definieren gewichtete Automaten mit der Semantik von Droste und Kuske über Spurmonoiden. Die Definition ist so gewählt, dass sie eine Verallgemeinerung der alten Konzepte ist.

Im 2. Kapitel zeigen wir dann zuerst den Abschluss der erkennbaren Potenzreihen unter dem Hadamard Produkt. Danach zeigen wir mittels zweier anspruchsvoller Automatenkonstruktionen, dass die erkennbaren formalen Potenzreihen unter gewissen Voraussetzungen abgeschlossen sind sowohl unter dem Cauchy–Produkt als auch unter der Kleene–Iteration. Es ist dann einfach zu folgern, dass unter diesen Voraussetzungen die mc–rationalen Potenzreihen erkennbar sind.

Umgekehrt gilt aber auch, dass erkennbare Potenzreihen immer mc–rational sind, was wir im danach folgenden Kapitel beweisen. Dabei gehen wir analog zu der Arbeit von Droste und Gastin vor.

Zusammenfassend können wir dann folgern, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Klasse der erkennbaren und die Klasse der mc–rationalen Potenzreihen über Spurmonoiden auch mit der neuen Semantik äquivalent ist und damit ein neues Kleene–Schützenberger Resultat beweisen, das sowohl das Resultat von Droste und Kuske als auch das von Droste und Gastin verallgemeinert.

Außerdem gebe wir in der Arbeit Gegenbeispiele, falls eine beliebige Voraussetzungen fehlt, und zeigen damit die Schärfe der genannten Voraussetzungen bzw. die Optimalität des Ergebnisses.

# 1 Einführung und Definitionen

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge. Ihre Elemente heißen *Buchstaben*.

Um einen sequentiellen Prozess zu modellieren, benutzt man ein Alphabet von elementaren Aktionen. Man betrachtet darüber Wörter, d. h. endliche Folgen von Buchstaben bzw. Aktionen. Die mathematischen Werkzeuge dazu entstammen der Monoidtheorie, da die Menge aller Wörter $\Sigma^*$ über einem endlichen Alphabet $\Sigma$ zusammen mit der Konkatenation das freie Monoid über $\Sigma$ bildet. Ein *Monoid* ist eine algebraische Struktur mit einer assoziativen binären Operation und einem neutralen Element.

Endliche Automaten modellieren endliche diskrete Systeme und sequentielle Prozesse, die auf diesen laufen. Sie werden schon seit den fünfziger Jahren untersucht und ihre Theorie ist gut entwickelt. Um die Theorie endlicher Automaten auch für nebenläufige Prozesse zu nutzen, führte Mazurkiewicz so genannte Spurmonoide ein. Wir werden im folgenden Abschnitt Spurmonoide definieren und zwei, für diese Arbeit wichtige, Lemmata angeben. Für eine ausführliche Darstellung der Spurtheorie siehe z. B. [DR95, DM97].

In den beiden darauf folgenden Abschnitten werden wir gewichtete Automaten mit Deflationsparameter über Spurmonoiden definieren und wichtige Klassen von formalen Potenzreihen, d. h. Abbildungen von einem Monoid in einen Semiring, einführen. Für eine Übersicht zu formalen Potenzreihen siehe [Kui97].

## 1.1 Spurmonoide

**Definition 1.1** Sei $\Sigma$ eine endliche Menge. Eine symmetrische irreflexive binäre Relation $I$ über $\Sigma$ heißt *Unabhängigkeitsrelation*. Das Paar $(\Sigma, I)$ heißt dann *Spuralphabet*.

**Definition 1.2** Sei $(\Sigma, I)$ ein Spuralphabet und bezeichne $\sim$ die kleinste Monoidkongruenz auf $\Sigma^*$, die die Menge $\{(ab, ba) \mid aIb\}$ enthält. Dann heißt das Quotientenmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I) := \Sigma^*/\sim$ *Spurmonoid* über $(\Sigma, I)$ und seine Elemente heißen *Spuren*. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $[w]$ die zugehörige Spur. Insbesondere bezeichnet $\varepsilon$ das neutrale Element in $\mathbb{M}(\Sigma, I)$.

*Bemerkung 1.3*

(a) Ist $I = \emptyset$, dann ist $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ das freie Monoid $\Sigma^*$.

(b) Ist $I = \Sigma \times \Sigma \setminus \Delta$, wobei $\Delta$ die Diagonalrelation $\{(a, a) \mid a \in \Sigma\}$ bezeichnet, dann ist $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ das freie abelsche Monoid, welches isomorph zum $|\Sigma|$–fachen direkten Produkt der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +)$ ist.

Wir fixieren nun für den Rest der Arbeit ein Alphabet $\Sigma$ und wählen für den Rest von Abschnitt 1.1 eine Unabhängigkeitsrelation $I$ auf $\Sigma$.

Mit $aIb$ meinen wir intuitiv, dass die Aktionen $a$ und $b$ nebenläufig sind, d. h. parallel, unabhängig voneinander ausgeführt werden können. Wir fassen deshalb im Spurmonoid Wörter in einer Äquivalenzklasse zusammen, die bis auf die Reihenfolge nebenläufiger Aktionen gleich sind.

Sei $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$. Für alle $1 \leq i \leq n-1$ definieren wir dann $\sigma_i(w) := a_1 \dots a_{i-1}a_{i+1}a_i a_{i+2} \dots a_n$ falls $a_i I a_{i+1}$ und $\sigma_i(w) := w$ sonst. Sei außerdem $\sigma_0(w) := w$ für alle $w \in \Sigma^*$.

**Lemma 1.4** *Sei $u, v \in \Sigma^*$. Dann ist $[u] = [v]$ genau dann, wenn es eine endliche Folge $k_1, \dots, k_m$ in $\mathbb{N}$ gibt mit $\sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1}(u) = v$.*

Beweis. Bezeichne $\sim$ die kleinste Monoidkongruenz auf $\Sigma^*$, die $\{(ab, ba) \mid aIb\}$ enthält. Sei $u = u_1 a_i a_{i+1} u_2 \in \Sigma^*$. Wir zeigen zunächst $\sigma_i(u) \sim u$. Ist $(a_i, a_{i+1}) \notin I$ oder $i = 0$, dann gilt $\sigma_i(u) = u \sim u$. Sei also $(a_i, a_{i+1}) \in I$ und $i \geq 1$. Es ist dann $a_i a_{i+1} \sim a_{i+1} a_i$ und da $\sim$ eine Kongruenz ist, bekommen wir $u = u_1 a_i a_{i+1} u_2 \sim u_1 a_{i+1} a_i u_2 = \sigma_i(u)$.

Da $\sim$ transitiv ist erhalten wir

$$\{(ab, ba) \mid aIb\} \subseteq \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \exists m \exists k_1, \dots, k_m : \sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1}(u) = v\} \subseteq \quad \sim .$$

Man rechnet nun leicht nach, dass $\{(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \exists m \exists k_1, \dots, k_m : \sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1}(u) = v\}$ schon eine Kongruenz ist. Da $\sim$ die kleinste Kongruenz war, die $\{(ab, ba) \mid aIb\}$ enthält, bekommen wir

$$\{(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \exists m \exists k_1, \dots, k_m : \sigma_{k_m} \dots \sigma_{k_1}(u) = v\} = \quad \sim . \qquad \blacksquare$$

Für $v, w \in \Sigma^*$ und $A, B \subseteq \Sigma$ legen wir folgende Abkürzungen fest:

(i) Sei $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ mit $a_i \in \Sigma$. Dann bezeichnet $|w| := n$ den *Betrag* oder die *Länge* von $w$. Die Länge des leeren Wortes ist 0.

(ii) $\alpha(w)$ bezeichnet die Menge aller Buchstaben, d. h. Elemente aus $\Sigma$, die in $w$ vorkommen.

(iii) Man sagt zwei Mengen $A, B \subseteq \Sigma$ sind *unabhängig*, in Zeichen $AIB$, wenn $A \times B \subseteq I$.

(iv) Zwei Worte $w, v$ heißen *unabhängig*, falls $\alpha(w) I \alpha(v)$. Wir schreiben dann $wIv$. Weiter ist $wIA :\Leftrightarrow \alpha(w) IA$.

(v) Eine Menge $A \subseteq \Sigma$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine *echte* Zerlegung $C \cup D = A$ mit $CID$ gibt.

(vi) $w$ heißt *zusammenhängend*, wenn $\alpha(w)$ zusammenhängend ist.

Wir definieren diese Bergriffe in ähnlicher Weise für Spuren. Mit Lemma 1.4 sieht man leicht, dass die folgenden Definitionen wohldefiniert sind.

**Definition 1.5** Sei $[w], [v] \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Wir definieren:

1. $|[w]| := |w|$.
2. $\alpha([w]) := \alpha(w)$.
3. $[w]I[v] :\Leftrightarrow wIv$. Wir sagen dann, $w$ und $v$ sind *unabhängig*. Analog definieren wir für ein $A \subseteq \Sigma$ auch $[w]IA$.
4. $[w]$ heißt *zusammenhängend*, wenn $w$ zusammenhängend ist.
5. Gibt es eine Spur $[x]$ mit $[v][x] = [w]$ ( bzw. $[x][v] = [w]$), dann heißt $[v]$ *Präfix* (bzw. *Suffix*) von $[w]$.

**Definition 1.6** Eine Sprache $L \subseteq \mathbb{M}(\Sigma, I)$ heißt *zusammenhängend*, wenn jedes Element zusammenhängend ist. Sie heißt *monoalphabetisch*, falls $\alpha(w) = \alpha(w')$ für alle $w, w' \in L$.

Folgendes zentrale Lemma zur Faktorisierung von Spuren ist auch als Levi–Lemma für Spuren bekannt:

**Lemma 1.7 (siehe z. B. [Die90])** *Sei $u, v, z_1 \dots z_n \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Dann ist $uv = z_1 \dots z_n$ genau dann, wenn es $r_i, s_i \in \mathbb{M}(\Sigma, I)$ gibt, mit $u = r_1 \dots r_n$, $v = s_1 \dots s_n$, $z_i = r_i s_i$ für alle $i = 1, \dots n$ und $s_i I r_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.*

## 1.2 Gewichtete Automaten

In dieser Arbeit werden gewichtete Automaten untersucht. Die Gewichte stammen dabei aus einer algebraischen Struktur, die viele unterschiedliche Anwendungen erlaubt – dem Semiring. Ein Semiring ist, kurz gesagt, ein Ring ohne Subtraktion:

**Definition 1.8** Ein *Semiring* ist eine algebraische Struktur $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$, in der Folgendes gilt:

(i) $(\mathbb{K}, +, \mathbb{0})$ ist ein kommutatives Monoid.

(ii) $(\mathbb{K}, \cdot, \mathbb{1})$ ist ein Monoid.

(iii) $\cdot$ ist (sowohl von links als auch von rechts) distributiv über $+$.

(iv) $\mathbb{0} \cdot x = x \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

Ein Semiring heißt *kommutativ*, wenn die Multiplikation $\cdot$ zusätzlich kommutativ ist.

Bezeichne im Folgenden $\mathbb{K}$ immer einen Semiring.

Wir geben nun wichtige Beispiele für Semiringe. Hier wird auch schon deutlich, warum sich mit gewichteten Automaten viele unterschiedliche Systeme modellieren lassen.

**Beispiel 1.9**

1. Die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$.
2. Der Semiring $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$.
3. Der probalistische Semiring $([0,1], \max, \cdot, 0, 1)$.
4. Der boolesche Semiring $\mathbb{B} = (\{0,1\}, \max, \min, 0, 1)$.

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ zwischen zwei Semiringen $\mathbb{K}_1 = (\mathbb{K}_1, +_1, \cdot_1, \mathbb{0}_1, \mathbb{1}_1)$ und $\mathbb{K}_2 = (\mathbb{K}_2, +_2, \cdot_2, \mathbb{0}_2, \mathbb{1}_2)$ heißt *Semiringhomomorphismus* oder kurz *Homomorphismus*, falls Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{0}_1) &= \mathbb{0}_2 & \varphi(\mathbb{1}_1) &= \mathbb{1}_2 & & \\ \varphi(x +_1 y) &= \varphi(x) +_2 \varphi(y) & \varphi(x \cdot_1 y) &= \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y) & & \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}_1. \end{aligned}$$

Ein Homomorphismus $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt *Endomorphismus* von $\mathbb{K}$. Die Menge aller Endomorphismen eines Semirings $\mathbb{K}$ bilden, ausgestattet mit der Komposition von Abbildungen $\circ$ und der identischen Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ als neutralem Element, ein Monoid. Dies ist das so genannte Endomorphismenmonoid, welches wir mit $\mathrm{End}(\mathbb{K})$ bezeichnen.

$\mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ ist wohlbekannt, denn es gilt das folgende Lemma:

**Lemma 1.10 ([DK03, Lemma 5.1])** *Sei $\varphi$ ein Endomorphismus von $\mathbb{R}_{\max}$. Dann gibt es ein $q \geq 0$, sodass $\varphi(x) = q \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\max}$.*

Umgekehrt gilt aber auch für alle $q \geq 0$, dass die Abbildung $x \mapsto q \cdot x$ ein $\mathbb{R}_{\max}$–Endomorphismus ist. Deshalb ist $\mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ isomorph zu $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation im Körper $\mathbb{R}$ bezeichnet. Wir werden aus diesem Grund $\mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ mit $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$ identifizieren.

In der klassischen Theorie gewichteter Automaten betrachtet man ein Wort von elementaren Aktionen. Die Aktionen werden sequentiell gelesen und lösen Zustandsübergänge des Systems aus, die Kosten aus $\mathbb{K}$ verursachen. Um die Kosten eines Wortes zu erhalten, multipliziert man die Kosten der Aktionen in der Reihenfolge ihres Auftretens. Die Höhe der Kosten ist allerdings unabhängig vom Zeitpunkt der Ausführung.
Modelliert man Prozesse z. B. in den Wirtschaftswissenschaften so wirkt sich aber der Zeitpunkt auf die Höhe der zu kalkulierenden Kosten aus, da das Kapital in der Zwischenzeit Zinsen abwirft. Die Höhe einer Zahlung in der Zukunft wird abgezinst. Um diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen, wenden wir auf die Kosten einen $\mathbb{K}$–Endomorphismus an, der abhängig

von den schon abgearbeiteten Aktionen ist. Wir führen dazu einen Deflationsparameter $\Phi$ ein, der jedem Wort $w$ ein $\mathbb{K}$–Endomorphismus zuordnet.
Wir geben ein Beispiel: Angenommen wir berechnen Kosten in $\mathbb{R}_{\max}$ und können Aktionen $a$ und $b$ ausführen. Nehmen wir weiter an, dass das Ausführen von Aktion $a$ eine Periode und das Ausführen von Aktion $b$ zwei Perioden dauert. Sei der marktübliche Zinssatz für eine Periode 7% bei kontinuierlicher Verzinsung und sei $q := e^{-0.07}$. Wurden Aktionen $w = a_1 \dots a_n$ schon ausgeführt, so wenden wir auf die Kosten der folgenden Aktion den Endomorphismus $q^{|w|_a + 2|w|_b}$ an ($|w|_a$ bzw. $|w|_b$ bezeichnet die Anzahl von $a$'s bzw. $b$'s in $w$). Dies entspricht genau dem üblichen Abzinsen in den Wirtschaftswissenschaften.
Ein Modellierungsbeispiel mit einem Faktor $q > 1$, findet man in [Ulb03].

Wir werden diese Beschreibung jetzt formalisieren und gewichtete Automaten mit Deflationsparameter einführen.
Sei $Q$ eine endliche Menge. Wir fassen dann die Menge $\mathbb{K}^{Q\times Q}$ als Menge von Matrizen auf, die durch $Q$ indiziert werden. Wie man leicht nachrechnet, bildet $\mathbb{K}^{Q\times Q}$ zusammen mit der punktweisen Addition $+$ und der üblichen Matrizenmultiplikation $\cdot$ einen Semiring $\left(\mathbb{K}^{Q\times Q}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{E}\right)$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{0}$ die Matrix, deren Einträge alle $\mathbb{0}$ sind und $\mathbf{E}$ die übliche Einheitsmatrix.

Sei für den Rest des Kapitels 1 ein Spuralphabet $(\Sigma, I)$ fixiert und sei $\mathbb{M} := \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Wir fixieren weiter mit $\Phi : \mathbb{M} \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ einen Monoidhomomorphismus. Es gibt dann einen korrespondierenden Monoidhomomorphismus, von $\mathbb{M}$ nach $\mathrm{End}(\mathbb{K}^{Q\times Q})$, definiert durch $[\Phi(u)(B)]_{ij} := \Phi(u)(B_{ij})$ für alle Matrizen $B \in \mathbb{K}^{Q\times Q}$. Diesen bezeichnen wir wieder mit $\Phi$. Beachte außerdem, dass $\Phi$ durch das Bild von $\Sigma$ eindeutig bestimmt ist. Deshalb ist durch $\Phi$ auch für jedes weitere Spurmonoid $\mathbb{M}(\Sigma, I')$ mit $I' \subseteq I$, ein Monoidhomomorphismus $\Phi$ von $\mathbb{M}(\Sigma, I')$ nach $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{K}^{Q\times Q}$ gegeben.

**Definition 1.11** Sei $Q$ eine endliche Menge und $\mathbb{M}(\Sigma, I)$ ein Spurmonoid. Eine Abbildung $\mu : \mathbb{M}(\Sigma, I) \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ heißt $\Phi$–*Morphismus*, falls

$$\mu(uv) = \mu(u)\Phi(u)(\mu(v)) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{M}(\Sigma, I).$$

Um die Notation zu entlasten, werden wir auch $\mu(uv) = \mu(u)\Phi(u)\mu(v)$ schreiben.

Wir kommen nun zur zentralen Definition dieses Abschnitts:

**Definition 1.12** Ein gewichteter $\Phi$–Automat mit Kosten in $\mathbb{K}$, oder kurz $\Phi$–Automat, ist ein Quadrupel $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$, wobei gilt:

(i) $Q$ ist eine endliche Menge.

(ii) $\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ ist ein $\Phi$–Morphismus.

(iii) $\lambda \in \mathbb{K}^{1\times Q}$ und $\gamma \in \mathbb{K}^{Q\times 1}$.

$i \in Q$ heißt *initial*, falls $\lambda(i) \neq \mathbb{0}$ und *final*, falls $\gamma(i) \neq \mathbb{0}$.

Wie bei allen folgenden Definitionen werden wir auch hier auf $\Phi$ in der Notation verzichten, falls $\Phi(u) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ für alle $u \in \mathbb{M}$.

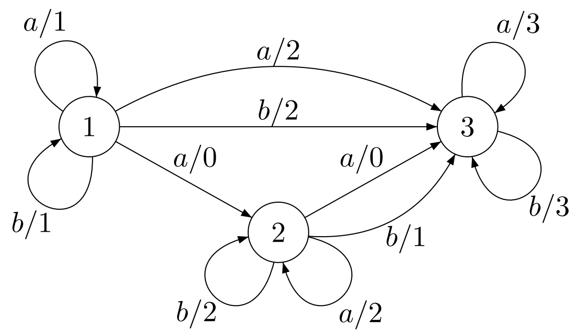
Gewichtete $\Phi$–Automaten modellieren diskrete Systeme mit Kosten. Man interpretiert die Menge $Q$ als die Menge aller möglichen Zustände des Systems. Befindet sich das System im Zustand $i$ so induziert eine Aktion $a \in \Sigma$ beispielsweise einen Zustandsübergang nach $j$. Im klassischen Fall der Kostenberechnung verursacht dieser Zustandsübergang Kosten in Höhe von $\mu a_{ij}$. Wir ändern die Semantik wie oben beschrieben.Wurden schon Aktionen $w$ ausgeführt, so entstehen in unserem Modell Kosten von $\Phi(w)\mu a_{ij}$. Dies sind die Kosten, die entstehen, während das System läuft. Zusätzlich entstehen noch Kosten $\lambda(i)$ bzw. $\gamma(i)$ beim Eintreten bzw. Verlassen des Systems im Zustand $i$.

Es ist oft hilfreich einen gewichteten $\Phi$–Automaten als gerichteten Graphen zu visualisieren. Dabei identifiziert man die Knoten mit $Q$ und zeichnet eine Kante von $i$ nach $j$, falls $\mu a_{ij} \neq \mathbb{0}$, für alle $i, j \in Q$ und $a \in \Sigma$. Diese Kante wird mit „$a/\mu a_{ij}$“ beschriftet.

**Beispiel 1.13** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\max}$, $Q = \{1, 2, 3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $I = \{(a, b), (b, a)\}$ und $\Phi(a) = \Phi(b) = \frac{1}{2}$. Sei weiter

$$\mu a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -\infty & 2 & 0 \\ -\infty & -\infty & 3 \end{bmatrix} \qquad \mu b = \begin{bmatrix} 1 & -\infty & 2 \\ -\infty & 2 & 1 \\ -\infty & -\infty & 3 \end{bmatrix}$$

Dies visualisieren wir durch den folgenden Graphen:




Die Beschreibung als Graph benutzt nur $\mu$ auf $\Sigma$ und berücksichtigt nicht, dass $\mu$ ein $\Phi$–Morphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{K}^{Q\times Q}$ sein soll. Ist $\mathbb{M}$ das freie Monoid $\Sigma^*$, gilt jedoch das folgende Lemma:

**Lemma 1.14** *Sei $Q$ eine endliche Menge und $\mu : \Sigma \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ eine Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\mu : \Sigma^* \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ zu einem $\Phi$–Morphismus.*

*Beweis.* Der Beweis geht analog zum klassischen Fall, wo man „$\Phi$–Morphismus“ durch „Homomorphismus“ ersetzt. ∎

Um Nebenläufigkeiten zu simulieren, betrachten wir unser Modell über Spuren und müssen deshalb für den Automaten fordern, dass er sich für äquivalente Wörter gleich verhält, d. h. dass gilt: $\mu ab = \mu ba$ falls $aIb$.

**Lemma 1.15** *$\mu : \Sigma \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ lässt sich genau dann zu einem $\Phi$–Morphismus $\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ fortsetzen, wenn*

$$\mu(a) \cdot \Phi(a)(\mu(b)) = \mu(b) \cdot \Phi(b)(\mu(a)) \quad \text{für alle } a, b \in \Sigma \text{ mit } aIb. \tag{1.1}$$

*Beweis.*
„$\Rightarrow$": klar.

„$\Leftarrow$": Wir setzen mit Lemma 1.14 $\mu$ zu einem $\Phi$–Morphismus $\mu : \Sigma^* \to \mathbb{K}^{n\times n}$ fort. Sei $u = u_1 a_i a_{i+1} u_2 \in \Sigma^*$. Wir zeigen $\mu$ faktorisiert zu einem $\Phi$–Morphismus auf $\mathbb{M}$, d. h. $\mu(v) = \mu(u)$ für alle $v \in [u]$. Dazu reicht es nach Lemma 1.4 zu zeigen, dass $\mu(u) = \mu(\sigma_i(u))$. Ist $(a_i, a_{i+1}) \notin I$ oder $i = 0$, so folgt $\mu(u) = \mu(\sigma_i(u))$ sofort. Sei also $(a_i, a_{i+1}) \in I$, $i \geq 1$ und gelte Gleichung (1.1). Dann bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\mu(u_1 a_i a_{i+1} u_2) &= \mu u_1 \Phi(u_1) \left(\mu a_i \Phi(a_i) \mu a_{i+1}\right) \Phi(u_1 a_i a_{i+1}) \mu u_2 \\
&= \mu u_1 \Phi(u_1) \left(\mu a_{i+1} \Phi(a_{i+1}) \mu a_i\right) \Phi(u_1 a_{i+1} a_i) \mu u_2 \\
&= \mu(u_1 a_{i+1} a_i u_2) = \mu(\sigma_i(u))
\end{aligned}$$

■

Wir interessieren uns für endliche Folgen von Aktionen und ihre Kosten im folgenden Sinn: Sei $\mathcal{A}$ ein gewichteter $\Phi$–Automat und $w = a_1 \dots a_n$ eine Folge von Aktionen aus $\Sigma$. Sei weiter $P : t_1 \dots t_n$ ein Pfad durch den Graphen, der mit $w$ beschriftet ist, d. h. eine Folge von Transitionen der Form $t_i = (q_i, a_i, (\mu a_i)_{q_i q_{i+1}}, q_{i+1})$, wobei $q_i \in Q$ einen Zustand bezeichnet. Wir schreiben $P : q_1 \xrightarrow{w} q_{n+1}$ und definieren die Kosten von $P$ durch $\mathrm{cost}(P) := (\mu a_1)_{q_1 q_2} \cdot \Phi(a_1)(\mu a_2)_{q_2 q_3} \dots \cdot \Phi(a_1 \dots a_{n-1})(\mu a_n)_{q_n q_{n+1}}$. Die Kosten von $w$ im System $\mathcal{A}$ definieren wir nun als die Summe über alle Pfade, die $w$ realisieren, multipliziert mit den entsprechenden Kosten zum Eintreten und Verlassen des Systems:

$$\sum_{q_1, q_{n+1}} \sum_{P : q_1 \xrightarrow{w} q_{n+1}} \lambda(q_1) \mathrm{cost}(P) \Phi(w) \gamma(q_{n+1})$$

Wie man schnell nachrechnet, ist das Verhalten eines $\Phi$–Automaten in diesem Sinn äquivalent zur folgenden algebraischen Beschreibung:

**Definition 1.16** Sei $\mathcal{A} = (Q, \lambda, \mu, \gamma)$ ein $\Phi$–Automat mit Kosten in $\mathbb{K}$. Das *Verhalten* $\|\mathcal{A}\|$ von $\mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\| \colon \mathbb{M} &\to \mathbb{K} \\
u &\mapsto \lambda \mu(u) \Phi(u) \gamma = \sum_{i,j} \lambda(i) \mu(u)_{ij} \Phi(u)(\gamma(j)).
\end{aligned}$$

**Definition 1.17** Eine Abbildung $S : \mathbb{M} \to \mathbb{K}$ heißt $\Phi$*–erkennbar*, wenn es einen $\Phi$–Automaten $\mathcal{A}$ gibt, sodass $S = \|\mathcal{A}\|$. In diesem Fall heißt $\mathcal{A}$ auch $\Phi$*–Darstellung* von $S$.

Es ist zunächst unklar, wie Lösungen aussehen, die Nebenbedingung (1.1) aus Lemma 1.15 erfüllen, da wir auf der einen Seite durch den Homomorphismus $\Phi$ den Zeitpunkt mit ins Spiel bringen, aber zugleich fordern, dass die Reihenfolge bestimmter Aktionen keine Rolle spielen soll.

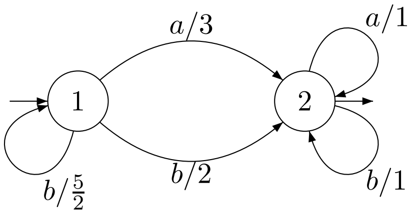
Die Existenz von Lösungen ist trivial, da man $\Phi(a) = \Phi(b)$ und $\mu a = \mu b$ oder $\mu a = \mathbf{0}$ wählen kann. Außerdem ist sowohl die klassische Definition von gewichteten Automaten über Spurmonoiden, als auch die Definition von $\Phi$–Automaten über dem freien Monoid (siehe [DK03] oder [Ulb03]) ein Spezialfall von Definition 1.12. (Setze $\Phi(u) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ für alle $u \in \mathbb{K}$ bzw. $I = \emptyset$). Weiterhin sind alle Polynome $\Phi$–erkennbar, wie wir später sehen werden.

Abgesehen von diesen Fällen gibt es weitere Beispiele:

**Beispiel 1.18** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\max}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $I = \{(a, b), (b, a)\}$. Wegen Lemma 1.10 identifizieren wir $\mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ mit $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$.
Der Automat in Beispiel 1.13, sowie die folgenden beiden Automaten, erfüllen die Nebenbedingung (1.1) aus Lemma 1.15.

1. Sei $Q = \{1, 2\}$, $\Phi(a) = \Phi(b) = \frac{1}{4}$ und

$$\mu a = \begin{bmatrix} -\infty & 3 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \qquad \mu b = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \end{bmatrix} \qquad \gamma = \begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \end{bmatrix}$$

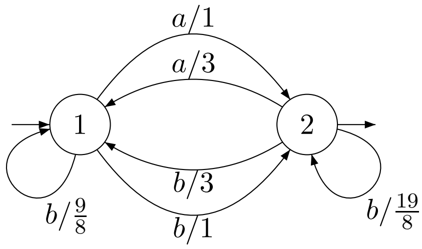



Dieser Automat erkennt $S$, definiert durch

$$(S, a^n b^k) = \begin{cases} 3 + \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+k-2}\right) & ;\text{falls } n \neq 0 \\ \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} & ;\text{falls } n = 0 \text{ und } k \neq 0 \\ -\infty & ;\text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $Q = \{1, 2\}$, $\Phi(a) = \Phi(b) = \frac{1}{3}$ und

$$\mu a = \begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ 3 & -\infty \end{bmatrix} \qquad \mu b = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & 1 \\ 3 & \frac{19}{8} \end{bmatrix} \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \end{bmatrix} \qquad \gamma = \begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \end{bmatrix}$$




Dieser Automat erkennt $S$ definiert durch

$$(S, a^n b^k) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n+k-1}{2}}}{1-\frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+k-1} & ;\text{falls } n+k \text{ ungerade} \\ 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n+k-2}{2}}}{1-\frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+k-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+k-1} \cdot \frac{19}{8} & ;\text{falls } n+k > 0 \text{ gerade und } k \geq 1 \\ -\infty & ;\text{sonst} \end{cases}$$

## 1.3 Formale Potenzreihen

Das Verhalten eines gewichteten $\Phi$–Automaten ist eine Abbildung $S : \mathbb{M}(\Sigma, I) \to \mathbb{K}$. Solche Abbildungen heißen *formale Potenzreihen*. Das Bild von $u$ unter $S$ bezeichnen wir mit $(S, u)$. Weiter schreiben wir auch in Anlehnung an die üblichen Potenzreihen

$$S = \sum_{u \in \mathbb{M}} (S, u).u.$$

Wir statten die Menge der formalen Potenzreihen $\mathbb{K}^{\mathbb{M}}$ mit folgenden Operationen aus:

Seien $S, T \in \mathbb{K}^{\mathbb{M}}$. Dann definieren wir die Addition $\oplus$ punktweise

$$(S \oplus T, u) = (S, u) + (T, u).$$

Das *Hadamard–Produkt* $S \otimes T$ von $S$ und $T$ wird wie folgt definiert:

$$(S \otimes T, u) := (S, u) \cdot (T, u).$$

Das Hadamard–Produkt ist also einfach nur das punktweise Produkt zweier Reihen.

Zuletzt definieren wir das $\Phi$*–Cauchy–Produkt* $\odot_\Phi$ durch

$$(S \odot_\Phi T, u) = \sum_{\substack{u_1, u_2 \in \mathbb{M} \\ u_1 u_2 = u}} (S, u_1)\Phi(u_1)T(u_2).$$

Außerdem zeichnen wir zwei Abbildungen aus:

$$\mathbf{0} : \mathbb{M} \to \mathbb{K} \qquad\qquad \mathbf{1} : \mathbb{M} \to \mathbb{K}$$

$$u \mapsto \mathbb{0} \qquad\qquad u \mapsto \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } u = \varepsilon \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Sei $A \subseteq \mathbb{M}$. Dann bezeichnet im Weiteren $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion von $A$, d. h. die Abbildung, die $\mathbb{1}$ für alle $u \in A$ annimmt und $\mathbb{0}$ sonst.

Die durch $(\mathbb{K}^{\mathbb{M}}, \oplus, \odot_\Phi, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ gegebene Struktur bezeichnen wir mit $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$. Wie üblich schreiben wir auch kurz $ST$ für $S \odot_\Phi T$.

**Lemma 1.19** *Die Strukturen* $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ *und* $(\mathbb{K}^{\mathbb{M}}, \oplus, \otimes, \mathbf{0}, \mathbf{1}_{\mathbb{M}})$ *sind Semiringe.*

*Beweis*. Ulbrich zeigt in [Ulb03], dass $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ ein Semiring ist. Wie man an Definition 1.8 erkennt, ist die Klasse der Semiringe gleichungsdefiniert und bildet deshalb nach Birkhoffs berühmten HSP–Theorem ([Bir35]) eine Varietät. Wie wir in Lemma 3.2 zeigen, ist die Abbildung $\bar{\eta} : \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \to \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$, definiert durch

$$(\bar{\eta}(S), u) := \sum_{w \in [u]} (S, w),$$

ein Homomorphismus. Darüber hinaus ist sie surjektiv, wie man in Kapitel 3 sieht. Da Varietäten abgeschlossen sind unter homomorphen Bildern, ist also auch $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ein Semiring.
Natürlich kann man den Beweis auch elementar führen.

Da $(\mathbb{K}^{\mathbb{M}}, \oplus, \otimes, \mathbf{0}, \mathbf{1}_{\mathbb{M}})$ das $\mathbb{M}$–fache direkte Produkt von $\mathbb{K}$ ist, folgt unmittelbar, dass $(\mathbb{K}^{\mathbb{M}}, \oplus, \otimes, \mathbf{0}, \mathbf{1}_{\mathbb{M}})$ ein Semiring ist. ∎

Für eine formale Potenzreihe $S \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ heißt $\operatorname{supp}(S) := \{u \in \mathbb{M} \mid (S, u) \neq \mathbb{0}\}$ *Träger* von $S$. Gilt $(S, \varepsilon) = \mathbb{0}$, so heißt S *quasiregulär*.

**Definition 1.20** Eine formale Potenzreihe mit endlichem Träger heißt *Polynom*. Die Menge der Polynome bezeichnen wir mit $\mathbb{K}_\Phi\langle\mathbb{M}\rangle$.

Bestimmte Polynome zeichnen wir zusätzlich aus:

**Definition 1.21** Sei $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $k \in \mathbb{K}$. Dann heißt die formale Potenzreihe $k_a$, definiert durch

$$(k_a, u) := \begin{cases} k & ;\text{falls } u = a \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases},$$

*Monom*.

Für $k_\varepsilon \odot_\Phi S$ schreiben wir auch kurz $kS$, denn $(k_\varepsilon \odot_\Phi S, u) = k \cdot (S, u)$.

Sei $S$ eine formale Potenzreihe. Wir setzen $S^0 := \mathbf{1}$ und induktiv für $n \in \mathbb{N} : S^n := S \odot_\Phi S^{n-1} = S^{n-1} \odot_\Phi S$. Für eine quasireguläre formale Potenzreihe können wir dann wie folgt definieren:

**Definition 1.22** Sei $S$ eine quasireguläre formale Potenzreihe. Dann ist $S^*$ definiert durch:

$$(S^*, u) := \sum_{i=0}^{|u|} (S^i, u) = \sum_{i=0}^{n} (S^i, u) \qquad \text{für alle } n \geq |u|.$$

Wir definieren außerdem $S^+ := S \odot_\Phi S^*$.

Sei $u \in \mathbb{M}$. Die Menge der Zerlegungen von $u$ in $n$ Faktoren ist die Menge $\mathcal{Z}_u^n := \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{M}^n \mid u_1 \cdots u_n = u\}$. Insbesondere ist $\mathcal{Z}_u^0 = \emptyset$, falls $u \neq \varepsilon$ und $\mathcal{Z}_\varepsilon^0 = \{\varepsilon\}$. Außerdem definieren wir die Menge aller Zerlegungen von $u$: $\mathcal{Z}_u := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_u^n$. Wir haben dann für eine formale Potenzreihe $S$:

$$(S^n, u) = \sum_{(u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{Z}_u^n} (S, u_1)\Phi(u_1)(S, u_2) \cdots \Phi(u_1 \ldots u_{n-1})(S, u_n)$$

und folglich, falls $S$ quasiregulär

$$(S^*, u) = \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{(u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{Z}_u^n} (S, u_1)\Phi(u_1)(S, u_2) \cdots \Phi(u_1 \ldots u_{n-1})(S, u_n).$$

**Definition 1.23** Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ eine formale Potenzreihe.

1. $S$ heißt *zusammenhängend*, falls $\mathrm{supp}(S)$ zusammenhängend ist.
2. $S$ heißt *monoalphabetisch*, falls $\mathrm{supp}(S)$ monoalphabetisch ist. Wir setzen dann $\alpha(S) = \alpha(u)$ für ein $u \in \mathrm{supp}(S)$, falls $S \neq \mathbf{0}$ und sonst $\alpha(\mathbf{0}) = \emptyset$.

Wir können nun folgende Familien von formalen Potenzreihen definieren:

**Definition 1.24** $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ bezeichnet die Familie aller $\Phi$*–erkennbaren* formalen Potenzreihen.

**Definition 1.25**

1. Die Familie $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ der $\Phi$–rationalen Potenzreihen ist die kleinste Familie von formalen Potenzreihen, für die Folgendes gilt:
   (i) $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ enthält alle Monome.
   (ii) $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ist abgeschlossen unter $\oplus$ und $\odot_\Phi$.
   (iii) $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ist abgeschlossen unter $*$–Iteration, angewendet auf quasireguläre Potenzreihen.
2. Die Familie $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ der $\Phi$–mc–rationalen Potenzreihen ist die kleinste Familie von formalen Potenzreihen, für die Folgendes gilt:
   (i) $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ enthält alle Monome.
   (ii) $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ist abgeschlossen unter $\oplus$ und $\odot_\Phi$.
   (iii) $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ist abgeschlossen unter $*$–Iteration, angewendet nur auf Potenzreihen, die quasiregulär, monoalphabetisch und zusammenhängend sind.

Folgendes wohlbekannte Lemma aus der Theorie der klassischen formalen Potenzreihen über dem freien Monoid können wir auf formale Potenzreihen über Spurmonoiden mit dem $\Phi$–Cauchy–Produkt übertragen:

**Lemma 1.26 (vgl. [BR88, Lemma 4.1])** *Seien $U, T \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ zwei formale Potenzreihen mit $T$ quasiregulär. Die eindeutige Lösung der Gleichung $S = U \oplus T \odot_\Phi S$ (bzw. $S = U \oplus S \odot_\Phi T$) ist die Reihe $S = T^* \odot_\Phi U$ (bzw. $S = U \odot_\Phi T^*$).*

Beweis. Da $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ein Semiring ist, geht der Beweis weitgehend analog zu [BR88]. Wir geben ihn der Vollständigkeit halber trotzdem an.

Wie man mit der Distributivität von $\mathbb{K}$ leicht sieht, ist $(T^*, u) = (T \odot_\Phi T^*, u)$ für alle $u \neq \varepsilon$. Deshalb bekommen wir $T^* = \mathbf{1} \oplus T \odot_\Phi T^*$ und damit $T^* \odot_\Phi U = U \oplus T \odot_\Phi T^* \odot_\Phi U$. Also ist $T^* \odot_\Phi U$ eine Lösung. Das es die einzige ist, sieht man wie folgt:

Sei $S = U \oplus T \odot_\Phi S$. Dann bekommen wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S =& U \oplus T \odot_\Phi (U \oplus T \odot_\Phi S) = U \oplus TU \oplus T^2 S \\ =& U \oplus TU \oplus T^2 (U \oplus T \odot_\Phi S) = U \oplus TU \oplus T^2 U \oplus T^3 S \\ =& \ldots \\ =& (\mathbf{1} \oplus T \oplus \ldots \oplus T^n)\, U \oplus T^{n+1} S \end{aligned}$$

Sei nun $u \in \mathbb{M}$ und $n = |u|$. Dann ist $(T^{n+1} \odot_\Phi S, u) = \mathbb{0}$ , da $T$ quasiregulär und deshalb $(S, u) = (T^* \odot_\Phi U, u)$, was die Aussage beweist. Der andere Fall geht analog. ∎

# 2 Abschlusseigenschaften

Im folgenden Kapitel untersuchen wir die Klasse der $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen auf Abschlusseigenschaften. Zuerst werden wir den Abschluss unter dem Hadamard–Produkt untersuchen und feststellen, dass man das klassische Resultat übertragen kann, d. h. wir erhalten den Abschluss falls der Semiring kommutativ ist.

In den darauf folgenden Abschnitten untersuchen wir das $\Phi$–Cauchy–Produkt und die $*$–Iteration. Nur unter sehr eingeschränkten Voraussetzungen können wir hier den Abschluss zeigen.

Wir wählen nun für den Rest der Arbeit ein Spuralphabet $(\Sigma, I)$ und einen Semiring $\mathbb{K}$. Wir kürzen ab: $\mathbb{M} := \mathbb{M}(\Sigma, I)$. Außerdem fixieren wir mit $\Phi : \mathbb{M} \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ einen Endomorphismus. Wir definieren noch folgende Menge, die sich als zentral erweisen wird:

$$C := \{a \in \Sigma \mid \exists b \in \Sigma : aIb\}$$

## 2.1 Hadamard–Produkt

Wir zeigen jetzt, dass für einen kommutativen Semiring die Klasse der $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen abgeschlossen ist unter dem Hadamard–Produkt.

**Definition 2.1** Sei $\mathbb{K}$ ein Semiring und $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ natürliche Zahlen. Sei weiter $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Das Tensorprodukt $A \otimes B$ ist definiert durch

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} A_{00}B & A_{01}B & \dots & A_{0n-1}B \\ A_{10}B & A_{11}B & \dots & A_{1n-1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-10}B & A_{n-11}B & \dots & A_{n-1n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{nm \times nm}, \tag{2.1}$$

wobei $A_{ij}B$ die Blockmatrix bezeichnet, die entsteht wenn man jeden Eintrag der Matrix $B$ mit $A_{ij}$ multipliziert.

**Lemma 2.2** *Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Semiring und $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ natürliche Zahlen. Sei weiter $A, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $B, D \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Dann gilt*

$$AC \otimes BD = (A \otimes B)(C \otimes D).$$

*Beweis*. $AC \otimes BD$ und $(A \otimes B)(C \otimes D)$ sowie $A \otimes B$ und $C \otimes D$ sind Matrizen aus $\mathbb{K}^{nm \times nm}$. Wir zerlegen alle in $n^2$ Blöcke der Größe $m \times m$ und schreiben $[AC \otimes BD]^{ij}$ für den Block von $AC \otimes BD$ mit dem Index $i, j$. Analog für die anderen Matrizen. Dann gilt, da $\mathbb{K}$ kommutativ ist:

$$\begin{aligned}
[AC \otimes BD]^{ij} = (AC)_{ij} BD &= \left( \sum_k A_{ik} C_{kj} \right) BD \\
&= \sum_k (A_{ik} B)\,(C_{kj} D) \\
&= \sum_k [A \otimes B]^{ik}\,[C \otimes D]^{kj} = [(A \otimes B)(C \otimes D)]^{ij}\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Satz 2.1** *Sei $\mathbb{K}$ kommutativ. Dann ist $\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle \mathbb{M}(\Sigma, I)\rangle\rangle$ abgeschlossen unter dem Hadamard–Produkt.*

*Beweis*. Seien $S, T \in \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle \mathbb{M}(\Sigma, I)\rangle\rangle$ mit den $\Phi$–Darstellungen $(Q^1, \lambda^1, \mu^1, \gamma^1)$ bzw. $(Q^2, \lambda^2, \mu^2, \gamma^2)$. Wir identifizieren $Q^1$ mit der natürlichen Zahl $n = \{0, 1, \ldots, |Q^1| - 1\}$ und $Q^2$ mit $m = \{0, 1, \ldots, |Q^2| - 1\}$. Sei $\mu(u) := \mu^1(u) \otimes \mu^2(u)$ für alle $u \in \mathbb{M}$ das Tensor-Produkt der Matrizen $\mu^1(u)$ und $\mu^2(u)$.

Weiter definieren wir:

$$\lambda := \begin{bmatrix} \lambda^1(0)\lambda^2 & \ldots & \lambda^1(n-1)\lambda^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{1 \times mn} \qquad \text{und } \gamma := \begin{bmatrix} \gamma^1(0)\gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^1(n-1)\gamma^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{mn \times 1}$$

wobei wieder $\lambda^1(i)\lambda^2$ den Vektor bezeichnet, der entsteht indem man jeden Eintrag von $\lambda^2$ mit $\lambda^1(i)$ multipliziert. Analog für $\gamma^1$ und $\gamma^2$.

Direkt aus (2.1) liest man ab: $\mu(\varepsilon) = \mu^1(\varepsilon) \otimes \mu^2(\varepsilon) = \mathbf{E}$ und für alle $u, v \in \mathbb{M}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu(uv) = {} & \mu^1(uv) \otimes \mu^2(uv) = (\mu^1(u)\Phi(u)\mu^1(v)) \otimes (\mu^2(u)\Phi(u)\mu^2(v)) \\
\overset{\text{Lem.2.2}}{=} {} & (\mu^1(u) \otimes \mu^2(u))(\Phi(u)\mu^1(v) \otimes \Phi(u)\mu^2(v)) = (\mu^1(u) \otimes \mu^2(u))\Phi(u)(\mu^1(v) \otimes \mu^2(v)) \\
= {} & \mu(u)\Phi(u)\mu(v).
\end{aligned}$$

Also ist $\mu$ wieder ein $\Phi$–Morphismus. Da $\mathbb{K}$ kommutativ gilt weiter

$$\begin{aligned}
\lambda\mu^1(u) \otimes \mu^2(u)\Phi(u)(\gamma) &= \sum_{i,j} \lambda^1(i)\lambda^2 \mu^1 u_{ij} \mu^2 u \Phi(u)(\gamma^1(j)\gamma^2) \\
&= \sum_{i,j} \lambda^1(i)\mu^1 u_{ij} \Phi(u)\gamma^1(j)\lambda^2\mu^2 u\Phi(u)\gamma^2 \\
&= \lambda^1\mu^1 u\Phi(u)\gamma^1\lambda^2\mu^2 u\Phi(u)\gamma^2 = (S, u) \cdot (T, u).
\end{aligned}$$

D. h. $(mn, \lambda, \mu, \gamma)$ ist eine $\Phi$–Darstellung von $S \otimes T$. $\blacksquare$

## 2.2 Cauchy–Produkt

Im klassischen Beweis des Satzes von Schützenberger zeigt man den Abschluss der $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen $\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ unter dem Cauchy–Produkt mittels einer Automatenkonstruktion. Aus zwei gegebenen gewichteten Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ wird ein Automat $\mathcal{A}$ konstruiert, der $\|\mathcal{A}_1\| \odot \|\mathcal{A}_2\|$ erkennt. Zuerst normalisiert man $\mathcal{A}_1$ so, dass er genau einen finalen Zustand hat, aus dem keine Transition herausführt und $\mathcal{A}_2$ so, dass er genau einen initialen Zustand hat, in den keine Transition hineinführt. Nimmt man nun beide Automaten zusammen und identifiziert den finalen und den initialen Zustand, dann erhält man $\mathcal{A}$. Für einen Lauf eines Wortes $w$ auf $\mathcal{A}$ wird ein Teil auf $\mathcal{A}_1$ und ein Teil auf $\mathcal{A}_2$ realisiert, d. h. man hat eine Zerlegung von $w$ in $w_1$ und $w_2$, wobei $w_1$ auf $\mathcal{A}_1$ und $w_2$ auf $\mathcal{A}_2$ realisiert wird. Die Summe über alle Pfade ist dann genau der Wert des Cauchy–Produktes bei $w$.

Betrachtet man nun Spurmonoide und hat ein Wort $w$ als Input für einen Automaten und eine Zerlegung von $[w]$ in $u_1, u_2$, so liest der Automat im Allgemeinen die Zerlegungen nicht nacheinander, sondern es kann passieren, dass er Teile von $u_2$ liest, bevor er $u_1$ vollständig gelesen hat. Man braucht also kein sequentielles Produkt, sondern eine Art paralleles Produkt der beiden Automaten. Diese Konstruktion machen Droste und Gastin in [DG99]. Die Grundidee, dass einem Lauf von $w$ eine Zerlegung $u_1, u_2$ entspricht bleibt erhalten, wobei $u_1$ auf dem ersten Automaten und $u_2$ auf dem zweiten Automaten realisiert wird. Da es sich jedoch um ein paralleles Produkt der beiden Automaten handelt, muss bei jedem gelesenen Buchstaben entschieden werden, auf welchem Automaten er realisiert wird. Man braucht also eine Möglichkeit sich in den Zuständen zu merken, was schon gelesen wurde bzw. was noch kommen soll.

**Definition 2.3** Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$. Eine $\Phi$–Darstellung $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ von $S$ ist *alphabetisch*, wenn es zwei Abbildungen

$$\overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha} : Q \to \mathscr{P}(\Sigma)$$

gibt mit folgenden Eigenschaften:

1. Aus $\mu u_{ij} \neq \mathbb{0}$ folgt, $\overleftarrow{\alpha}(j) = \overleftarrow{\alpha}(i) \cup \alpha(u)$ und $\overrightarrow{\alpha}(i) = \overrightarrow{\alpha}(j) \cup \alpha(u)$ für alle $u \in \mathbb{M}$.
2. Aus $\lambda(i) \neq \mathbb{0}$ folgt $\overleftarrow{\alpha}(i) = \emptyset$.
3. Aus $\gamma(j) \neq \mathbb{0}$ folgt $\overrightarrow{\alpha}(i) = \emptyset$.

Wir nennen $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overrightarrow{\alpha}, \overleftarrow{\alpha})$ dann *alphabetische $\Phi$–Darstellung* von $S$.

**Lemma 2.4** *Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$. Dann gibt es eine alphabetische $\Phi$–Darstellung von $S$.*

*Beweis*. Weitgehend analog zu [DG99, Proposition 6]. Wir geben ihn trotzdem an, da an einigen Stellen mit dem Homomorphismus $\Phi$ argumentiert werden muss.

Sei $(Q', \lambda', \mu', \gamma')$ eine $\Phi$–Darstellung von S. Wir definieren $Q := Q' \times \mathscr{P}(\Sigma) \times \mathscr{P}(\Sigma)$. Weiter sei $\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{K}^{Q \times Q}$ und $\lambda \in \mathbb{K}^{1 \times Q}$ sowie $\gamma \in \mathbb{K}^{Q \times 1}$ definiert durch

$$\mu u_{(i,\overleftarrow{X},\overrightarrow{X})(j,\overleftarrow{Y},\overrightarrow{Y})} := \begin{cases} \mu' u_{ij} & ; \text{falls } \overleftarrow{Y} = \overleftarrow{X} \cup \alpha(u) \text{ und } \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \cup \alpha(u) \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lambda(i, \overleftarrow{X}, \overrightarrow{X}) := \begin{cases} \lambda'(i) & ; \text{falls } \overleftarrow{X} = \emptyset \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma(i, \overleftarrow{X}, \overrightarrow{X}) := \begin{cases} \gamma'(i) & ; \text{falls } \overrightarrow{X} = \emptyset \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $\overleftarrow{\alpha}(i, \overleftarrow{X}, \overrightarrow{X}) := \overleftarrow{X}$ und $\overrightarrow{\alpha}(i, \overleftarrow{X}, \overrightarrow{X}) := \overrightarrow{X}$.

Wir zeigen nun, dass das eben definierte $\mu$ ein $\Phi$–Morphismus ist.

$$\begin{aligned}
(\mu uv)_{(i,\overleftarrow{X},\overrightarrow{X})(j,\overleftarrow{Y},\overrightarrow{Y})} &= \begin{cases} (\mu' uv)_{ij} & ; \text{falls } \overleftarrow{Y} = \overleftarrow{X} \cup \alpha(uv) \text{ und } \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \cup \alpha(uv) \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_k \mu' u_{ik} \Phi(u) \mu' v_{kj} & ; \text{falls } \overleftarrow{Y} = \overleftarrow{X} \cup \alpha(uv) \text{ und } \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \cup \alpha(uv) \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \sum_k \mu u_{(i,\overleftarrow{X},\overrightarrow{X})(k,\overleftarrow{X} \cup \alpha(u), \overrightarrow{Y} \cup \alpha(v))} \Phi(u) \mu v_{(k,\overleftarrow{X} \cup \alpha(u), \overrightarrow{Y} \cup \alpha(v))(j,\overleftarrow{Y},\overrightarrow{Y})} \\
&= \sum_{(k,\overleftarrow{Z},\overrightarrow{Z})} \mu u_{(i,\overleftarrow{X},\overrightarrow{X})(k,\overleftarrow{Z},\overrightarrow{Z})} \Phi(u) \mu v_{(k,\overleftarrow{Z},\overrightarrow{Z})(j,\overleftarrow{Y},\overrightarrow{Y})} \\
&= (\mu u \Phi(u) \mu v)_{(i,\overleftarrow{X},\overrightarrow{X})(j,\overleftarrow{Y},\overrightarrow{Y})}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overrightarrow{\alpha}, \overleftarrow{\alpha})$ eine alphabetische $\Phi$–Darstellung. Wir zeigen nun noch, dass sie $S$ darstellt.

$$\begin{aligned}
\lambda \mu u \Phi(u) \gamma &= \sum_{i,\overrightarrow{X},j,\overleftarrow{Y}} \lambda'(i) \mu u_{(i,\emptyset,\overrightarrow{X})(j,\overleftarrow{Y},\emptyset)} \Phi(u) \gamma'(j) \\
&= \sum_{i,j} \lambda'(i) \mu u_{(i,\emptyset,\alpha(u))(j,\alpha(u),\emptyset)} \Phi(u) \gamma'(j) = \sum_{i,j} \lambda'(i) \mu' u_{ij} \Phi(u) \gamma'(j) = (S, u) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Bezieht man in obige Überlegungen nun noch den Endomorphismus $\Phi$ mit ein, so ergeben sich weitere Schwierigkeiten. Für ein Wort $w$ und eine Zerlegung $u_1 u_2$ liest ein Automat Teile von $u_2$ eventuell schon bevor er $u_1$ vollständig gelesen hat. Beim Cauchy–Produkt sollen aber die Kosten von $u_2$ durch $\Phi(u_1)$ manipuliert werden. Der Automat müsste also $\Phi(u_1)$ schon kennen, obwohl er $u_1$ noch nicht gelesen hat.

Er könnte $\Phi(u_1)$ raten und dann verifizieren, wenn er auf dem ersten Automaten in einen finalen Zustand kommt, er also $u_1$ vollständig gelesen hat. Ist $\Phi(\mathbb{M})$ allerdings unendlich, so ist dies nicht möglich, da man nur endlich viele Zustände zur Verfügung hat. Das Gegenbeispiel

4.1 zeigt, dass das $\Phi$–Cauchy–Produkt zweier erkennbarer Reihen nicht zwingend erkennbar ist.

Wie wir später sehen werden, brauchen wir allerdings nicht zu fordern, dass $\Phi(\mathbb{M})$ endlich ist, sondern es genügt, wenn wir für eine Teilmenge von $\mathbb{M}$ voraussetzen, dass ihr Bild unter $\Phi$ endlich ist. Dazu führen wir das folgende neue Konzept ein:

**Definition 2.5** Sei $w \in \Sigma^*$, dann bezeichne $\mathbf{suf}w$ das längste Suffix von $w$ aus $C^*$. Für $u = [w] \in \mathbb{M}$ ist $\mathbf{suf}u := [\mathbf{suf}w]$ wohldefiniert. Das wohldefinierte komplementäre Präfix bezeichnen wir mit $\mathbf{pre}u$.

Dass diese Definition wohldefiniert ist, sieht man wieder mit Lemma 1.4. Sei $w = w_1 a_i a_{i+1} w_2 \in \Sigma^*$. Es reicht zu zeigen, dass $[\mathbf{suf}w] = [\mathbf{suf}\sigma_i(w)]$. Ist $(a_i, a_{i+1}) \notin I$ oder $i = 0$, dann ist $\sigma_i(w) = w$, also $[\mathbf{suf}w] = [\mathbf{suf}\sigma_i(w)]$. Sei also $i \neq 0$ und $a_i I a_{i+1}$. Dann ist $a_i, a_{i+1} \in C$ und wir bekommen

$$\begin{aligned}
[\mathbf{suf}w] &= \begin{cases} [(\mathbf{suf}w_1)a_i a_{i+1} w_2] & ;\text{falls } \alpha(w_2) \subseteq C \\ [\mathbf{suf}w_2] & ;\text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [(\mathbf{suf}w_1)a_{i+1} a_i w_2] & ;\text{falls } \alpha(w_2) \subseteq C \\ [\mathbf{suf}w_2] & ;\text{sonst} \end{cases} \\
&= [\mathbf{suf}\sigma_i(w)]
\end{aligned}$$

Also ist **suf** wohldefiniert. Da man in Spurmonoiden kürzen kann, folgt nun, dass auch **pre** wohldefiniert ist.

**Definition 2.6** Die alphabetische $\Phi$–Darstellung $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha})$ einer erkennbaren Reihe $S$ heißt *erweiterte* $\Phi$–Darstellung, falls es eine Abbildung $\psi : Q \to \Phi(\mathbb{M}(C, I))$ gibt, sodass für alle $u \in \mathbb{M}$ gilt:

1. Wenn $\mu u_{ij} \neq \mathbb{0}$, dann ist $\psi(j) = \begin{cases} \psi(i) \circ \Phi(\mathbf{suf}u) = \psi(i) \circ \Phi(u) & ;\text{falls } \alpha(u) \subseteq C \\ \Phi(\mathbf{suf}u) & ;\text{sonst} \end{cases}$
2. Wenn $\lambda(i) \neq \mathbb{0}$, dann ist $\psi(i) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$.

In diesem Fall bezeichnen wir auch $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi)$ als *erweiterte $\Phi$–Darstellung.*

**Definition 2.7** Für eine erweiterte $\Phi$–Darstellung $\mathcal{A} = (Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi)$ definieren wir die Abbildung $\mathbf{suf}_{\mathcal{A}} : Q \times \mathbb{M} \to \Phi(\mathbb{M}(C, I))$ durch

$$\mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i, u) := \begin{cases} \psi(i) \circ \Phi(\mathbf{suf}u) = \psi(i) \circ \Phi(u) & ;\text{falls } \alpha(u) \subseteq C \\ \Phi(\mathbf{suf}u) & ;\text{sonst} \end{cases}$$

**Lemma 2.8** *Ist $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ endlich und $S \in \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$. Dann gibt es eine erweiterte $\Phi$–Darstellung von $S$.*

<u>Beweis</u>. Sei $(Q', \lambda', \mu', \gamma', \overleftarrow{\alpha}', \overrightarrow{\alpha}')$ eine alphabetische $\Phi$–Darstellung von S. Wir definieren $Q := Q' \times \Phi(\mathbb{M}(C, I))$. Weiter sei $\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ und $\lambda \in \mathbb{K}^{1\times Q}$ sowie $\gamma \in \mathbb{K}^{Q\times 1}$ definiert durch

$$\mu u_{(i,\varphi)(j,\pi)} := \begin{cases} \mu' u_{ij} & ;\text{falls } \pi = \varphi \circ \Phi(u) \text{ und } \alpha(u) \subseteq C \\ \mu' u_{ij} & ;\text{falls } \pi = \Phi(\mathbf{suf} u) \text{ und } \alpha(u) \not\subseteq C \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

$$\lambda(i, \varphi) := \begin{cases} \lambda'(i) & ;\text{falls } \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma(i, \varphi) := \gamma'(i).$$

Außerdem setzen wir $\overleftarrow{\alpha}(i, \varphi) := \overleftarrow{\alpha}'(i)$ und $\overrightarrow{\alpha}(i, \varphi) := \overrightarrow{\alpha}'(i)$ sowie $\psi(i, \varphi) = \varphi$.

Wir zeigen nun, dass das eben definierte $\mu$ ein $\Phi$–Morphismus ist.

$$\begin{aligned}
(\mu uv)_{(i,\varphi)(j,\pi)} &= \begin{cases} \mu' uv_{ij} & ;\text{falls } \pi = \varphi \circ \Phi(uv) \text{ und } \alpha(uv) \subseteq C \\ \mu' uv_{ij} & ;\text{falls } \pi = \Phi(\mathbf{suf} uv) \text{ und } \alpha(uv) \not\subseteq C \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_k \mu' u_{ik} \Phi(u) \mu' v_{kj} & ;\text{falls } \pi = \varphi \circ \Phi(uv) \text{ und } \alpha(uv) \subseteq C \\ \sum_k \mu' u_{ik} \Phi(u) \mu' v_{kj} & ;\text{falls } \pi = \Phi(\mathbf{suf} uv) \text{ und } \alpha(uv) \not\subseteq C \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_k \mu u_{(i,\varphi)(k,\varphi\circ\Phi(u))} \Phi(u) \mu v_{(k,\varphi\circ\Phi(u))(j,\pi)} & ;\text{falls } \alpha(u) \subseteq C \\ \sum_k \mu u_{(i,\varphi)(k,\Phi(\mathbf{suf} u))} \Phi(u) \mu v_{(k,\Phi(\mathbf{suf} u))(j,\pi)} & ;\text{falls } \alpha(u) \not\subseteq C \end{cases} \\
&= \sum_{k,\chi} \mu u_{(i,\varphi)(k,\chi)} \Phi(u) \mu v_{(k,\chi)(j,\psi)} \\
&= (\mu u \Phi(u) \mu v)_{(i,\varphi)(j,\psi)}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overrightarrow{\alpha}, \overleftarrow{\alpha}, \psi)$ eine erweiterte $\Phi$–Darstellung. Wir zeigen nun noch, dass sie $S$ darstellt.

$$\begin{aligned}
\lambda \mu u \Phi(u) \gamma &= \sum_{i,j,\pi} \lambda'(i) \mu u_{(i,\mathrm{id}_{\mathbb{K}})(j,\pi)} \Phi(u) \gamma'(j) \\
&= \sum_{i,j} \lambda'(i) \mu u_{(i,\mathrm{id}_{\mathbb{K}})(j,\Phi(\mathbf{suf} u))} \Phi(u) \gamma'(j) = \sum_{i,j} \lambda'(i) \mu' u_{ij} \Phi(u) \gamma'(j) = (S, u) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Wir werden in Satz 2.2 zeigen, dass die $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen unter gewissen Umständen abgeschlossen sind unter dem $\Phi$–Cauchy–Produkt. Um die Automatenkonstruktion im Beweis technisch übersichtlicher zu halten, werden wir uns auf quasireguläre Potenzreihen beschränken und für diese eine einfache Darstellung wählen, die es uns erlaubt die Einstiegs- und Ausstiegskosten zu ignorieren.

**Lemma 2.9 (vgl. [DG99, Proposition 8])** *Sei $S$ quasiregulär und $\Phi$–erkennbar. Sei weiter $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ endlich. Dann gibt es eine erweiterte $\Phi$–Darstellung von $S$, sodass $i$ initial ist, genau dann, wenn $\lambda(i) = \mathbb{1}$ und $j$ final, genau dann, wenn $\gamma(j) = \mathbb{1}$.*

<u>Beweis</u>. Nach Lemma 2.8 hat $S$ eine erweiterte $\Phi$–Darstellung $(Q,\lambda,\mu,\gamma,\overrightarrow{\alpha},\overleftarrow{\alpha},\psi)$. Sei $u\neq\varepsilon$. Wir definieren $\lambda',\mu'$ und $\gamma'$ wie folgt:

$$\mu' u_{ij} = \begin{cases} \mu u_{ij} & ;\text{falls } \lambda(i)\neq \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ \lambda(i)\mu u_{ij} & ;\text{falls } \lambda(i)= \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ \mu u_{ij}\Phi(u)\gamma(j) & ;\text{falls } \lambda(i)\neq \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)=\mathbb{0} \\ \lambda(i)\mu u_{ij}\Phi(u)\gamma(j) & ;\text{falls } \lambda(i)= \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)=\mathbb{0} \end{cases}$$

$$\lambda'(i) = \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \lambda(i)\neq\mathbb{0} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases} \qquad \gamma'(j) = \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $\mu'\varepsilon=\mathbf{E}$. Offensichtlich ist $(\mu'\varepsilon\Phi(\varepsilon)\mu' v)_{ij} = (\mu'\varepsilon v)_{ij} = (\mu' v\varepsilon)_{ij} = (\mu' v\Phi(v)\mu'\varepsilon)_{ij}$ für alle $v\in\mathbb{M}$ und $i,j\in Q$. Sei nun $u,v\neq\varepsilon$. Da $(Q,\lambda,\mu,\gamma,\overrightarrow{\alpha},\overleftarrow{\alpha})$ eine alphabetische $\Phi$–Darstellung ist, gilt: aus $\lambda(k)\neq\mathbb{0}$ folgt $\mu' u_{ik}=0$ und aus $\gamma(k)\neq\mathbb{0}$ folgt $\mu' v_{kj}=0$ für alle $i,j\in Q$. Deshalb bekommen wir

$$\begin{aligned}(\mu' u\Phi(u)\mu' v)_{ij} &= \sum_{k\in Q}\mu' u_{ik}\Phi(u)\mu' v_{kj} \\ &= \begin{cases} \sum_k \mu u_{ik}\Phi(u)\mu v_{kj} & ;\text{falls } \lambda(i)\neq \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ \sum_k \lambda(i)\mu u_{ik}\Phi(u)\mu v_{kj} & ;\text{falls } \lambda(i)= \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ \sum_k \mu u_{ik}\Phi(u)\mu v_{kj}\Phi(uv)\gamma(j) & ;\text{falls } \lambda(i)\neq \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)=\mathbb{0} \\ \sum_k \lambda(i)\mu u_{ik}\Phi(u)\mu v_{kj}\Phi(uv)\gamma(j) & ;\text{falls } \lambda(i)= \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)=\mathbb{0} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\mu uv)_{ij} & ;\text{falls } \lambda(i)\neq \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ \lambda(i)(\mu uv)_{ij} & ;\text{falls } \lambda(i)= \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)\neq\mathbb{0} \\ (\mu uv)_{ij}\Phi(uv)\gamma(j) & ;\text{falls } \lambda(i)\neq \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)=\mathbb{0} \\ \lambda(i)(\mu uv)_{ij}\Phi(uv)\gamma(j) & ;\text{falls } \lambda(i)= \mathbb{0} \text{ und } \gamma(j)=\mathbb{0} \end{cases} \\ &= (\mu' uv)_{ij}\end{aligned}$$

Also ist auch $\mu'$ ein $\Phi$–Morphismus. Man sieht leicht, dass $(Q,\lambda',\mu',\gamma',\overrightarrow{\alpha},\overleftarrow{\alpha},\psi)$ eine erweiterte $\Phi$–Darstellung mit der Eigenschaft aus dem Lemma ist.Wir zeigen nun noch, dass sie wieder $S$ darstellt. Da $S$ quasiregulär ist, ist $\lambda'\mu'\varepsilon\gamma'=\mathbb{0}$. Weiter gilt

$$\lambda'\mu' u\Phi(u)\gamma' = \sum_{\substack{i \text{ initial} \\ j \text{ final}}}\mu' u_{ij} = \sum_{\substack{i \text{ initial} \\ j \text{ final}}}\lambda(i)\mu u_{ij}\Phi(u)\gamma(j) = \sum_{i,j}\lambda(i)\mu u_{ij}\Phi(u)\gamma(j) = (S,u) \quad \blacksquare$$

Wir kommen nun zum angekündigten Satz über das $\Phi$–Cauchy–Produkt.

**Satz 2.2** *Sei $\mathbb{K}$ kommutativ. Sei weiter $\Phi(\mathbb{M}(C,I))$ endlich und $\varphi$ bijektiv für alle $\varphi\in\Phi(\mathbb{M}(C,I))$. Seien $S,T\in\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ quasiregulär. Dann ist das Cauchy–Produkt $S\odot_\Phi T$ wieder $\Phi$–erkennbar.*

<u>Beweis</u>. Wir beweisen die Aussage mittels einer Automatenkonstruktion ähnlich der in [DG99, Theorem 7].

Seien $\mathcal{A}_1 = (Q^1, \lambda^1, \mu^1, \gamma^1, \overleftarrow{\alpha}^1, \overrightarrow{\alpha}^1, \psi^1)$ und $\mathcal{A}_2 = (Q^2, \lambda^2, \mu^2, \gamma^2, \overleftarrow{\alpha}^2, \overrightarrow{\alpha}^2, \psi^2)$ erweiterte Darstellungen von $S$ bzw. $T$ der Form aus Lemma 2.9. Außerdem seien alle Zustände erreichbar. Definiere $Q := Q^1 \times Q^2 \times \Phi(\mathbb{M}(C, I))$. Seien im Weiteren $a, b \in \Sigma$.

Wir kürzen ab: $i := (i_1, i_2, \varphi)$, $j := (j_1, j_2, \chi)$, $k := (k_1, k_2, \pi) \in Q$. Außerdem schreiben wir für $\overrightarrow{\alpha}^1$ und $\overrightarrow{\alpha}^2$ (bzw. $\overleftarrow{\alpha}^1$ und $\overleftarrow{\alpha}^2$) kurz $\overrightarrow{\alpha}$ (bzw. $\overleftarrow{\alpha}$), falls keine Verwechslung auftreten kann.

Wir definieren

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(a)_{ij} &:= \delta_{\varphi,\chi}\delta_{i_2,j_2}\psi^2(i_2)^{-1}(\mu^1 a_{i_1 j_1}) \\
\hat{\mu}(a)_{ij} &:= \delta_{\varphi,\chi}\delta_{i_1,j_1}\left[\psi^2(i_2)^{-1}\psi^1(i_1)^{-1}\varphi\psi^2(i_2)\right](\mu^2 a_{i_2 j_2}) \\
\mu(a)_{ij} &:= H_i H_j\left[\tilde{\mu}(a)_{ij} + \hat{\mu}(a)_{ij}\right] \\
\lambda(i) &:= \lambda^1(i_1)\lambda^2(i_2) \\
\gamma(j) &:= \gamma^1(j_1)\gamma^2(j_2)
\end{aligned}$$

mit

$$H_i := \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \overrightarrow{\alpha}(i_1) \neq \emptyset \text{ und } \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2) \\ \mathbb{1} & ;\text{falls } \overrightarrow{\alpha}(i_1) = \emptyset \text{ und } \psi^1(i_1) = \varphi \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\delta_{i_1,j_1} := \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } i_1 = j_1 \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases} \qquad \delta_{\varphi,\chi} := \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \varphi = \chi \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}.$$

Beachte $H_i \neq \mathbb{0} \Rightarrow \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2)$.

Beachte außerdem: Ist $H_i \neq \mathbb{0}$, dann ist höchstens einer der beiden Summanden $\tilde{\mu}a_{ij}$ und $\hat{\mu}a_{ij}$ ungleich $\mathbb{0}$. Denn angenommen $\tilde{\mu}a_{ij} \neq \mathbb{0}$ und $\hat{\mu}a_{ij} \neq \mathbb{0}$ und $H_i \neq \mathbb{0}$, dann ist $i = j$ und da $H_i = \mathbb{1}$, bekommt man $a \in \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2) = \overleftarrow{\alpha}(j_2) \ni a$. Widerspruch!

Der konstruierte Automat besteht aus dem kartesischen Produkt der beiden Darstellungen von $S$ und $T$. $\tilde{\mu}$ repräsentiert die Aktionen auf $\mathcal{A}_1$ und $\hat{\mu}$ die Aktionen auf $\mathcal{A}_2$. Der Automat arbeitet, wie gerade gesehen, *entweder* auf dem ersten *oder* auf dem zweiten Automaten. Man kann solange Aktionen auf $\mathcal{A}_1$ durchführen, wie die gelesenen Buchstaben unabhängig von jenen sind, die schon auf $\mathcal{A}_2$ bearbeitet wurden. In der dritten Komponente von $Q$ „rät“ der Automat das Bild unter $\Phi$ von **suf** der Spur, die auf $\mathcal{A}_1$ abgearbeitet wird. Die Wahl wird überprüft, sobald $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \emptyset$, d. h. auf $\mathcal{A}_1$ nicht mehr gearbeitet wird.

Wir zeigen zunächst ein Hilfsresultat.

Sei $aIb$ und

$$H_i H_j\left[\tilde{\mu}(a)_{ik} + \hat{\mu}(a)_{ik}\right]\Phi(a)\left(\tilde{\mu}(b)_{kj} + \hat{\mu}(b)_{kj}\right) \neq \mathbb{0}. \tag{2.2}$$

Dann ist $H_k = \mathbb{1}$.

Offensichtlich ist $\varphi = \chi = \pi$. Gilt $i_1 \neq k_1$, so folgt $\mu^1 a_{i_1k_1} \neq \mathbb{0}$. Also ist dann $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \overrightarrow{\alpha}(k_1) \cup \{a\}$ und $\overleftarrow{\alpha}(k_1) = \overleftarrow{\alpha}(i_1) \cup \{a\}$. Analog für $i_2, k_2$ und $k_1, j_1$ sowie $k_2.j_2$. Folgende Überlegungen implizieren die Aussage:

(i) Sei $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \emptyset$. Dann ist $(\mu^1 b)_{k_1j_1} = \mathbb{0}$. Aus (2.2) folgt nun $\hat{\mu} b_{kj} \neq \mathbb{0}$. Also ist $k_1 = j_1$ und damit $\psi^1(k_1) = \psi^1(j_1) = \varphi$, da $H_j \neq \mathbb{0}$.

(ii) Sei $\overrightarrow{\alpha}(k_1) \neq \emptyset$ und $k_2 = i_2$. Aus (2.2) folgt ($k_1 = i_1$ oder $\overrightarrow{\alpha}(k_1) \cup \{a\} = \overrightarrow{\alpha}(i_1)$). Also gilt $\overrightarrow{\alpha}(k_1) \subseteq \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2) = \overleftarrow{\alpha}(k_2)$, da $H_i \neq \mathbb{0}$.

(iii) Sei $\overrightarrow{\alpha}(k_1) \neq \emptyset$ und $k_1 = j_1$. Aus (2.2) folgt ($k_2 = j_2$ oder $\overleftarrow{\alpha}(k_2) \cup \{b\} = \overleftarrow{\alpha}(j_2)$). Also gilt $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(j_1) I \overleftarrow{\alpha}(j_2) \supseteq \overleftarrow{\alpha}(k_2)$, da $H_j \neq \mathbb{0}$.

(iv) Sei $\overrightarrow{\alpha}(k_1) \neq \emptyset$ und $k_1 = i_1$ und $k_2 = j_2$. Ist $k_1 = j_1$, dann ist $k = j$, also $H_k = \mathbb{1}$. Sei also $k_1 \neq j_1$. Wir zeigen $\overrightarrow{\alpha}(k_1) I \overleftarrow{\alpha}(k_2)$. Aus (2.2) folgt $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(j_1) \cup \{b\}$. Da $\overrightarrow{\alpha}(j_1) I \overleftarrow{\alpha}(j_2) = \overleftarrow{\alpha}(k_2)$, bleibt $b I \overleftarrow{\alpha}(j_2)$ zu zeigen. Ist $i_2 = j_2$, so folgt $b \in \overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2) = \overleftarrow{\alpha}(j_2)$. Ist dagegen $j_2 \neq i_2$, folgt $\overleftarrow{\alpha}(j_2) = \overleftarrow{\alpha}(i_2) \cup \{a\}$. Mit $b \in \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2)$ und $aIb$ folgt nun die Behauptung.

(v) In allen anderen Fällen gilt: $H_i H_j \left[\tilde{\mu}(a)_{ik} + \hat{\mu}(a)_{ik}\right] \Phi(a) \left(\tilde{\mu}(b)_{kj} + \hat{\mu}(b)_{kj}\right) = \mathbb{0}$.

Wir können nun zeigen, dass $\mu$ zu einem $\Phi$–Morphismus auf $\mathbb{M}$ faktorisiert. Sei $a, b \in \Sigma$ mit $aIb$. Dann gilt mit dem eben Gezeigten:

$$
\begin{aligned}
&[\mu a \Phi(a)(\mu b)]_{ij} = \sum_{k \in Q} \mu a_{ik} \Phi(a)(\mu b_{kj}) = \\
=& \sum_{k \in Q} H_i H_k H_j \left[\tilde{\mu}(a)_{ik} + \hat{\mu}(a)_{ik}\right] \Phi(a) \left(\tilde{\mu}(b)_{kj} + \hat{\mu}(b)_{kj}\right) \\
=& H_i H_j \delta_{\varphi,\chi} \sum_{k, \pi = \varphi} \tilde{\mu}(a)_{ik} \Phi(a) \tilde{\mu}(b)_{kj} + \tilde{\mu}(a)_{ik} \Phi(a) \hat{\mu}(b)_{kj} + \hat{\mu}(a)_{ik} \Phi(a) \tilde{\mu}(b)_{kj} + \hat{\mu}(a)_{ik} \Phi(a) \hat{\mu}(b)_{kj} \\
=& H_i H_j \delta_{\varphi,\chi} \sum_{k_1} \delta_{i_2,j_2} \psi^2(i_2)^{-1} (\mu^1 a_{i_1k_1}) \left[\Phi(a) \psi^2(i_2)^{-1}\right] (\mu^1 b_{k_1j_1}) + \qquad (2.3) \\
&+ \psi^2(i_2)^{-1} (\mu^1 a_{i_1j_1}) \left[\Phi(a) \psi^2(i_2)^{-1} \psi^1(j_1)^{-1} \varphi \psi^2(i_2)\right] (\mu^2 b_{i_2j_2}) + \qquad (2.4) \\
&+ \left[\psi^2(i_2)^{-1} \psi^1(i_1)^{-1} \varphi \psi^2(i_2)\right] (\mu^2 a_{i_2j_2}) \left[\Phi(a) \psi^2(j_2)^{-1}\right] (\mu^1 b_{i_1j_1}) + \qquad (2.5) \\
&+ \sum_{k_2} \delta_{i_1j_1} \left[\psi^2(i_2)^{-1} \psi^1(i_1)^{-1} \varphi \psi^2(i_2)\right] (\mu^2 a_{i_2k_2}) \left[\Phi(a) \psi^2(k_2)^{-1} \psi^1(i_1)^{-1} \varphi \psi^2(k_2)\right] (\mu^2 b_{k_2j_2}) \\
&\qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Wir machen folgende Beobachtungen:

(i) zu (2.3) bzw. (2.4): Ist $\mu a_{i_1k_1} \neq \mathbb{0}$ (bzw. $\mu a_{i_1j_1} \neq \mathbb{0}$) und $H_i \neq \mathbb{0}$, dann folgt $a \in \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2)$. Da $i_2$ erreichbar ist, gibt es ein $u \in \mathbb{M}$ und ein initiales $l_2$, sodass $\mu^2 u_{l_2i_2} \neq \mathbb{0}$. Damit folgt $\psi^2(i_2) = \Phi(\mathbf{suf}\, u)$ und $\overleftarrow{\alpha}(i_2) = \alpha(u)$. Also ist $\psi^2(i_2)\Phi(a) = \Phi(a)\psi^2(i_2)$.

(ii) zu (2.6) : Aus $\mu^2 a_{i_2k_2} \neq \mathbb{0}$ folgt, da $aIb$, dass $\psi^2(k_2) = \psi^2(i_2)\Phi(a)$.

(iii) zu (2.4) : Aus $\mu^1 a_{i_1 j_1} \neq \mathbb{0}$ folgt $\psi^1(j_1) = \psi^1(i_1)\Phi(a)$.

(iv) zu (2.5) : Aus $\mu^2 b_{i_2 j_2} \neq \mathbb{0}$ folgt $\psi^2(j_2) = \psi^2(i_2)\Phi(b)$.

Vertauscht man in (2.4) und (2.5) $a$ und $b$, so sieht man mit Beobachtungen (i), (iii) und (iv), dass die Terme gegenseitig ineinander übergehen.
(2.3) ist wegen Beobachtung (i) äquivalent zu

$$\delta_{i_2,j_2}\psi^2(i_2)^{-1}(\mu^1 ab_{i_1 j_1}).$$

(2.6) ist wegen Beobachtung (ii) äquivalent zu

$$\delta_{i_1 j_1}\left[\psi^2(i_2)^{-1}\psi^1(i_1)^{-1}\varphi\psi^2(i_2)\right](\mu^2 ab_{i_2 j_2}).$$

Da $\mu^1$ und $\mu^2$ $\Phi$–Morphismen sind, bekommen wir $[\mu a\Phi(a)(\mu b)]_{ij} = [\mu b\Phi(b)(\mu a)]_{ij}$ Nach Lemma 1.15 faktorisiert $\mu$ also zu einem $\Phi$–Morphismus auf $\mathbb{M}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ eine $\Phi$–Darstellung für $S \odot_\Phi T$ ist. Sei $w \neq \varepsilon$ und $\lambda^1(i_1) \neq \mathbb{0}$ und $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0}$. Wir zeigen

$$\mu w_{ij} = H_i H_j \delta_{\varphi,\chi} \sum_{uv=w} \mu^1 u_{i_1 j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right).$$

Wir zeigen dies mittels Induktion über die Spurlänge. Sei $a \in \Sigma$. Dann gilt:

$$\mu a_{ij} = H_i H_j \delta_{\varphi,\chi}\left(\psi^2(i_2)^{-1}\mu^1 a_{i_1 j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}a)\varphi\right](\delta_{i_2,j_2}) + \delta_{i_1,j_1}\left[\psi^2(i_2)^{-1}\psi^1(i_1)^{-1}\varphi\psi^2(i_2)\right]\mu^2 a_{i_2 j_2}\right).$$

Da $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0} \Rightarrow \psi^2(i_2) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$, und $\lambda^1(i_1) \neq \mathbb{0} \Rightarrow \psi^1(i_1) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$, folgt der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt definieren wir:

$$I(a, j_2) := \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } aI\overleftarrow{\alpha}(j_2) \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen zunächst ein paar Hilfsüberlegungen bzw. Beobachtungen. Sei, wie erwähnt, $\lambda^1(i_1) \neq \mathbb{0}$ und $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0}$.

(i) Sei $H_j = \mathbb{1}$ und $\mu^1 a_{k_1 j_1} \neq \mathbb{0}$ sowie $j_2 = k_2$. Dann ist $H_k = I(a, j_2)$.

<u>*Beweis*</u>. Aus $\mu^1 a_{k_1 j_1} \neq \mathbb{0}$ folgt $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(j_1) \cup \{a\} \neq \emptyset$. Also gilt $H_k = \mathbb{1} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha}(k_1)I\overleftarrow{\alpha}(k_2)$. Mit $\overrightarrow{\alpha}(j_1)I\overleftarrow{\alpha}(j_2) = \overleftarrow{\alpha}(k_2)$ folgt jetzt die Behauptung. •

(ii) Sei $H_j = \mathbb{1}$ und $\mu^2 a_{k_2 j_2} \neq \mathbb{0}$. Sei weiter $k_1 = j_1$ und $\pi = \chi$. Dann ist $H_k = \mathbb{1}$.

<u>*Beweis*</u>. Ist $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \emptyset$ so folgt $H_k = \mathbb{1}$ direkt aus $H_j = \mathbb{1}$. Ist dagegen $\overrightarrow{\alpha}(k_1) \neq \emptyset$, so folgt die Behauptung aus $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(j_1)I\overleftarrow{\alpha}(j_2) \supseteq \overleftarrow{\alpha}(k_2)$, da $\mu^2 a_{k_2 j_2} \neq \mathbb{0}$. •

(iii) Sei $\mu^2 v_{i_2 j_2} \neq \mathbb{0}$ und $I(a, j_2) \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\psi^2(j_2) = \Phi(\mathbf{suf}v) = \Phi(v)$.

<u>*Beweis*</u>. Aus $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0}$ folgt $\psi^2(j_2) = \Phi(\mathbf{suf}v)$. Die Behauptung folgt nun aus $I(a, j_2) \neq \mathbb{0}$, da $\overleftarrow{\alpha}(j_2) = \overleftarrow{\alpha}(i_2) \cup \alpha(v)$. •

(iv) Sei $\mu^1 u_{i_1 j_1} \neq \mathbb{0}$ und $H_j = \mathbb{1}$. Sei weiter $\mu^2 v_{i_2 k_2} \neq \mathbb{0}$ und $\mu^2 a_{k_2 j_2} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\left[\Phi(uv)\psi^2(k_2)^{-1}\psi^1(j_1)^{-1}\varphi\psi^2(k_2)\right] = [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\Phi(v)]$.

<u>*Beweis*</u>. Da $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0}$, ist $\psi^2(k_2) = \Phi(\mathbf{suf}v)$. Ist $\alpha(v) \subseteq C$, so folgt $\psi^2(k_2) = \Phi(v)$. Ist dagegen $\alpha(v) \nsubseteq C$, dann ist $\overrightarrow{\alpha}(j_1) I \overleftarrow{\alpha}(j_2) \nsubseteq C$, also ist $\overrightarrow{\alpha}(j_1) = \emptyset$. Damit erhält man $\psi^1(j_1) = \varphi = \Phi(\mathbf{suf}u)$, da $\lambda^1(i_1) \neq \mathbb{0}$. •

(v) Sei $\mu^2 v_{i_2 j_2} \neq \mathbb{0}$ und $I(a, j_2) = \mathbb{1}$. Dann $[\Phi(\mathbf{pre}ua)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right) = [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right)$.

<u>*Beweis*</u>. Aus $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0}$ folgt $\overleftarrow{\alpha}(j_2) = \alpha(v)$. Ist $v \neq \varepsilon$, dann folgt aus $I(a, j_2) = \mathbb{1}$, dass $a \in C$ und damit $\mathbf{pre}u = \mathbf{pre}ua$. Ist dagegen $v = \varepsilon$, gilt offensichtlich $[\Phi(\mathbf{pre}ua)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right) = [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right)$. •

(vi) Sei $\mu^1 u_{i_1 j_1} \neq \mathbb{0}$ und $H_j \neq \mathbb{0}$ und $\varphi = \chi$. Dann ist $H_i = \mathbb{1}$.

<u>*Beweis*</u>. $\lambda^2(i_2) \neq \mathbb{0}$ impliziert $\overleftarrow{\alpha}(i_2) = \emptyset$. Also ist $H_i = \mathbb{1} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \emptyset \Rightarrow \psi^1(i_1) = \varphi\right)$. Sei nun also $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \emptyset$, dann ist $u = \varepsilon$ und somit $i_1 = j_1$. Da $H_j = \mathbb{1}$, ist also auch $H_i = \mathbb{1}$. •

(vii) Sei $\gamma^1(j_1) \neq \mathbb{0}$ und $\mu^1 u_{i_1 j_1} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $H_j = \mathbb{1} \Leftrightarrow \chi = \Phi(\mathbf{suf}u)$.

<u>*Beweis*</u>. $\gamma^1(j_1) \neq \mathbb{0}$ impliziert $\overrightarrow{\alpha}(j_1) = \emptyset$. Also $H_j = \mathbb{1} \Leftrightarrow \chi = \psi^1(j_1)$. Da $\mu^1 u_{i_1 j_1} \neq \mathbb{0}$ und $\lambda^1(i_1) \neq \mathbb{0}$, ist $\psi^1(j_1) = \Phi(\mathbf{suf}u)$. •

Wir beweisen nun den Induktionsschritt für eine Spur $wa$.

$$
\begin{aligned}
\mu wa_{ij} &= \sum_{k \in Q} \mu w_{ik} \Phi(w) \mu a_{kj} = \\
&= \sum_{k \in Q} H_i H_k \delta_{\varphi,\pi} \sum_{uv=w} \mu^1 u_{i_1 k_1} [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 k_2}\right) \Phi(w) \left(H_k H_j \left[\tilde{\mu}(a)_{kj} + \hat{\mu}(a)_{kj}\right]\right) \\
&= H_i H_j \delta_{\varphi,\chi} \sum_{uv=w} \sum_{k,\pi=\varphi} H_k \mu^1 u_{i_1 k_1} [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 k_2}\right) \\
&\quad \cdot \Phi(w) \left(\delta_{k_2,j_2} \psi^2(j_2)^{-1}(\mu^1 a_{k_1 j_1}) + \delta_{k_1,j_1}\left[\psi^2(k_2)^{-1}\psi^1(j_1)^{-1}\varphi\psi^2(k_2)\right](\mu^2 a_{k_2 j_2})\right) \\
&= H_i H_j \delta_{\varphi,\chi} \sum_{uv=w} \sum_{k,\pi=\varphi} H_k \delta_{k_2,j_2} \mu^1 u_{i_1 k_1} \left[\Phi(w)\psi^2(j_2)^{-1}\right](\mu^1 a_{k_1 j_1}) [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right) \\
&\quad + \sum_{k,\pi=\varphi} H_k \delta_{k_1,j_1} \mu^1 u_{i_1 j_1} [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 k_2}\right) \left[\Phi(w)\psi^2(k_2)^{-1}\psi^1(j_1)^{-1}\varphi\psi^2(k_2)\right](\mu^2 a_{k_2 j_2}) \\
&\overset{\text{(i),(ii)}}{=} H_i H_j \delta_{\varphi,\chi} \sum_{uv=w} \sum_{k_1} I(a, j_2) \mu^1 u_{i_1 k_1} \left[\Phi(w)\psi^2(j_2)^{-1}\right](\mu^1 a_{k_1 j_1}) [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 j_2}\right) \\
&\quad + \sum_{k_2} \mu^1 u_{i_1 j_1} [\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi]\left(\mu^2 v_{i_2 k_2}\right) \left[\Phi(w)\psi^2(k_2)^{-1}\psi^1(j_1)^{-1}\varphi\psi^2(k_2)\right](\mu^2 a_{k_2 j_2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(iii)}}{=} \quad H_iH_j\delta_{\varphi,\chi}\sum_{uv=w}\sum_{k_1} I(a,j_2)\mu^1u_{i_1k_1}\left[\Phi(u)\right]\left(\mu^1a_{k_1j_1}\right)\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2v_{i_2j_2}\right)\\
&\qquad + \sum_{k_2}\mu^1u_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2v_{i_2k_2}\right)\left[\Phi(w)\psi^2(k_2)^{-1}\psi^1(j_1)^{-1}\varphi\psi^2(k_2)\right]\left(\mu^2a_{k_2j_2}\right)\\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \quad H_iH_j\delta_{\varphi,\chi}\sum_{uv=w}\sum_{k_1} I(a,j_2)\mu^1u_{i_1k_1}\left[\Phi(u)\right]\left(\mu^1a_{k_1j_1}\right)\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2v_{i_2j_2}\right)\\
&\qquad + \sum_{k_2}\mu^1u_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2v_{i_2k_2}\right)\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\Phi(v)\right]\left(\mu^2a_{k_2j_2}\right)\\
&= \quad H_iH_j\delta_{\varphi,\chi}\sum_{uv=w} I(a,j_2)\mu^1ua_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2v_{i_2j_2}\right)+\mu^1u_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2va_{i_2j_2}\right)\\
&\overset{\text{(v)}}{=} \quad H_iH_j\delta_{\varphi,\chi}\sum_{uv=w} I(a,j_2)\mu^1ua_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}ua)\varphi\right]\left(\mu^2v_{i_2j_2}\right)+\mu^1u_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\left(\mu^2va_{i_2j_2}\right)\\
&\overset{\text{Lem.1.7}}{=} H_iH_j\delta_{\varphi,\chi}\sum_{u'v'=wa}\mu^1u'_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u')\varphi\right]\left(\mu^2v'_{i_2j_2}\right)
\end{aligned}
$$

Das beweist die Behauptung.

Wir können nun den Beweis abschließen, indem wir zeigen, dass $(Q,\lambda,\mu,\gamma)$ tatsächlich eine $\Phi$–Darstellung für $S\odot_\Phi T$ ist.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\lambda(i)\mu w_{ij}\gamma(j) =\\
&\quad = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}\sum_{\varphi,\chi}\delta_{\varphi,\chi}\lambda^1(i_1)\lambda^2(i_2)H_iH_j\sum_{uv=w}\mu^1u_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\varphi\right]\mu^2v_{i_1j_2}\gamma^1(j_1)\gamma^2(j_2)\\
&\quad \overset{\text{(vi)}}{=} \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}\sum_{\chi}\lambda^1(i_1)\lambda^2(i_2)H_j\sum_{uv=w}\mu^1u_{i_1j_1}\left[\Phi(\mathbf{pre}u)\chi\right]\mu^2v_{i_1j_2}\gamma^1(j_1)\gamma^2(j_2)\\
&\quad \overset{\text{(vii)}}{=} \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}\lambda^1(i_1)\lambda^2(i_2)\sum_{uv=w}\mu^1u_{i_1j_1}\Phi(u)\mu^2v_{i_1j_2}\gamma^1(j_1)\gamma^2(j_2)\\
&\quad = \sum_{uv=w}\sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}\lambda^1(i_1)\mu^1u_{i_1j_1}\gamma^1(j_1)\lambda^2(i_2)\Phi(u)\mu^2v_{i_1j_2}\gamma^2(j_2)\\
&\quad = (S\odot_\Phi T,w)
\end{aligned}
$$

Beachte, dass $\lambda^2(i_2),\gamma^1(j_1),\gamma^2(j_2)\in\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$.

Für $\varepsilon$ rechnen wir ähnlich:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j}\lambda(i)\mu\varepsilon_{ij}\gamma(j) &= \sum_{i}\lambda(i)\mu\varepsilon_{ii}\gamma(i) = \sum_{i_1,i_2,\varphi}\lambda^1(i_1)\lambda^2(i_2)\mu^1\varepsilon_{i_1i_1}\mu^2\varepsilon_{i_2i_2}\gamma^1(i_1)\gamma^2(i_2)\\
&= \sum_{\varphi}(S,\varepsilon)(T,\varepsilon) = \mathbb{0} = (S\odot_\Phi T,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Damit ist Satz 2.2 bewiesen. ∎

Zu den Voraussetzungen machen wir folgende Bemerkungen:

*Bemerkung 2.10* Im Satz 2.2 haben wir uns auf quasireguläre Reihen beschränkt um Darstellungen der Reihen wie in Lemma 2.9 nutzen zu können, die es uns erlauben die Einstiegs– und Ausstiegskosten zu ignorieren.

Die klassischen Kleene–Schützenberger Theoreme kommen ohne diese Einschränkung aus. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir sehen, dass man auch in unserem Fall diese Einschränkung leicht aufheben kann.

*Bemerkung 2.11* Betrachten wir für eine Spur $u$ ein Wort $w \in u$, das auf dem konstruierten Automaten abgearbeitet wird. Wie gezeigt wird eine Aktion entweder auf $\mathcal{A}_1$ oder auf $\mathcal{A}_2$ abgearbeitet. Sei der Automat im Zustand $i$ zu einem Zeitpunkt, zu dem schon $u_1$ auf $\mathcal{A}_1$ und $u_2$ auf $\mathcal{A}_2$ abgearbeitet wurde.

(Seien außerdem $H_i \neq \mathbb{0}$ und $\overleftarrow{\alpha}(i_1) = \alpha(u_1), \overleftarrow{\alpha}(i_2) = \alpha(u_2)$ und $\psi^1(i_1) = \Phi(\mathbf{suf}\, u_1), \psi^2(i_2) = \Phi(\mathbf{suf}\, u_2)$. )

Liest der Automat nun $a$ und wechselt in Zustand $j$, so möchten wir, dass folgende Kosten entstehen:

(a) Wenn $a \in \overrightarrow{\alpha}(i_1)$: $\Phi(u_1)\mu^1 a_{i_1 j_1}$.

(b) Wenn $a \notin \overrightarrow{\alpha}(i_1) \neq \emptyset$: $\Phi(\mathbf{pre}\, u_1)\varphi\Phi(u_2)\mu^2 a_{i_2 j_2}$.
(Intuitiv: Auf $\mathcal{A}_1$ werden danach nur noch Elemente aus $C$ bearbeitet)

(c) Wenn $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \emptyset$: $\Phi(u_1)\Phi(u_2)\mu^2 a_{i_2 j_2}$.

Da die Aktion aber zum Zeitpunkt stattfindet zu dem $u_1 u_2$ schon gelesen wurde, entstehen tatsächlich Kosten von $\Phi(u_1 u_2)\mu a_{ij}$. Es soll also sein:

(a) Im Fall (a): $\Phi(u_2)\mu a_{ij} = \mu^1 a_{i_1 j_1} \Leftrightarrow \psi^2(i_2)\mu a_{ij} = \mu^1 a_{i_1 j_1}$.

(b) Im Fall (b): $\Phi(\mathbf{suf}\, u_1)\Phi(u_2)\mu a_{ij} = \varphi\Phi(u_2)\mu^2 a_{i_2 j_2} \Leftrightarrow \psi^1(i_1)\psi^2(i_2)\mu a_{ij} = \varphi\psi^2(i_2)\mu^2 a_{i_2 j_2}$.

(c) Im Fall (c): $\mu a_{ij} = \mu^2 a_{i_2 j_2}$.

Man sieht, dass man diese Bedingung erfüllen kann, wenn lediglich $\psi^2(i_2)$ und $\varphi$ surjektiv sind. Es scheint also möglich einen Automaten über $\Sigma^*$ so zu konstruieren, dass man nur die Surjektivität fordern muss. In der Tat kann man, den Beweis, dass $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ eine $\Phi$–Darstellung von $S \odot_\Phi T$ ist, genau wie oben führen, wenn man nur Surjektivität voraussetzt. Es ist jedoch keineswegs klar, ob man $\mu$ immer so wählen kann, dass es zu einem $\Phi$–Morphismus auf $\mathbb{M}$ faktorisiert.

*Bemerkung 2.12* Man muss sich natürlich auch die Frage stellen, ob die Voraussetzungen in Satz 2.2 überhaupt erfüllbar sind oder ob wir hier einen Satz über die leere Menge bewiesen haben. Wir suchen also endliche Teilmonoide von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ für einen Semiring $\mathbb{K}$. Es gilt:

(i) Ist $\mathbb{K}$ endlich, dann ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}) = \mathrm{Epi}(\mathbb{K})$ endlich. Indem man die Automorphismen in die Zustände kodiert, kann man aber in diesem Fall zeigen, dass

$$\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle = \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle = \mathbb{K}^{\mathrm{rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle\,.$$

(ii) Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}) = \mathrm{Epi}(\mathbb{K})$. Weiter gilt siehe [DG97]:
*Sei $G$ eine Gruppe und $\lambda$ eine beliebige unendliche Kardinalzahl größer gleich $|\mathbb{K}| \cdot |G|$. Dann gibt es eine Körpererweiterung $F$ von $\mathbb{K}$ mit $\mathrm{Aut}(F) = G$ und $\lambda = |F|$.*

(iii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und bezeichne conj die Konjugation komplexer Zahlen, dann ist $\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{conj}\}$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

## 2.3 Kleene–Iteration

Wir zeigen im folgenden Abschnitt, dass die $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen unter bestimmten Voraussetzungen abgeschlossen sind unter der $*$–Iteration, angewendet auf Potenzreihen, die quasiregulär, monoalphabetisch und zusammenhängend sind.

Um zu zeigen, dass die $\Phi$–erkennbaren Potenzreihen abgeschlossen sind unter Kleene–Iteration, normalisiert man im klassischen Fall einen Automaten so, dass er noch genau einen initialen und einen finalen Zustand hat. Dies geht mit erweiterten Darstellungen nicht so einfach, da ein Finalzustand $i$ die zusätzliche Information $\overleftarrow{\alpha}(i)$ und $\psi(i)$ trägt. Ist die Reihe monoalphabetisch, so ist $\overleftarrow{\alpha}(i)$ für alle relevanten, d. h. erreichbaren finalen Zustände gleich. Für die Information $\psi(i)$ gilt dies jedoch nicht. Wir werden den Automaten deshalb so normalisieren, dass er genau einen initialen Zustand hat und für jedes $\varphi \in \mathbb{M}(C, I)$ einen finalen Zustand $i$ mit $\psi(i) = \varphi$.

**Definition 2.13** Eine erweiterte $\Phi$–Darstellung $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi)$ ist *normalisiert*, falls Folgendes gilt:

- Es existiert genau ein initialer Zustand 1 mit $\lambda(1) = \mathbb{1}$.
- $i$ ist final genau dann, wenn $\gamma(i) = \mathbb{1}$.
- Es existiert eine Abbildung $F : \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \to Q$, sodass für alle $i \in Q$ und $\varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I))$ gilt
$$F(\varphi) = i \Leftrightarrow i \text{ ist final und } \psi(i) = \varphi.$$

Dann nennen wir $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi, F)$ *normalisierte erweiterte $\Phi$–Darstellung.*

*Bemerkung 2.14* Bei einer normalisierten erweiterten $\Phi$–Darstellung haben wir also nur einen initialen Zustand und zusätzlich eine Bijektion $F$ zwischen $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ und der Menge der finalen Zustände. D. h. wir haben für jedes $\varphi \in \mathbb{M}(C, I)$ genau einen finalen Zustand $i$ mit $\psi(i) = \varphi$.

Beachte außerdem: Sei $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi, F)$ eine normalisierte erweiterte $\Phi$–Darstellung einer formalen Potenzreihe $S$. Dann gilt: Aus $\mu u_{1i} \neq \mathbb{0}$ folgt $\psi(i) = \Phi(\mathbf{suf}u)$. Also gilt $\mu u_{1i}\gamma(i) \neq \mathbb{0}$ impliziert $i = F(\Phi(\mathbf{suf}u))$. Und damit bekommen wir $(S, u) = \mu u_{1F(\Phi(\mathbf{suf}u))}$.

**Lemma 2.15 (vgl. [DG99, Proposition 9])** *Sei $S \in \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ eine monoalphabetische Potenzreihe. Sei weiter $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ endlich. Dann gibt es eine normalisierte erweiterte $\Phi$–Darstellung von $S$ mit $\overrightarrow{\alpha}(1) = \alpha(S)$ und $\overleftarrow{\alpha}(F(\varphi)) = \alpha(S)$ für alle $\varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I))$.*

<u>Beweis</u>. Sei $A := \alpha(S)$. Sei weiter $(Q, \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi)$ eine erweiterte $\Phi$–Darstellung von $S$. Offensichtlich ist dann

$$(S, u) = \sum_{\substack{i, \overrightarrow{\alpha}(i)=A \\ \overleftarrow{\alpha}(i)=\emptyset}} \sum_{\substack{j, \overrightarrow{\alpha}(j)=\emptyset \\ \overleftarrow{\alpha}(j)=A, \psi(j)=\Phi(\mathbf{suf}u)}} \lambda(i)\mu u_{ij}\gamma(j).$$

Motiviert durch diese Beobachtung definieren wir folgende Mengen:

$$I := \{i \in Q \mid \overrightarrow{\alpha}(i) = A, \overleftarrow{\alpha}(i) = \emptyset\}$$
$$J_\varphi := \{j \in Q \mid \overrightarrow{\alpha}(j) = \emptyset, \overleftarrow{\alpha}(j) = A \text{ und } \psi(j) = \varphi\} \qquad \text{für alle } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)).$$

Wir definieren $Q' := Q \uplus \{1\} \uplus \{f_\varphi \mid \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I))\}$ und setzen

$$\begin{array}{llllll}
\overrightarrow{\alpha}'(1) = A & \overleftarrow{\alpha}'(1) = \emptyset & \psi'(1) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}} & \lambda'(1) = \mathbb{1} & \gamma'(1) = \mathbb{0} & \\
\overrightarrow{\alpha}'(f_\varphi) = \emptyset & \overleftarrow{\alpha}'(f_\varphi) = A & \psi'(f_\varphi) = \varphi & \lambda'(f_\varphi) = \mathbb{0} & \gamma'(f_\varphi) = \mathbb{1} & \text{für alle } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \\
\overrightarrow{\alpha}'(i) = \overrightarrow{\alpha}(i) & \overleftarrow{\alpha}'(i) = \overleftarrow{\alpha}(i) & \psi'(i) = \psi(i) & \lambda'(i) = \mathbb{0} & \gamma'(i) = \mathbb{0} & \text{für alle } i \in Q.
\end{array}$$

Weiter definieren wir für ein $u \in \mathbb{M}$ mit $u \neq \varepsilon$ und $i, j \in Q'$:

$$\mu' u_{ij} := \begin{cases} \mu u_{ij} & ;\text{falls } i, j \in Q \\ \sum\limits_{p \in I} \lambda(p)\mu u_{pj} & ;\text{falls } i = 1 \text{ und } j \in Q \\ \sum\limits_{q \in J_\varphi} \mu u_{iq}\Phi(u)\gamma(q) & ;\text{falls } i \in Q \text{ und } j = f_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \\ \sum\limits_{p \in I, q \in J_\varphi} \lambda(p)\mu u_{pq}\Phi(u)\gamma(q) & ;\text{falls } i = 1 \text{ und } j = f_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

und setzten $\mu'\varepsilon := \mathbf{E} \in \mathbb{K}^{|Q'| \times |Q'|}$. Offensichtlich ist dann $(\mu'\varepsilon\Phi(\varepsilon)\mu'v)_{ij} = (\mu'\varepsilon v)_{ij} = (\mu' v\varepsilon)_{ij} = (\mu' v\Phi(v)\mu'\varepsilon)_{ij}$ für alle $v \in \mathbb{M}$ und $i, j \in Q'$. Sei nun $u, v \neq \varepsilon$. Wir rechnen:

$$(\mu' u\Phi(u)\mu' v)_{ij} = \sum_{k \in Q'} \mu' u_{ik}\Phi(u)\mu' v_{kj} = \sum_{k \in Q} \mu' u_{ik}\Phi(u)\mu' v_{kj} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_k \mu u_{ik}\Phi(u)\mu v_{kj} & ;\text{falls } i, j \in Q \\ \sum\limits_k \sum\limits_{p \in I} \lambda(p)\mu u_{pk}\Phi(u)\mu v_{kj} & ;\text{falls } i = 1 \text{ und } j \in Q \\ \sum\limits_k \sum\limits_{q \in J_\varphi} \mu u_{ik}\Phi(u)\left(\mu v_{kq}\Phi(v)\gamma(q)\right) & ;\text{falls } i \in Q \text{ und } j = f_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \\ \sum\limits_k \sum\limits_{p \in I, q \in J_\varphi} \lambda(p)\mu u_{pk}\Phi(u)\left(\mu v_{kq}\Phi(v)\gamma(q)\right) & ;\text{falls } i = 1 \text{ und } j = f_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu uv_{ij} & ;\text{falls } i,j \in Q \\ \sum_{p\in I} \lambda(p)\mu uv_{pj} & ;\text{falls } i = 1 \text{ und } j \in Q \\ \sum\limits_{q\in J_\varphi} \mu uv_{iq}\Phi(uv)\gamma(q) & ;\text{falls } i \in Q \text{ und } j = f_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C,I)) \\ \sum\limits_{p\in I, q\in J_\varphi} \lambda(p)\mu uv_{pq}\Phi(uv)\gamma(q) & ;\text{falls } i = 1 \text{ und } j = f_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C,I)) \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$
$$= \mu' uv_{ij}$$

$\mu'$ ist also ein $\Phi$–Morphismus.

Ist $\lambda(p) \neq \mathbb{0}$ und $\mu u_{pq} \neq \mathbb{0}$ , dann folgt $\psi(q) = \Phi(\mathbf{suf}u)$. Mit dieser Überlegung bekommen wir für alle $u \in \mathbb{M}$

$$\sum_{i,j} \lambda'(i)\mu u'_{ij}\gamma'(j) = \sum_{\varphi} \lambda'(1)\mu u'_{1f_\varphi}\gamma(f_\varphi) = \sum_{\varphi} \mu' u_{1f_\varphi} = \sum_{\varphi} \sum_{p\in I, q\in J_\varphi} \lambda(p)\mu u_{pq}\Phi(u)\gamma(q)$$
$$= \sum_{p\in I, q\in J_{\Phi(\mathbf{suf}u)}} \lambda(p)\mu u_{pq}\Phi(u)\gamma(q) = (S,u).$$

Wir definieren jetzt $F : \Phi(\mathbb{M}(C,I)) \to Q$ durch $F(\varphi) = f_\varphi$. Man sieht nun leicht, dass $(Q', \lambda', \mu', \gamma', \overrightarrow{\alpha}', \overleftarrow{\alpha}', \psi', F)$ eine normalisierte erweiterte $\Phi$–Darstellung von $S$ ist. ∎

**Satz 2.3** *Sei $\mathbb{K}$ kommutativ und $S \in \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ quasiregulär, monoalphabetisch und zusammenhängend. Sei weiter $\Phi(\mathbb{M}(C,I))$ endlich und $\varphi$ bijektiv für alle $\varphi \in \Phi(\mathbb{M}(C,I))$. Dann ist $S^*$ $\Phi$–erkennbar.*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage mittels einer Automatenkonstruktion ähnlich der in [DG99, Theorem 10]

Sei o. B. d. A. $S \neq \mathbf{0}$, denn $\mathbf{0}^* = \mathbf{1}_\varepsilon$ ist $\Phi$–erkennbar. Wir setzen $A := \alpha(S)$.

Sei $\mathcal{A} = (Q', \lambda, \mu, \gamma, \overleftarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha}, \psi, F)$ eine normalisierte erweiterte $\Phi$–Darstellung von $S$, wobei 1 den eindeutig bestimmten initialen Zustand bezeichnet. Seien alle Zustände erreichbar.

Versucht man die Konstruktion aus Satz 2.2 für $S^m$ zu machen, braucht man $m$ parallele Kopien von $\mathcal{A}$. Versucht man die Automatenkonstruktion auf $S^*$ zu übertragen, scheint die Anzahl benötigter Kopien zunächst unbeschränkt zu sein. Im klassischen Fall können Droste und Gastin in [DG99, Lemma 13] zeigen, dass man mit $|A|$ Kopien auskommt, wenn man sich auf monoalphabetische und zusammenhängende Reihen beschränkt.

Für $m := \max(2, |A|)$ definieren wir $Q := [Q' \times \Phi(\mathbb{M}(C,I))]^m$. Im Weiteren bezeichnen $\tilde{\imath} := (i_1, \vartheta_1 \cdots, i_m, \vartheta_m)$, $\tilde{\jmath} := (j_1, \iota_1 \cdots, j_m, \iota_m)$ und $\tilde{k} := (k_1, \kappa_1 \cdots, k_m, \kappa_m)$ Elemente aus $Q$.

Außerdem kürzen wir folgendermaßen ab: $\vartheta_{l_1,l_2} := \prod_{l=l_1}^{l_2} \vartheta_l$, $\iota_{l_1,l_2} := \prod_{l=l_1}^{l_2} \iota_l$, $\kappa_{l_1,l_2} := \prod_{l=l_1}^{l_2} \kappa_l$, $\Psi(\tilde{\imath})_{l_1,l_2} := \prod_{l=l_1}^{l_2} \psi(i_l)$. Analog für $\Psi(\tilde{k})_{l_1,l_2}$ und $\Psi(\tilde{\jmath})_{l_1,l_2}$.

Wir definieren Abbildungen $\mu^0, \cdots, \mu^m : \Sigma \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ durch

$$\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} := \begin{cases} \Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{2,m} \mu a_{i_1 F(\vartheta_2)} & ; \text{falls } \vartheta_2 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, a) \text{ und} \\ & \quad \tilde{\jmath} = (i_2, \vartheta_2, \cdots, i_m, \vartheta_m, 1, \iota) \;\; \text{für ein } \iota \in \Phi(\mathbb{M}(C, I)) \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

und für $1 \leq p \leq m$

$$\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} := \begin{cases} \left[\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{1,m} \vartheta_{2,p} \psi(i_p)\right] \mu a_{i_p j_p} & ; \text{falls } i_l = j_l \text{ für alle } l \neq p \text{ und } \vartheta_l = \iota_l \text{ für alle } l \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Für $1 \leq p \leq m$ beschreibt $\mu^p$ eine Aktion auf der $p$–ten Kopie von $\mathcal{A}$. $\mu^0$ dagegen beschreibt eine Art Verschiebung, die die erste Kopie beendet und eine neue an letzter Stelle startet.

Wir definiere weiter:

$$H_{\tilde{\imath}} := \begin{cases} \mathbb{1} & ; \text{falls } \overrightarrow{\alpha}(i_p) \cup \overleftarrow{\alpha}(i_p) = A \text{ für alle } p, \\ & \quad \overrightarrow{\alpha}(i_1) \neq \emptyset \text{ und } \overrightarrow{\alpha}(i_p) I \overleftarrow{\alpha}(i_q) \text{ für alle } p < q \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $H \in \mathbb{K}^{Q\times Q}$ definiert durch $H_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} = H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}}$. Wir definieren nun $\mu^* : \Sigma \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ durch:

$$\mu^* := H \boxdot (\mu^0 + \cdots + \mu^m),$$

wobei $\boxdot$ das punktweise Produkt von Matrizen bezeichnet. Wir setzen $\mu^*$ auf $\Sigma^*$ zu einem $\Phi$–Morphismus fort.

Wir definieren nun noch $\lambda^*$ und $\gamma^*$:

$$\lambda^*(\tilde{\imath}) := \begin{cases} \mathbb{1} & ; \text{falls } i_p = 1 \text{ für alle } p \text{ und } \vartheta_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma^*(\tilde{\jmath}) := \begin{cases} \mathbb{1} & ; \text{falls } j_p = 1 \text{ für alle } p \text{ und } \iota_p = \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \text{ für alle } p > 1 \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir werden zeigen, dass $(Q, \lambda^*, \mu^*, \gamma^*)$ ein gewichteter $\Phi$–Automat ist, der $S^*$ erkennt.

Intuitiv besteht die Konstruktion aus $m$ parallel aktiven Kopien von $\mathcal{A}$, wobei $i_p$ den Zustand der $p$–ten Kopie in $\tilde{\imath}$ repräsentiert. $H$ stellt sicher, dass man, wie bei der Konstruktion in Satz 2.2, nur auf der $j$-ten Kopie arbeitet, wenn die Operation unabhängig ist von den Aktionen, die auf den Kopien $j+1, \cdots, m$ schon bearbeitet wurden. Wurde die erste Kopie beendet, so findet mittels $\mu^0$ ein Verschiebung aller Kopien um eins nach vorn statt und eine neue Kopie von $\mathcal{A}$ wird gestartet. Mit $\vartheta_p$ „rät“ der Automat das Bild unter $\Phi$ von **suf** des Wortes das auf der Kopie $p-1$ abgearbeitet wurde. Bei jedem Verschiebung wird die Wahl der momentan zweiten aktiven Kopie überprüft.

Wir zeigen die beiden folgenden Lemma, aus denen der Satz 2.3 folgt:

**Lemma 2.16** *Es gilt $\mu^*ab = \mu^*ba$ für alle $a, b \in \Sigma$ mit $aIb$.*

Also faktorisiert $\mu^*$ zu einem $\Phi$–Morphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{K}^{Q\times Q}$.

**Lemma 2.17** *Es ist $(Q, \lambda^*, \mu^*, \gamma^*)$ eine $\Phi$–Darstellung von $S^*$.*

Um diese beiden Lemmata zu zeigen, beginnen wir mit einigen technischen Resultaten. Das folgenden Lemma zeigt, dass nur die ersten $|A| - 1$ Kopien wirklich aktiv sind. Man kann sich also in der Tat auf $m$ Kopien beschränken. Wie schon Droste und Gastin bemerken zeigt das Lemma, dass die $|A|$–te Kopie von $\mathcal{A}$ nicht benutzt wird. Es sollte also möglich sein die Konstruktion auch mit nur $|A| - 1$ Kopien von $\mathcal{A}$ zu machen. Die Konstruktion wird dann allerdings technisch noch anspruchsvoller.

**Lemma 2.18 ([DG99, Lemma 13])** *Sei $H_{\tilde{\imath}} \neq \mathbb{0}$. Dann ist:*

1. $\emptyset = \overleftarrow{\alpha}(i_m) \subseteq \cdots \subseteq \overleftarrow{\alpha}(i_2) \subseteq \overleftarrow{\alpha}(i_1)$.
2. $\emptyset \neq \overrightarrow{\alpha}(i_1) \subseteq \overrightarrow{\alpha}(i_2) \subseteq \cdots \subseteq \overrightarrow{\alpha}(i_m)$.

**Lemma 2.19 (vgl. [DG99, Lemma 14])** *Sei $a, b \in \Sigma$ mit $aIb$. Dann gilt für alle $\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}$ und $p, q$:*

$$H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^q b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0} \Longrightarrow H_{\tilde{k}} = \mathbb{1}$$

<u>*Beweis*</u>. Der Beweis geht analog zum Beweis von Lemma 14 in [DG99]. An einigen Stellen muss jedoch mit $\Phi$ argumentiert werden. Wir geben ihn deshalb hier an.

Sei also $H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^q b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$.

Wir betrachten zunächst den Fall $p = 0$. Da $\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \neq \mathbb{0}$, ist $\tilde{k} = (i_2, \vartheta_2, \cdots, i_m, \vartheta_m, 1, \kappa)$ für ein $\kappa \in \Phi(\mathbb{M}(C, I))$. Da $H_{\tilde{\imath}} \neq \mathbb{0}$, folgt aus Lemma 2.18 $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(i_2) \neq \emptyset$. Außerdem ist $\overrightarrow{\alpha}(k_m) \cup \overleftarrow{\alpha}(k_m) = A \cup \emptyset = A$. Für alle $l < m$ bekommen wir $\overrightarrow{\alpha}(k_l) I \emptyset = \overleftarrow{\alpha}(k_m)$. Also ist $H_{\tilde{k}} = \mathbb{1}$.

Sei nun $p \geq 1$. Da $H_{\tilde{\imath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \neq \mathbb{0}$, bekommen wir $k_l = i_l$ für alle $l \neq p$. Weiter gilt $\overleftarrow{\alpha}(k_p) = \overleftarrow{\alpha}(i_p) \cup \{a\}$ und $\overrightarrow{\alpha}(i_p) = \overrightarrow{\alpha}(k_p) \cup \{a\}$. Also gilt $\overrightarrow{\alpha}(k_l) \cup \overleftarrow{\alpha}(k_l) = \overrightarrow{\alpha}(i_l) \cup \overleftarrow{\alpha}(i_l) = A$ für alle $l \neq p$ und außerdem

$$\overleftarrow{\alpha}(k_p) \cup \overrightarrow{\alpha}(k_p) = \overleftarrow{\alpha}(i_p) \cup \{a\} \cup \overrightarrow{\alpha}(k_p) = \overleftarrow{\alpha}(i_p) \cup \overrightarrow{\alpha}(i_p) = A.$$

Damit ist die erste Bedingung von $H_{\tilde{k}} = \mathbb{1}$ gezeigt.

Sei jetzt zusätzlich $q = 0$. Aus $\mu^0 b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ folgern wir $\tilde{\jmath} = (k_2, \kappa_2, \cdots, k_m, \kappa_m, 1, \iota)$ für ein $\iota \in \Phi(\mathbb{M}(C, I))$ und $\mu b_{k_1 F(\mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(k_1, b))} \neq \mathbb{0}$. Damit gilt $\overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(F(\mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(k_1, b))) \cup \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$. Weiter folgt aus $H_{\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ für alle $1 < l < l'$ dass $\overrightarrow{\alpha}(k_l) = \overrightarrow{\alpha}(j_{l-1}) I \overleftarrow{\alpha}(j_{l'-1}) = \overleftarrow{\alpha}(k_{l'})$.

Außerdem folgt aus $\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \neq \mathbb{0}$, dass $\overleftarrow{\alpha}(k_l) \subseteq \overleftarrow{\alpha}(i_l) \cup \{a\}$ für $l > 1$ und $\{b\} = \overrightarrow{\alpha}(k_1) \subseteq \overrightarrow{\alpha}(i_1)$. Nun können wir mit $H_{\tilde{\imath}} \neq \mathbb{0}$ und $aIb$ folgern, dass $\overrightarrow{\alpha}(k_1) I \overleftarrow{\alpha}(k_l)$ für $l > 1$ und damit folgt die Behauptung für $p \geq 1$ und $q = 0$.

Es bleibt nur noch der Fall $p \geq 1$ und $q \geq 1$ zu zeigen. Es gilt $\emptyset \neq \overrightarrow{\alpha}(j_1) \subseteq \overrightarrow{\alpha}(k_1)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha}(k_l) &= \overrightarrow{\alpha}(j_l) I \overleftarrow{\alpha}(j_{l'}) \supseteq \overleftarrow{\alpha}(k_{l'}) && \text{für alle } q \neq l < l' \\ \overrightarrow{\alpha}(k_l) &\subseteq \overrightarrow{\alpha}(i_l) I \overleftarrow{\alpha}(i_{l'}) = \overleftarrow{\alpha}(k_{l'}) && \text{für alle } l < l' \neq q. \end{aligned}$$

Es bleibt folglich nur noch $\overrightarrow{\alpha}(k_q) I \overleftarrow{\alpha}(k_p)$ für $q < p$ zu zeigen. Dies bekommen wir mit $aIb$, da

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha}(k_q) &= \overrightarrow{\alpha}(j_q) \cup \{b\} = \overrightarrow{\alpha}(i_q) I \overleftarrow{\alpha}(i_p) \\ \overleftarrow{\alpha}(k_p) &= \overleftarrow{\alpha}(i_p) \cup \{a\} = \overleftarrow{\alpha}(j_p) I \overrightarrow{\alpha}(j_q) \end{aligned}$$

•

Bevor wir mit dem Beweis von Lemma 2.16 beginnen, machen wir zunächst die folgenden Beobachtungen:

**Lemma 2.20**

(a) Sei $H_{\tilde{\imath}} = \mathbb{1}$ und $\mu a_{i_p k_p} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\Psi(\tilde{\imath})_{p+1,m} \Phi(a) = \Phi(a) \Psi(\tilde{\imath})_{p+1,m}$.

*Beweis.* Sei $p + 1 \leq l \leq m$. Da $i_l$ erreichbar ist, gibt es ein $u \in \mathbb{M}$ mit $\mu u_{1 i_l} \neq \mathbb{0}$. Daraus folgt, dass $\psi(i_l) = \Phi(\mathbf{suf} u)$ und $\overleftarrow{\alpha}(i_l) = \alpha(u)$. Es ist jedoch $H_{\tilde{\imath}} \neq \mathbb{0}$ und damit $\overrightarrow{\alpha}(i_p) I \overleftarrow{\alpha}(i_l)$. Wir bekommen also $a \in \overrightarrow{\alpha}(i_p) I \overleftarrow{\alpha}(i_l) = \alpha(u)$ und damit $ua = au$. Es folgt also für alle $p + 1 \leq l \leq m$, dass $\Phi(a)\psi(i_l) = \psi(i_l)\Phi(a)$ und somit folgt die Behauptung. •

(b) Sei $a, b \in \Sigma$ mit $aIb$ und $\mu a_{i_p k_p} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\psi(k_p) = \psi(i_p) \circ \Phi(a)$

(c) Sei $a, b \in \Sigma$ mit $aIb$ und $\mu b_{i_1 F(\vartheta_2))} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\psi(i_1)^{-1}\vartheta_2 = \Phi(b)$.

*Beweis.* Wir haben $\vartheta_2 = \psi(F(\vartheta_2)) = \psi(i_1) \circ \Phi(b)$ und damit $\psi(i_1)^{-1}\vartheta_2 = \Phi(b)$. •

Weiter zeigen wir:

**Lemma 2.21 (vgl. [DG99, Lemma 15])** *Sei $a, b \in \Sigma$ mit $aIb$, dann gilt:*

$$H \boxdot \mu^m b = \mathbb{0} \tag{2.7}$$

$$(H \boxdot \mu^0 a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^0 b) = \mathbb{0} \tag{2.8}$$

$$(H \boxdot \mu^1 a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^0 b) = (H \boxdot \mu^1 b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^0 a) \tag{2.9}$$

$$(H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^q b) = (H \boxdot \mu^q b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^p a) \qquad \text{für } p, q \geq 1 \tag{2.10}$$

$$(H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^0 b) = (H \boxdot \mu^0 b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^{p-1} a) \qquad \text{für } p > 1 \tag{2.11}$$

*Beweis.* (2.7) Sei $\mu^m b_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$, dann ist $\overleftarrow{\alpha}(j_m) = \overleftarrow{\alpha}(i_m) \cup \{b\} \neq \emptyset$; also ist nach Lemma 2.18 $H_{\tilde{\jmath}} = \mathbb{0}$.

Für die anderen Fälle machen wir zunächst mit Lemma 2.19 folgende Beobachtung:

$$[(H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^q b)]_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} = \sum_{\tilde{k}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{k}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^q b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} = \sum_{\tilde{k}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^q b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}}$$

(2.8) Sei $\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{k}}\Phi(a)\mu^0 b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \overrightarrow{\alpha}(F(\vartheta_2)) \cup \{a\} = \{a\}$ und $\overrightarrow{\alpha}(i_2) = \overrightarrow{\alpha}(k_1) = \overrightarrow{\alpha}(F(\vartheta_3)) \cup \{b\} = \{b\}$. Also ist nach Lemma 2.18 $H_{\tilde{\imath}} = \mathbb{0}$.

(2.9) Es ist

$$
\begin{aligned}
&\left[(H \boxdot \mu^1 a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^0 b)\right]_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \\
&= \sum_{\tilde{k}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^1 a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^0 b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \\
&= \begin{cases} \sum_{k_1} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{2,m} \mu a_{i_1 k_1} \Phi(a) \Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{2,m} \mu b_{k_1 F(\vartheta_2)} \\ \qquad ; \text{falls } \tilde{\jmath} = (i_2, \vartheta_2, \cdots, i_m, \vartheta_m, 1, \iota) \text{ für ein } \iota \in \Phi(\mathbb{M}(C,I) \text{ und } \vartheta_2 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, ab) \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{2,m} \sum_{k_1} \mu a_{i_1 k_1} \Phi(a) \mu b_{k_1 F(\vartheta_2)} \\ \qquad ; \text{falls } \tilde{\jmath} = (i_2, \vartheta_2, \cdots, i_m, \vartheta_m, 1, \iota) \text{ für ein } \iota \in \Phi(\mathbb{M}(C,I) \\ \qquad\quad \text{und } \vartheta_2 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, ab) = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, ba) \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \left[(H \boxdot \mu^1 b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^0 a)\right]_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}
\end{aligned}
$$

wobei die vorletzte Gleichung aus Lemma 2.20 (a) folgt und die letzte da $\mu ab = \mu ba$.

(2.10) Sei $p = q \geq 1$. Es ist

$$
\begin{aligned}
&[(H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^q b)]_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \\
&= \sum_{\tilde{k}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^p b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \\
&= \begin{cases} \sum_{k_p} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \left[\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{1,m} \vartheta_{2,p} \psi(i_p)\right] \mu a_{i_p k_p} \Phi(a) \left[\Psi(\tilde{\imath})_{1,p-1} \psi(k_p) \Psi(\tilde{\imath})_{p+1,m}\right]^{-1} \vartheta_{2,p} \psi(k_p) \mu b_{k_p j_p} \\ \qquad ; \text{falls } i_l = j_l \text{ für alle } l \neq p \text{ und } \vartheta_l = \iota_l \text{ für alle } l \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \left[\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{1,m} \vartheta_{2,p} \psi(i_p)\right] \sum_{k_p} \mu a_{i_p k_p} \Phi(a) \mu b_{k_p j_p} \\ \qquad ; \text{falls } i_l = j_l \text{ für alle } l \neq p \text{ und } \vartheta_l = \iota_l \text{ für alle } l \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= [(H \boxdot \mu^q b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^p a)]_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}
\end{aligned}
$$

wobei die vorletzte Gleichung aus Lemma 2.20 (a) und (b) folgt.

(2.10) Sei jetzt $p \neq q$. Es ist

$$
\begin{aligned}
&[(H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^q b)]_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \\
&= \sum_{\tilde{k}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{k}} \Phi(a) \mu^q b_{\tilde{k}\tilde{\jmath}} \\
&= \begin{cases} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \left[\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{1,m} \vartheta_{2,p} \psi(i_p)\right] \mu a_{i_p j_p} \Phi(a) \left[\Psi(\tilde{\imath})_{1,p-1} \psi(j_p) \Psi(\tilde{\imath})_{p+1,m}\right]^{-1} \vartheta_{2,q} \psi(i_q) \mu b_{i_q j_q} \\ \qquad ; \text{falls } i_l = j_l \text{ für alle } l \neq p \text{ und } l \neq q \text{ und } \vartheta_l = \iota_l \text{ für alle } l \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} H_{\tilde\imath} H_{\tilde\jmath} \left[\Psi(\tilde\imath)^{-1}_{1,m} \vartheta_{2,q} \psi(i_q)\right] \mu b_{i_q j_q} \Phi(b) \left[\Psi(\tilde\imath)_{1,q-1} \psi(j_q) \Psi(\tilde\imath)_{q+1,m}\right]^{-1} \vartheta_{2,p} \psi(i_p) \mu b_{i_p j_p} \\ \qquad ; \text{falls } i_l = j_l \text{ für alle } l \neq p \text{ und } l \neq q \text{ und } \vartheta_l = \iota_l \text{ für alle } l \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \left[(H \boxdot \mu^q b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^p a)\right]_{\tilde\imath\tilde\jmath}
\end{aligned}
$$

wobei die vorletzte Gleichung aus Lemma 2.20 (a) und (b) folgt und da $\mathbb{K}$ kommutativ ist.

(2.11) Es ist

$$
\begin{aligned}
&\left[(H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^0 b)\right]_{\tilde\imath\tilde\jmath} \\
&= \sum_{\tilde k} H_{\tilde\imath} H_{\tilde\jmath} \mu^p a_{\tilde\imath\tilde k} \Phi(a) \mu^0 b_{\tilde k\tilde\jmath} \\
&= \begin{cases} H_{\tilde\imath} H_{\tilde\jmath} \left[\Psi(\tilde\imath)^{-1}_{1,m} \vartheta_{2,p} \psi(i_p)\right] \mu a_{i_p j_{p-1}} \Phi(a) \left[\Psi(\tilde\imath)_{2,p-1} \psi(j_{p-1}) \Psi(\tilde\imath)_{p+1,m}\right]^{-1} \mu b_{i_1 F(\vartheta_2)} \\ \qquad ; \text{falls } \tilde\jmath = (i_2, \vartheta_2, \cdots, j_{p-1}, \vartheta_p, \cdots i_m, \vartheta_m, 1, \iota) \text{ für ein } \iota \in \Phi(\mathbb{M}(C, I) \\ \qquad\quad \text{und } \vartheta_2 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, b) \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&\stackrel{*}{=} \begin{cases} H_{\tilde\imath} H_{\tilde\jmath} \Psi(\tilde\imath)^{-1}_{2,m} \mu b_{i_1 F(\vartheta_2)} \left[\left[\Psi(\tilde\jmath)_{1,p-2} \psi(i_p) \Psi(\tilde\jmath)_{p,m}\right]^{-1} \Phi(b) \iota_{2,p-1} \psi(i_p)\right] \mu a_{i_p j_{p-1}} \\ \qquad ; \text{falls } \tilde\jmath = (i_2, \vartheta_2, \cdots, j_{p-1}, \vartheta_p, \cdots i_m, \vartheta_m, 1, \iota) \text{ für ein } \iota \in \Phi(\mathbb{M}(C, I) \\ \qquad\quad \text{und } \vartheta_2 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, b) \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&\stackrel{**}{=} \begin{cases} H_{\tilde\imath} H_{\tilde\jmath} \Psi(\tilde\imath)^{-1}_{2,m} \mu b_{i_1 F(\vartheta_2)} \Phi(b) \left[\left[\Psi(\tilde\jmath)_{1,p-2} \psi(i_p) \Psi(\tilde\jmath)_{p,m}\right]^{-1} \iota_{2,p-1} \psi(i_p)\right] \mu a_{i_p j_{p-1}} \\ \qquad ; \text{falls } \tilde\jmath = (i_2, \vartheta_2, \cdots, j_{p-1}, \vartheta_p, \cdots i_m, \vartheta_m, 1, \iota) \text{ für ein } \iota \in \Phi(\mathbb{M}(C, I) \\ \qquad\quad \text{und } \vartheta_2 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, b) \\ \mathbb{0} \qquad ; \text{sonst} \end{cases} \\
&= \sum_{\tilde k} H_{\tilde\imath} H_{\tilde\jmath} \mu^0 b_{\tilde\imath\tilde k} \Phi(a) \mu^{p-1} a_{\tilde k\tilde\jmath} \\
&= \left[(H \boxdot \mu^0 b)\Phi(b)(H \boxdot \mu^{p-1} b)\right]_{\tilde\imath\tilde\jmath}
\end{aligned}
$$

wobei die Gleichung $*$ aus Lemma 2.20 (a), (b) und (c) folgt und da $\mathbb{K}$ kommutativ ist. Die Gültigkeit von $**$ zeigt man wie Lemma 2.20 (a). •

Wir können nun Lemma 2.16 analog zu [DG99] zeigen.

<u>Beweis</u> *(Lemma 2.16).*

$$\mu^* ab = \mu^* a \Phi(a) \mu^* b = \sum_{p,q} (H \boxdot \mu^p a)\Phi(a)(H \boxdot \mu^q b) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p,q\geq 1}(H\boxdot\mu^p a)\Phi(a)(H\boxdot\mu^q b) + \sum_{p>1}(H\boxdot\mu^p a)\Phi(a)(H\boxdot\mu^0 b)\\
&\quad + (H\boxdot\mu^1 a)\Phi(a)(H\boxdot\mu^0 b) + (H\boxdot\mu^0 a)\Phi(a)(H\boxdot\mu^0 b)\\
&\quad + \sum_{1\leq q<m}(H\boxdot\mu^0 a)\Phi(a)(H\boxdot\mu^q b) + (H\boxdot\mu^0 a)\Phi(a)(H\boxdot\mu^m b)\\
&= \sum_{p,q\geq 1}(H\boxdot\mu^q b)\Phi(b)(H\boxdot\mu^p a) + \sum_{1\leq p<m}(H\boxdot\mu^0 b)\Phi(b)(H\boxdot\mu^p a)\\
&\quad + (H\boxdot\mu^1 b)\Phi(b)(H\boxdot\mu^0 a) + (H\boxdot\mu^0 b)\Phi(b)(H\boxdot\mu^0 a)\\
&\quad + \sum_{q>1}(H\boxdot\mu^q b)\Phi(b)(H\boxdot\mu^0 a) + (H\boxdot\mu^0 b)\Phi(b)(H\boxdot\mu^m a)\\
&= \mu^* b\Phi(b)\mu^* a = \mu^* ba
\end{aligned}$$

•

Wir haben nun Lemma 2.16 bewiesen und damit gezeigt, dass $\mu^*$ in der Tat zu einem $\Phi$–Morphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{K}^{Q\times Q}$ faktorisiert. Deshalb werden wir von nun an $\mu^*$ als einen $\Phi$–Morphismus interpretieren.

Wir müssen nun noch Lemma 2.17 zeigen, d. h. zeigen, dass $(Q, \lambda^*, \mu^*, \gamma^*)$ tatsächlich eine $\Phi$–Darstellung für $S^*$ ist. Sei $u \in \mathbb{M}$. Wir erinnern uns, dass

$$(S^*, u) = \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in\mathcal{Z}_u^n} \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S, u_l).$$

Ist $z = (u_1, \ldots, u_n)$ eine Zerlegung von $u$ und $a \in \Sigma$, dann definieren wir $z_k^a := (u_1, \ldots, u_k a, \ldots, u_n)$. Aus technischen Gründen definieren wir noch $u_0 := \varepsilon$ für alle $u \in \mathbb{M}$.

Sei nun $\tilde{1} = (1, \varphi_1, 1, \varphi_2, 1, \varphi_3, \cdots, 1, \varphi_m) \in Q$ mit $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$. Wir geben eine Formel $\nu u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}}$ an, die das Verhalten des konstruierten Automaten von $\tilde{1}$ nach $\tilde{\jmath}$ für eine Spur $u$ beschreibt. Wir zeigen dann, dass tatsächlich $\nu u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} = \mu^* u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}}$ gilt. Daraus können wir Lemma 2.17 folgern und damit Satz 2.3 beweisen. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
\nu u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} :=& \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})}} I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z, n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S, u_l)\Phi(u_1\ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1j_1}\cdot\\
&\cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}\,u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}
\end{aligned}$$

mit

$$I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z, n) := \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } H_{\tilde{\jmath}} = \mathbb{1}, \Phi(\mathbf{suf}\,u_l) = \varphi_{l+1} \text{ für alle } 1 \leq l \leq \min(n, m-1),\\ & \quad \Phi(\mathbf{suf}\,u_n) = \iota_1 \text{ und } \iota_l = \varphi_{l+n} \text{ für alle } 1 \leq l \leq m-n \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

In $\nu u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}}$ repräsentiert der Faktor $\prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S, u_l)$ die Kopien von $\mathcal{A}$, die schon durch eine Verschiebung mittels $\mu^0$ beendet wurden. Die restlichen Faktoren beschreiben die momentan aktiven Kopien von $\mathcal{A}$.

Bevor wir mit dem Beweis von Lemma 2.17 beginnen, machen wir folgende Beobachtungen:

**Lemma 2.22** Sei $a \in \Sigma$ und $n, p \in \mathbb{N}$. Seien weiter $u, v \in \mathbb{M}$ und $z = (u_1, \ldots, u_{n+m}) \in \mathcal{Z}_u^{n+m}$ sowie $y := (u_1, \ldots, u_{n+m}, \varepsilon) \in \mathcal{Z}_u^{n+1+m}$. Dann gilt:

(a) $\Phi(u_1 \ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1} \prod_{q=2}^{m} [\Phi(u_1 \ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}] (\mu u_{n+q})_{1i_q} \Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ genau dann, wenn
$\Phi(u_1 \ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1} \prod_{q=2}^{m} [\Phi(u_1 \ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}] (\mu u_{n+q})_{1i_q} \Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} H_{\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ und entweder $p = 0$ und $aIu_{2+n} \ldots u_{n+m}$ oder $p > 0$ und $aIu_{n+p+1} \ldots u_{n+m}$.

<u>*Beweis*</u>. vgl. [DG99] Beweis zu Theorem 10. Sei
$\Phi(u_1 \ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1} \prod_{q=2}^{m} [\Phi(u_1 \ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}] (\mu u_{n+q})_{1i_q} \Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$. Ist $p = 0$, dann haben wir $\{a\} = \overrightarrow{\alpha}(i_1) I \overleftarrow{\alpha}(i_2) \cup \ldots \cup \overleftarrow{\alpha}(i_m) = \alpha(u_{n+2} \ldots u_{n+m})$. Ist dagegen $p > 0$, dann gilt $a \in \overrightarrow{\alpha}(i_p) I \overleftarrow{\alpha}(i_{p+1}) \cup \ldots \cup \overleftarrow{\alpha}(i_m) = \alpha(u_{n+p+1} \ldots u_{n+m})$.

Für die andere Implikation der Aussage sei
$\Phi(u_1 \ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1} \prod_{q=2}^{m} [\Phi(u_1 \ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}] (\mu u_{n+q})_{1i_q} \Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} H_{\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ und zunächst $p = 0$ und $aIu_{2+n} \ldots u_{n+m}$. Wir haben dann $\tilde{\jmath} = (i_2, \vartheta_2, \cdots, i_m, \vartheta_m, 1, \iota)$ für ein $\iota \in \Phi(\mathbb{M}(C, I))$ und $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \{a\} \neq \mathbb{0}$. Weiter gilt $\overleftarrow{\alpha}(i_1) \cup \{a\} = \overleftarrow{\alpha}(F(\mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, a))) = A$ und $\overleftarrow{\alpha}(i_l) \cup \overrightarrow{\alpha}(i_l) = \overleftarrow{\alpha}(j_{l-1}) \cup \overrightarrow{\alpha}(j_{l-1}) = A$ für alle $l > 1$. Also gilt $\overrightarrow{\alpha}(i_l) = \overrightarrow{\alpha}(j_{l-1}) I \overleftarrow{\alpha}(j_{l'-1}) = \overleftarrow{\alpha}(i_{l'})$ für alle $1 < l < l'$. Weiter $\overrightarrow{\alpha}(i_1) = \{a\} I \alpha(u_{n+2} \ldots u_{n+m}) = \overleftarrow{\alpha}(i_2) \cup \ldots \cup \overleftarrow{\alpha}(i_m)$. Damit folgt $H_{\tilde{\imath}} = \mathbb{1}$.

Sei nun $p > 0$ und $aIu_{n+p+1} \ldots u_{n+m}$. Dann gilt $j_l = i_l$ für alle $l \neq p$ und weiter $\overrightarrow{\alpha}(i_p) = \overrightarrow{\alpha}(j_p) \cup \{a\}$ und $\overleftarrow{\alpha}(j_p) = \overleftarrow{\alpha}(i_p) \cup \{a\}$. Also ist $\overrightarrow{\alpha}(i_1) \supseteq \overrightarrow{\alpha}(j_1) \neq \emptyset$ und $\overrightarrow{\alpha}(i_p) \cup \overleftarrow{\alpha}(i_p) = \overrightarrow{\alpha}(j_p) \cup \overleftarrow{\alpha}(j_p) = A$. Außerdem ist $\overleftarrow{\alpha}(i_p) \subseteq \overleftarrow{\alpha}(j_p) I \overrightarrow{\alpha}(j_l) = \overrightarrow{\alpha}(i_l)$ für alle $l < p$. Für $l > p$ dagegen gilt $\overrightarrow{\alpha}(j_p) I \overleftarrow{\alpha}(j_l) = \overleftarrow{\alpha}(i_l)$ und $aI\overleftarrow{\alpha}(i_l) = u_{n+l}$ nach Voraussetzung. Wir bekommen $\overrightarrow{\alpha}(i_p) I \overleftarrow{\alpha}(i_l)$ und damit $H_{\tilde{\imath}} = \mathbb{1}$. •

(b) Sei $H_{\tilde{\imath}} H_{\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ und $\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$. Sei weiter $(\mu u_{n+1})_{1i_1} \neq \mathbb{0}$ und $\vartheta_1 = \Phi(\mathbf{suf}u_n)$. Dann ist $I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, y^a_{n+1}, n+1) = I(\tilde{1}, \tilde{\imath}, z, n)$.

<u>*Beweis*</u>. $\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$ und $(\mu u_{n+1})_{1i_1} \neq \mathbb{0}$ impliziert $\tilde{\imath} = (i_1, \vartheta_1, j_1, \iota_1, \ldots, j_{m-1}, \iota_{m-1})$ und $\iota_1 = \vartheta_2 = \Phi(\mathbf{suf}(u_{n+1}a))$. Nun bekommen wir:

$$I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, y^a_{n+1}, n+1) = \begin{cases} \mathbb{1} & ; \text{falls } \Phi(\mathbf{suf}u_l) = \varphi_{l+1} \text{ für alle } 1 \leq l \leq \min(n, m-1), \\ & \quad \Phi(\mathbf{suf}(u_{n+1}a)) = \varphi_{n+2} \text{ falls } n+1 \leq m-1 \\ & \quad \text{und } \iota_l = \varphi_{l+n+1} \text{ für alle } 1 \leq l \leq m-n-1 \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{1} & ; \text{falls } \Phi(\mathbf{suf}u_l) = \varphi_{l+1} \text{ für alle } 1 \leq l \leq \min(n, m-1) \text{ und} \\ & \quad \iota_l = \varphi_{l+n+1} \text{ für alle } 1 \leq l \leq m-n-1 \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \Phi(\mathbf{suf}\, u_l) = \varphi_{l+1} \ \text{ für alle } \ 1 \leq l \leq \min(n, m-1) \text{ und} \\ & \quad \vartheta_l = \varphi_{l+n} \ \text{ für alle } 1 \leq l \leq m-n \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$
$$= I(\tilde{1}, \tilde{\imath}, z, n)$$

•

(c) Sei $(\mu u_n)_{1i_1} \neq \mathbb{0}$ und $I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z_n^a, n) \neq \mathbb{0}$. Dann ist $\iota_1 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, a) = \Phi(\mathbf{suf}(u_n a))$.

<u>Beweis</u>. $(\mu u_n)_{1i_1} \neq \mathbb{0}$ impliziert $\mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, a) = \Phi(\mathbf{suf}(u_n a))$ und $I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z_n^a, n) \neq \mathbb{0}$ impliziert $\iota_1 = \Phi(\mathbf{suf}(u_n a))$. Also $\iota_1 = \mathbf{suf}_{\mathcal{A}}(i_1, a) = \Phi(\mathbf{suf}(u_n a))$. •

(d) Sei $\iota_1 = \Phi(\mathbf{suf}(u_n a))$ und außerdem gelte $aIu_{n+1} \ldots u_{n+m}$. Dann ist $[\Phi(u_1 \ldots u_{n-1})\Phi(\mathbf{pre} u_n)\iota_{1,q}]\,(\mu u_{n+q})_{1j_q} = [\Phi(u_1 \ldots u_n a)\Phi(\mathbf{pre} u_{n+1})\iota_{2,q}]\,(\mu u_{n+q})_{1j_q}$ für alle $1 \leq q \leq m$.

<u>Beweis</u>. Ist $a \notin C$, dann gilt: $aIu_{n+q}$ impliziert $u_{n+q} = \varepsilon$. Damit folgt die Behauptung für $a \notin C$. Sei also $a \in C$. Aus $aIu_{n+1}$ folgt $\mathbf{pre} u_{n+1} = \varepsilon$. Damit folgt die Behauptung, da $\Phi(\mathbf{pre} u_n)\iota_1 = \Phi(u_n a)$. •

(e) Sei $aIu_{n+2} \ldots u_{n+m}$. Dann gilt für alle $2 \leq q \leq m$:
$[\Phi(u_1 \ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre} u_{n+1})\iota_{2,q}]\,(\mu u_{n+q})_{1j_q} = [\Phi(u_1 \ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre} u_{n+1} a)\iota_{2,q}]\,(\mu u_{n+q})_{1j_q}$.

<u>Beweis</u>. Ist $a \notin C$, dann gilt $aIu_{n+q}$ impliziert $u_{n+q} = \varepsilon$. Ist dagegen $a \in C$, dann ist $\mathbf{pre} u_{n+1} = \mathbf{pre} u_{n+1} a$. •

(f) Sei $\tilde{\jmath} = (1, \iota_1, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{K}}, \cdots, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$ und $u_{n+q} = \varepsilon$ für alle $1 \leq q \leq m$. Dann ist

$$I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z, n) = \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \iota_1 = \Phi(\mathbf{suf}\, u_n) \text{ und} \\ & \quad \varphi_{1+l} = \Phi(\mathbf{suf}\, u_l) \text{ für alle } 1 \leq l \leq m-1 \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beweis</u>. Aus der Definition von $H$ folgt $H_{\tilde{\jmath}} = \mathbb{1}$. Ist $n > m-1$, dann folgt die Behauptung direkt aus der Definition von $I$. Sei also $n \leq m-1$. Dann gilt

$$I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z, n) = \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \varphi_{l+1} = \Phi(\mathbf{suf}\, u_l) \text{ für alle } 1 \leq l \leq n \text{ und} \\ & \quad \iota_1 = \Phi(\mathbf{suf}\, u_n) \text{ und } \varphi_{l+n} = \iota_l = \Phi(\mathbf{suf}\,\varepsilon) \text{ für alle } 2 \leq l \leq m-n \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \iota_1 = \Phi(\mathbf{suf}\, u_n) \text{ und} \\ & \quad \varphi_{1+l} = \Phi(\mathbf{suf}\, u_l) \text{ für alle } 1 \leq l \leq m-1 \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

•

(g) Sei $1 \leq p \leq m$. Ist $\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$, dann ist $I(\tilde{1}, \tilde{\imath}, z, n) = I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z, n) = I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z_{n+p}^a, n)$.

(h) Ist $(S, u_l) \neq \mathbb{0}$ und $aIu_l$, dann folgt $a \notin \alpha(S)$ und damit $(S, va) = \mathbb{0}$ für alle $v \in \mathbb{M}$.

(i) Sei $\mu v_{1i_q} \neq \mathbb{0}$ und $aIv$. Dann folgt $\mathbf{suf} v = v$ und damit $\psi(i_q) = \Phi(v)$.

(j) $\mu v_{11} \neq \mathbb{0} \Leftrightarrow v = \varepsilon \Leftrightarrow \mu v_{11} = \mathbb{1}$

(k) Sei $\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} \neq \mathbb{0}$. Dann ist $j_m = 1$. Also ist $\mu v_{1j_m} \neq \mathbb{0} \Leftrightarrow v = \varepsilon \Leftrightarrow \mu v_{1j_m} = \mathbb{1}$.

Wir können nun wie angekündigt zeigen:

**Lemma 2.23** *Es gilt* $\nu u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} = \mu^* u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion über $|u|$.

Sei $u = \varepsilon$, dann ist

$$\nu u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} = \mu^* u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} = \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } \tilde{1} = \tilde{\jmath} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten nun eine Spur der Form $ua$ für ein $a \in \Sigma$. Beachte, dass aus Lemma 1.7 Folgendes folgt: Sei $n \geq 0$. Dann ist $z' = (u'_1, \ldots, u'_{n+m}) \in \mathcal{Z}_{ua}^{n+m}$ genau dann, wenn es $z = (u_1, \ldots, u_{n+m}) \in \mathcal{Z}_u^{n+m}$ und $p \geq 0$ gibt mit $u'_p = u_p a$, $u'_l = u_l$ für alle $l \neq p$ und $aIu_q$ für alle $q > p$.
Hiermit bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\nu u a_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} =& \sum_{n=0}^{|ua|} \sum_{\substack{z' \in \mathcal{Z}_{ua}^{n+m} \\ z' = (u'_1, \ldots, u'_{n+m})}} I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z', n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u'_1 \ldots u'_{l-1})(S, u'_l) \cdot \\
& \cdot \Phi(u'_1 \ldots u'_n)(\mu u'_{n+1})_{1j_1} \prod_{q=2}^{m} \left[ \Phi(u'_1 \ldots u'_n) \Phi(\mathbf{pre} u'_{n+1}) \iota_{2,q} \right] (\mu u'_{n+q})_{1j_q} \\
\overset{(h)}{=}& \sum_{n=1}^{|ua|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z = (u_1, \ldots, u_{n+m}) \\ aIu_{n+1} \ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z_n^a, n) \prod_{l=1}^{n-1} \Phi(u_1 \ldots u_{l-1})(S, u_l) \Phi(u_1 \ldots u_{n-1})(S, u_n a) \cdot \qquad (2.12) \\
& \cdot \Phi(u_1 \ldots u_n a)(\mu u_{n+1})_{1j_1} \prod_{q=2}^{m} \left[ \Phi(u_1 \ldots u_n a) \Phi(\mathbf{pre} u_{n+1}) \iota_{2,q} \right] (\mu u_{n+q})_{1j_q} \\
& + \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z = (u_1, \ldots, u_{n+m}) \\ aIu_{n+2} \ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1}, \tilde{\jmath}, z_{n+1}^a, n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1 \ldots u_{l-1})(S, u_l) \cdot \qquad (2.13) \\
& \cdot \Phi(u_1 \ldots u_n)(\mu u_{n+1} a)_{1j_1} \prod_{q=2}^{m} \left[ \Phi(u_1 \ldots u_n) \Phi(\mathbf{pre} u_{n+1} a) \iota_{2,q} \right] (\mu u_{n+q})_{1j_q} +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{|u|}\sum_{p\geq 2}\sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})\\ aIu_{n+p+1}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_{n+p},n)\prod_{l=1}^{n}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot \tag{2.14}$$

$$\cdot\,\Phi(u_1\ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1j_1}\prod_{q=2}^{p-1}\left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}\cdot$$

$$\cdot\,\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,p}(\mu u_{n+p}a)_{1j_p}\cdot$$

$$\cdot\prod_{q=p+1}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}$$

Da $S$ quasiregulär ist, reicht es in (2.13) und (2.14) über $n$ von 0 bis $|u|$ zu summieren.

Weiter haben wir nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}\mu^*ua_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} &= \sum_{\tilde{\imath}}\mu^*u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^*a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} = \sum_{p\geq 0,\tilde{\imath}}\mu^*u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}}\\ &= \sum_{\tilde{\imath}}\nu u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} && (2.15)\\ &\quad+\sum_{\tilde{\imath}}\nu u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^1 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} && (2.16)\\ &\quad+\sum_{p\geq 2}\sum_{\tilde{\imath}}\nu u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} && (2.17)\end{aligned}$$

Wir zeigen: (2.12) = (2.15), (2.13) = (2.16), (2.14) = (2.17). Daraus folgt dann offensichtlich Lemma 2.23.

$$(2.15) = \sum_{\tilde{\imath}}\nu u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} =$$

$$= \sum_{\tilde{\imath}}\sum_{k=0}^{|u|}\sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{k+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{k+m})}} I(\tilde{1},\tilde{\imath},z,k)\prod_{l=1}^{k}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\ldots u_k)(\mu u_{k+1})_{1i_1}\cdot$$

$$\cdot\prod_{q=2}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_k)\Phi(\mathbf{pre}u_{k+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{k+q})_{1i_q}\Phi(u)\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}}$$

$$\overset{(k)}{=} \sum_{\tilde{\imath}}\sum_{k=0}^{|u|}\sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{k+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{k+m})}} I(\tilde{1},\tilde{\imath},z,k)\prod_{l=1}^{k}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot$$

$$\cdot\,\Phi(u_1\ldots u_k)(\mu u_{k+1})_{1i_1}\Phi(u)\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{q=2}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_k)\Phi(\mathbf{pre}u_{k+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{k+q})_{1i_q}(\mu\varepsilon)_{1j_m}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(k),(b)}{=} \sum_{k=0}^{|u|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{k+1+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{k+1+m})}} \sum_{\substack{\tilde{\imath}\\ \vartheta_1=\Phi(\mathbf{suf}u_k)}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_{k+1},k+1)\prod_{l=1}^{k}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot\\
&\qquad\cdot\Phi(u_1\ldots u_k)(\mu u_{k+1})_{1i_1}\Phi(u)\mu^0 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}}\cdot\\
&\qquad\cdot\prod_{q=2}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_k)\Phi(\mathbf{pre}u_{k+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{k+q})_{1i_q}(\mu u_{k+1+m})_{1j_m}\\
&\overset{(a)}{=} \sum_{n=1}^{|u|+1} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})\\ aIu_{n+1}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_n,n)\prod_{l=1}^{n-1}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot\\
&\qquad\cdot\sum_{\substack{\tilde{\imath}=(i_1,\vartheta_1,j_1,\iota_1,\ldots,j_{m-1},\iota_{m-1})\\ \vartheta_1=\Phi(\mathbf{suf}u_{n-1})}}\Phi(u_1\ldots u_{n-1})(\mu u_n)_{1i_1}\Phi(u)\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{2,m}\mu a_{i_1,F(\vartheta_2)}\cdot\\
&\qquad\cdot\prod_{q=2}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_k)\Phi(\mathbf{pre}u_{k+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{k+q})_{1i_q}(\mu u_{k+1+m})_{1j_m}\\
&\overset{(i)}{=} \sum_{n=1}^{|ua|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})\\ aIu_{n+m}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_n,n)\prod_{l=1}^{n-1}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot\\
&\qquad\cdot\Phi(u_1\ldots u_{n-1})\sum_{i_1}(\mu u_n)_{1i_1}\Phi(u_n)\mu a_{i_1F(\Phi(\mathbf{suf}u_n a))}\cdot\\
&\qquad\cdot\prod_{q=1}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_{n-1})\Phi(\mathbf{pre}u_n)\iota_{1,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}\\
&\overset{(d)}{=} \sum_{n=1}^{|ua|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m}\\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})\\ aIu_{n+1}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_n,n)\prod_{l=1}^{n-1}\Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\ldots u_{n-1})(S,ua)\cdot\\
&\qquad\cdot\left[\Phi(u_1\ldots u_n a)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\right](\mu u_{n+1})_{1j_1}\cdot\\
&\qquad\cdot\prod_{q=2}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_n a)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}\\
&= \quad (2.12)
\end{aligned}
$$

Die beiden anderen Fälle gehen ähnlich:

$$
(2.16) = \sum_{\tilde{\imath}} \nu u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^1 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\tilde{\imath}} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})}} I(\tilde{1},\tilde{\imath},z,n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1}\cdot \\
&\quad \cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1i_q}\Phi(u)\mu^1 a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} \\
&\overset{(g),(a)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m}) \\ aIu_{n+2}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z,n)H_{\tilde{\jmath}} \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot \\
&\quad \cdot \sum_{\tilde{\imath}=(i_1,\iota_1,\ldots,j_m,\iota_m)} \Phi(u_1\ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1}\Phi(u)\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{2,m}\mu a_{i_1j_1}\cdot \\
&\quad \cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1i_q} \\
&\overset{(i)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m}) \\ aIu_{n+2}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z,n)H_{\tilde{\jmath}} \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot \\
&\quad \cdot \Phi(u_1\ldots u_n)\sum_{i_1}(\mu u_{n+1})_{1i_1}\Phi(u_{n+1})\mu a_{i_1j_1}\cdot \\
&\quad \cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q} \\
&\overset{(e),(g)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m}) \\ aIu_{n+2}\ldots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_{n+1},n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\cdot \\
&\quad \cdot \Phi(u_1\ldots u_n)(\mu u_{n+1}a)_{1j_1}\prod_{q=2}^{m}\left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1}a)\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q} \\
&= (2.13)
\end{aligned}
$$

Sei nun $p \geq 2$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{\imath}} \nu u_{\tilde{1}\tilde{\imath}}\Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}} = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\ldots,u_{n+m})}} I(\tilde{1},\tilde{\imath},z,n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1\ldots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\ldots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1}\cdot \\
&\quad \cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\ldots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1i_q}\Phi(u)\mu^p a_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}H_{\tilde{\imath}}H_{\tilde{\jmath}}
\end{aligned}
$$

$$\overset{(g),(a)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\dots,u_{n+m}) \\ aIu_{n+p+1}\dots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z,n)H_{\tilde{\jmath}}\prod_{l=1}^{n}\Phi(u_1\dots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\dots u_n)(\mu u_{n+1})_{1i_1}\cdot$$
$$\cdot\prod_{q=2}^{p-1}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1i_q}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\tilde{\imath}=(j_1,\iota_1,\dots,i_p,\dots,j_m,\iota_m)}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,p}\right](\mu u_{n+p})_{1i_p}\Phi(u)\left[\Psi(\tilde{\imath})^{-1}_{1,m}\vartheta_{2,p}\psi(i_p)\right]\mu a_{i_pj_p}\cdot$$
$$\cdot\prod_{q=p+1}^{m}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\vartheta_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1i_q}$$
$$\overset{(i)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\dots,u_{n+m}) \\ aIu_{n+p+1}\dots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z,n)H_{\tilde{\jmath}}\prod_{l=1}^{n}\Phi(u_1\dots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\dots u_n)(\mu u_{n+1})_{1j_1}\cdot$$
$$\cdot\prod_{q=2}^{p-1}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}\cdot$$
$$\cdot\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,p}\right]\sum_{i_p}(\mu u_{n+p})_{1i_p}\Phi(u_{n+p})\mu a_{i_pj_p}\cdot$$
$$\cdot\prod_{q=p+1}^{m}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}$$
$$\overset{(g)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z\in\mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\dots,u_{n+m}) \\ aIu_{n+p+1}\dots u_{n+m}}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z^a_{n+p},n)\prod_{l=1}^{n}\Phi(u_1\dots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\dots u_n)(\mu u_{n+1})_{1j_1}\cdot$$
$$\cdot\prod_{q=2}^{p-1}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,p}\right](\mu u_{n+p}a)_{1j_p}\cdot$$
$$\cdot\prod_{q=p+1}^{m}\left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\iota_{2,q}\right](\mu u_{n+q})_{1j_q}$$

Also bekommen wir auch (2.14) = (2.17) und somit Lemma 2.23. •

Jetzt sind wir soweit, dass wir den Beweis von Satz 2.3 abschließen können, indem wir nun Lemma 2.17 zeigen.

*Beweis (Lemma 2.17).*

$$\sum_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}\lambda^*(\tilde{\imath})\mu^*u_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}\gamma^*(\tilde{\jmath}) = \sum_{\substack{\tilde{1}=(1,\mathrm{id}_{\mathbb{K}},1,\varphi_2,\cdots,1,\varphi_m) \\ \tilde{\jmath}=(1,\iota_1,1,\mathrm{id}_{\mathbb{K}},\cdots,1,\mathrm{id}_{\mathbb{K}})}}\mu^*u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} = \sum_{\substack{\tilde{1}=(1,\mathrm{id}_{\mathbb{K}},1,\varphi_2,\cdots,1,\varphi_m) \\ \tilde{\jmath}=(1,\iota_1,1,\mathrm{id}_{\mathbb{K}},\cdots,1,\mathrm{id}_{\mathbb{K}})}}\nu^*u_{\tilde{1}\tilde{\jmath}} =$$

$$= \sum_{\tilde{\imath},\tilde{\jmath}} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\dots,u_{n+m})}} I(\tilde{1},\tilde{\jmath},z,n) \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1 \dots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\dots u_n)(\mu u_{n+1})_{11} \cdot$$

$$\cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\right](\mu u_{n+q})_{11}$$

$$\overset{(j),(f)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n+m} \\ z=(u_1,\dots,u_{n+m})}} \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1 \dots u_{l-1})(S,u_l)\Phi(u_1\dots u_n)(\mu u_{n+1})_{11} \cdot$$

$$\cdot \prod_{q=2}^{m} \left[\Phi(u_1\dots u_n)\Phi(\mathbf{pre}u_{n+1})\right](\mu u_{n+q})_{11}$$

$$\overset{(j)}{=} \sum_{n=0}^{|u|} \sum_{\substack{z \in \mathcal{Z}_u^{n} \\ z=(u_1,\dots,u_n)}} \prod_{l=1}^{n} \Phi(u_1 \dots u_{l-1})(S,u_l) = (S^*,u) \qquad \bullet$$

Damit ist Satz 2.3 bewiesen. ■

Bemerkungen 2.11 und 2.12 können sinngemäß auch für die Voraussetzungen von Satz 2.3 übernommen werden.

## 2.4 mc–Rationalität impliziert Erkennbarkeit

Wir werden nun die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte zusammenfassen und den ersten Teil unseres Hauptresultats beweisen, dass $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle \subseteq \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$, falls $\mathbb{K}$ kommutativ ist und $\Phi(\mathbb{M}(C,I))$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ ist.

Zunächst brauchen wir den Abschluss der $\Phi$–erkennbaren Potenzreihen unter $\oplus$.

**Satz 2.4** *Seien $S, T$ $\Phi$–erkennbare formale Potenzreihen. Dann ist $S \oplus T$ auch $\Phi$–erkennbar.*

Beweis. Der Beweis geht analog zum klassischen Fall.

Seien $(Q^1,\lambda^1,\mu^1,\gamma^1)$ und $(Q^2,\lambda^2,\mu^2,\gamma^2)$ $\Phi$–Darstellungen von $S$ bzw. $T$. Als neue Zustandsmenge wählen wir $Q = Q^1 \uplus Q^2$ und definiere $\mu$, $\lambda$, $\gamma$ wie folgt:

$$\mu u_{ij} := \begin{cases} \mu^1 u_{ij} & ;\text{falls } i,j \in Q^1 \\ \mu^2 u_{ij} & ;\text{falls } i,j \in Q^2 \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

$$\lambda(i) := \begin{cases} \lambda^1(i) & ;\text{falls } i \in Q^1 \\ \lambda^2(i) & ;\text{falls } i \in Q^2 \end{cases} \qquad \gamma(j) := \begin{cases} \gamma^1(j) & ;\text{falls } i \in Q^1 \\ \gamma^2(j) & ;\text{falls } i \in Q^2 \end{cases}$$

Wir sehen wie folgt, dass $\mu$ wieder $\Phi$–Morphismus ist:

$$\begin{aligned}\mu uv_{ij} &= \begin{cases} \sum_{k\in Q^1} \mu u_{ik}\Phi(v)\mu v_{kj} & ;\text{falls } i,j\in Q^1\\ \sum_{k\in Q^2} \mu u_{ik}\Phi(v)\mu v_{kj} & ;\text{falls } i,j\in Q^2\\ \mathbb{0} & ;\text{sonst}\end{cases}\\ &= (\mu u\Phi(u)\mu v)_{ij}\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $(Q,\lambda,\mu,\gamma)$ eine $\Phi$–Darstellung von $S\oplus T$ ist.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in Q}\lambda(i)\mu u_{ij}\Phi(u)\gamma(j) =& \sum_{i,j\in Q^1}\lambda^1(i)\mu^1 u_{ij}\Phi(u)\gamma^1(j) + \sum_{i,j\in Q^2}\lambda^2(i)\mu^2 u_{ij}\Phi(u)\gamma^2(j)\\ =&(S,u)+(T,u)\end{aligned}$$

■

**Lemma 2.24** *Sei $S\in\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ und $k\in\mathbb{K}$. Dann gilt:*

*(a) $k_\varepsilon\odot_\Phi S$ ist $\Phi$–erkennbar.*

*(b) $S\odot_\Phi k_\varepsilon$ ist $\Phi$–erkennbar.*

<u>Beweis</u>. Sei $(Q,\lambda,\mu,\gamma)$ eine $\Phi$–Darstellung von S.

Zu (a): Wir definieren $k\lambda$ durch $k\lambda(i) := k\cdot\lambda(i)$ für alle $i\in Q$. Dann ist $(Q,k\lambda,\mu,\gamma)$ eine $\Phi$–Darstellung von $k_\varepsilon\odot_\Phi S$.

Zu (b): Wir definieren jetzt $\gamma k$ durch $\gamma k(i) := \gamma(i)\cdot k$ für alle $i\in Q$. Dann ist $(Q,\lambda,\mu,\gamma k)$ eine $\Phi$–Darstellung von $S\odot_\Phi k_\varepsilon$. ■

Die Klasse der $\Phi$–mc–rationalen Potenzreihen enthält alle Monome. Wir müssen also zeigen, dass Monome $\Phi$–erkennbar sind. Wir zeigen jedoch noch mehr: Alle formalen Potenzreihen mit endlichem Träger sind $\Phi$–erkennbar.

**Satz 2.5** *Alle Polynome aus $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ sind $\Phi$–erkennbar.*

<u>Beweis</u>. Sei $P\in\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ ein Polynom, d. h. $\mathrm{supp}(P)$ ist endlich. Wir bekommen also

$$P=\sum_{u\in\mathrm{supp}(P)}(P,u)\mathbf{1}_u.$$

Nach Satz 2.4 und Lemma 2.24 reicht es zu zeigen, dass für alle $u\in\mathbb{M}$, $\mathbf{1}_u$ $\Phi$–erkennbar ist.

Sei also $u\in\mathbb{M}$ und sei $Q:=\{v\in\mathbb{M}\mid v \text{ ist Präfix von } u\}$, die Menge aller Präfixe von $u$. Wir definieren $\mu:\mathbb{M}\to\mathbb{K}^{Q\times Q}$ und $\lambda\in\mathbb{K}^{1\times Q}$ sowie $\gamma\in\mathbb{K}^{Q\times 1}$ durch:

$$\mu w_{vv'}=\begin{cases}\mathbb{1} & ;\text{falls } v'=vw\\ \mathbb{0} & ;\text{sonst}\end{cases}\qquad \lambda(v)=\begin{cases}\mathbb{1} & ;\text{falls } v=\varepsilon\\ \mathbb{0} & ;\text{sonst}\end{cases}\qquad \gamma(v)=\begin{cases}\mathbb{1} & ;\text{falls } v=u\\ \mathbb{0} & ;\text{sonst}\end{cases}$$

Da wir in der Definition nur $\mathbb{0}$ und $\mathbb{1}$ als Kosten benutzt haben, brauchen wir $\Phi$ in den folgenden Rechnungen nicht zu berücksichtigen.

Dass $\mu$ ein $\Phi$–Morphismus ist, sieht man wie folgt: Sei $w, w' \in \mathbb{M}$ und $v, v' \in Q$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mu ww'_{vv'} &= \begin{cases}\mathbb{1} & ;\text{falls } v' = vww' \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst}\end{cases} \\ &= \begin{cases}\mu u_{v(vw)}\mu w'_{(vw)v'} & ;\text{falls } v' = vww' \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst}\end{cases} \\ &= \sum_{v'' \in Q} \mu w_{vv''}\mu w'_{v''v'} = (\mu w \mu w')_{vv'}.\end{aligned}$$

Außerdem ist für alle $w \in \mathbb{M}$:

$$\lambda \mu w \gamma = \mu w_{\varepsilon u} = \mathbf{1}_u(w)$$

und damit die Aussage bewiesen. ■

Die Klasse der $\Phi$–mc–rationalen Potenzreihen ist abgeschlossen unter dem $\Phi$–Cauchy–Produkt. Satz 2.2 zeigt den Abschluss unter dem $\Phi$–Cauchy–Produkt nur für quasireguläre Reihen. Im nächsten Lemma werden wir zeigen, dass man den Abschluss für alle Reihen leicht folgern kann.

**Lemma 2.25** *Sei* $\mathbb{K}$ *kommutativ. Sei weiter* $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ *eine endliche Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$. *Dann ist* $\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ *abgeschlossen unter dem* $\Phi$*–Cauchy–Produkt.*

*Beweis*. Seien $S$ und $T \in \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}_{\Phi}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$. Wir definieren $S^q$ bzw. $T^q$ durch

$$(S^q, u) = \begin{cases}(S, u) & ;\text{falls } u \neq \varepsilon \\ \mathbb{0} & ;\text{falls } u = \varepsilon\end{cases} \qquad (T^q, u) = \begin{cases}(T, u) & ;\text{falls } u \neq \varepsilon \\ \mathbb{0} & ;\text{falls } u = \varepsilon\end{cases}$$

Beachte, dass sowohl $T^q$ als auch $S^q$ quasiregulär sind und es gilt: $S = S^q \oplus (S, \varepsilon)_\varepsilon$ bzw. $T = T^q \oplus (T, \varepsilon)_\varepsilon$.

Wir bekommen also

$$\begin{aligned}S \odot_\Phi T &= (S^q \oplus (S, \varepsilon)_\varepsilon) \odot_\Phi (T^q \oplus (T, \varepsilon)_\varepsilon) \\ &= S^q \odot_\Phi T^q \oplus (S, \varepsilon)_\varepsilon \odot_\Phi T^q \oplus S^q \odot_\Phi (T, \varepsilon)_\varepsilon \oplus (S, \varepsilon)(T, \varepsilon)_\varepsilon\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.4, Satz 2.2 sowie Lemma 2.24 und Satz 2.5. ■

Wir folgern nun den ersten Teil des Hauptresultats dieser Arbeit.

**Satz 2.6** *Sei* $\mathbb{K}$ *kommutativ. Sei weiter* $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ *eine endliche Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$. *Dann ist jede mc–rationale Potenzreihe* $\Phi$*–erkennbar.*

*Beweis*. Der Satz folgt direkt aus Satz 2.5, Satz 2.4, Lemma 2.4 und Satz 2.3. Beachte, dass endliche Untermonoide von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ Untergruppen sind. ■

# 3 Alle erkennbaren Reihen sind mc–rational

Nachdem wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, dass unter gewissen Voraussetzungen $\Phi$–rationale Potenzreihen $\Phi$–erkennbar sind, werden wir im folgenden Kapitel die umgekehrte Implikation untersuchen und zeigen, dass $\Phi$–erkennbare Potenzreihen immer $\Phi$–mc–rational sind. Dazu greifen wir wieder auf die Ideen von Droste und Gastin zurück.

Wir definieren eine Abbildung, die $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ auf eine Teilmenge der $\Phi$–erkennbaren Potenzreihen über dem freien Monoid $\Sigma^*$ abbildet. Weiter definieren wir eine zweite Abbildung, von den formalen Potenzreihen über dem freien Monoid zurück in die formalen Potenzreihen über $\mathbb{M}$, welche $\Phi$–Rationalität erhält. Wir werden diese Abbildungen so definieren, dass Ihre Verkettung die Identität ergibt. Da Georg Ulbrich in [Ulb03] zeigt, dass über dem freien Monoid die Klasse der $\Phi$–erkennbaren und die Klasse der $\Phi$–rationalen Potenzreihen äquivalent ist, folgt dann sofort die Inklusion $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle \subseteq \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$.

Im zweiten Abschnitt des Kapitels werden wir zeigen, dass sogar die schärfere Inklusion $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle \subseteq \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ gilt. Dazu zeigen wir zuerst, dass die im ersten Abschnitt definierte Abbildung nicht nur $\Phi$–Rationalität sondern auch $\Phi$–mc–Rationalität erhält. Nach dem ersten Abschnitt reicht es dann zu zeigen, dass das Bild von $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ unter der oben genannten Abbildung in den $\Phi$–mc–rationalen Potenzreihen über dem freien Monoid liegt.

## 3.1 Erkennbarkeit impliziert Rationalität

Wie oben bereits erwähnt, suchen wir eine Abbildung von $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ nach $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$, die $\Phi$–Rationalität erhält. Hier bietet sich natürlich ein Semiringhomomorphismus an, da dieser verträglich ist mit $\oplus$ und $\odot_\Phi$.

**Definition 3.1** Seien $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ zwei Spurmonoide und $h : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ ein Monoidhomomorphismus mit der Eigenschaft $h^{-1}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$. Dann definieren wir $\bar{h} : \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}_1\rangle\rangle \to \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}_2\rangle\rangle$ durch

$$\left(\bar{h}(S), u\right) := \sum_{w \in h^{-1}(u)} (S, w). \tag{3.1}$$

Beachte, dass die Summe aufgrund der Bedingung $h^{-1}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ definiert ist, denn dann gilt: Aus $w \in h^{-1}(u)$ folgt $|w| \leq |u|$.

Für den klassischen Fall ist bekannt, dass sich jeder Monoidhomomorphismus $h$ durch die Definition (3.1) zu einem Semiringhomomorphismus fortsetzen lässt; vorausgesetzt die Summe ist definiert (siehe z. B. [SS78, S.13-14]). Ist $h$ ein Homomorphismus zwischen zwei Spurmonoiden mit der oben genannten Eigenschaft, dann ist $\bar{h}$ sogar verträglich mit der Kleene–Iteration.

Wir verallgemeinern dieses Resultat auf Potenzreihen mit Deflationsparameter $\Phi$.

**Lemma 3.2** *Seien* $\mathbb{M}_1 := \mathbb{M}(\Sigma_1, I_1)$ *und* $\mathbb{M}_2 := \mathbb{M}(\Sigma_2, I_2)$ *zwei Spurmonoide und* $\Phi_1 : \mathbb{M}_1 \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$, $\Phi_2 : \mathbb{M}_2 \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ *Monoidhomomorphismen. Sei* $h : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *ein Monoidhomomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $h^{-1}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$.
2. $\Phi_2 \circ h = \Phi_1$.

*Dann ist* $\bar{h}$ *ein Semiringhomomorphismus. Außerdem ist* $\bar{h}$ *verträglich mit der Kleene–Iteration und erhält* $\Phi$*–Rationalität.*

Beweis. Die Verträglichkeit mit $\oplus$ müssen wir nicht zeigen, da $\oplus$ wie im klassischen Fall definiert war. Gleiches gilt für die Aussagen $\bar{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\bar{h}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Seien $S, T \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbb{M}_1 \rangle\rangle$. Wir zeigen die Verträglichkeit mit $\odot_\Phi$:

$$\begin{aligned}
\big(\bar{h}(S \odot_{\Phi_1} T), u\big) &= \sum_{w \in h^{-1}(u)} (S \odot_{\Phi_1} T, w) \\
&= \sum_{w \in h^{-1}(u)} \sum_{v_1 v_2 = w} (S, v_1) \cdot \Phi_1(v_1)(T, v_2) \\
&= \sum_{u_1 u_2 = u} \sum_{\substack{v_1 \in h^{-1}(u_1) \\ v_2 \in h^{-1}(u_2)}} (S, v_1) \cdot \Phi_1(v_1)(T, v_2) \\
&= \sum_{u_1 u_2 = u} \sum_{v_1 \in h^{-1}(u_1)} (S, v_1) \cdot \Phi_2(u_1) \sum_{v_2 \in h^{-1}(u_2)} (T, v_2) \\
&= \sum_{u_1 u_2 = u} \big(\bar{h}(S), u_1\big) \cdot \Phi_2(u_1) \big(\bar{h}(T), u_2\big) \\
&= \big(\bar{h}(S) \odot_{\Phi_2} \bar{h}(T), u\big)
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\bar{h}$ in der Tat ein Semiringhomomorphismus ist. Wir zeigen nun die Verträglichkeit mit der Kleene–Iteration. Sei $S$ jetzt quasiregulär. Da $h^{-1}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ folgt $\big(\bar{h}(S), \varepsilon\big) = (S, \varepsilon) = \mathbb{0}$. $\bar{h}(S)$ ist also wieder quasiregulär. Weiterhin folgt daraus, dass $h$ verlängernd ist, denn $|h(a)| \geq 1$ für alle $a \in \Sigma_1$. Sei $w = a_1 \ldots a_n \in \mathbb{M}_1$, dann ist $h(w) = h(a_1) \cdots h(a_n)$ und deshalb $|h(w)| \geq n = |w|$. Wir können nun für $u \neq \varepsilon$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\big(\bar{h}(S^*), u\big) &= \sum_{w \in h^{-1}(u)} (S^*, w) \\
&= \sum_{w \in h^{-1}(u)} \sum_{k=1}^{|w|} (S^k, w)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{w\in h^{-1}(u)} \sum_{k=1}^{|u|} (S^k, w) \\
&= \sum_{k=1}^{|u|} \sum_{w\in h^{-1}(u)} (S^k, w) \\
&= \sum_{k=1}^{|u|} \left(\bar{h}(S^k), u\right) \\
&= \sum_{k=1}^{|u|} \left(\bar{h}(S)^k, u\right) = \left(\bar{h}(S)^*, u\right)
\end{aligned}
$$

Um zu zeigen, dass $\bar{h}$ $\Phi$–Rationalität erhält, zeigen wir nun noch, dass Monome auf Monome abgebildet werden. In der Tat gilt:

$$(\bar{h}(k_a), u) = \sum_{w\in h^{-1}(u)} (k_a, w) = \begin{cases} k & ;\text{falls } u = h(a) \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $\bar{h}(k_a) = k_{h(a)}$ und damit ist der Satz bewiesen. ■

Bezeichnet $\eta : \Sigma^* \to \mathbb{M}$ den kanonischen Epimorphismus, dann erhält $\bar{\eta} : \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \to \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ nach Lemma 3.2 also $\Phi$–Rationalität.

Wir definieren nun noch eine Abbildung von $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$ nach $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Der kanonische Ansatz ist hier $\eta^{-1}$ definiert durch $(\eta^{-1}(S), w) = (S, [w])$ zu wählen; also einen gegebenen $\Phi$–Automaten über $\mathbb{M}$ einfach als $\Phi$–Automat über dem freien Monoid zu interpretieren. Verkettet mit $\bar{\eta}$ ergibt dies jedoch nicht die Identität, da $(\bar{\eta}(S), u) = \sum_{w\in u}(S, w)$.

Wir werden deshalb für jede Äquivalenzklasse $u \in \mathbb{M}$ genau ein Wort $w \in u$ auswählen und dort das Bild einer formalen Potenzreihe $S$ wie oben definieren. Auf allen anderen Worten lassen wir es verschwinden. Dabei müssen wir beachten, dass die so definierte Abbildung $\Phi$–Erkennbarkeit erhält. Deshalb führen wir das Konzept der lexikographischen Normalformen ein.

Sei $\leq$ eine lineare Ordnung auf $\Sigma$. Die durch $\leq$ induzierte lexikographische Ordnung auf $\Sigma^*$ bezeichnen wir wieder mit $\leq$.

**Definition 3.3**

1. Ein Wort $w$ hat die *lexikographische Normalform*, falls es das bezüglich $\leq$ kleinste Element von $[w]$ ist.
2. LNF ist die Menge aller Wörter über $\Sigma$ mit lexikographischer Normalform. LNF ist eine erkennbare Sprache (siehe z. B. [DR95, Proposition 6.3.4]) und abgeschossen unter Bildung von Präfixen und Suffixen, wie man leicht sieht.
3. $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}} = (Q_{\mathrm{LNF}}, \Delta, q_0, F)$ bezeichnet einen reduzierten (d. h. alle Zustände sind sowohl erreichbar als auch coerreichbar) deterministischen Automaten, der LNF erkennt. Beachte: Da LNF abgeschlossen ist gegenüber Bildung von Präfixen, folgt $F = Q_{\mathrm{LNF}}$.

**Definition 3.4** Ein $\Phi$–Morphismus $\mu : \Sigma^* \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ heißt $\Phi$–LNF–*Morphismus*, falls es eine Funktion $\pi : Q \to Q_{\text{LNF}}$ gibt, sodass für alle $a \in \Sigma$ und alle $i, j \in Q$ gilt: $\mu a_{ij} \neq \mathbb{0}$ impliziert $\pi(i) \xrightarrow{a} \pi(j)$ in $\mathcal{A}_{\text{LNF}}$. Eine $\Phi$–Darstellung $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ einer Reihe $S$ heißt $\Phi$–LNF–*Darstellung* von $S$, wenn $\mu$ ein $\Phi$–LNF–Morphismus ist.

**Lemma 3.5 (vgl. [DG99, Proposition 28])** *Ein $\Phi$–Morphismus $\mu : \Sigma^* \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ ist ein $\Phi$–LNF–Morphismus, falls es eine Funktion $\pi : Q \to Q_{\text{LNF}}$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $i, j \in Q$ gilt: $\mu_{ij} \neq \mathbb{0}$ impliziert $\pi(i) \xrightarrow{w} \pi(j)$ in $\mathcal{A}_{\text{LNF}}$.*

Beweis. Wir können die Behauptung mittels einer einfachen Induktion über die Wortlänge beweisen. Sei $w \in \Sigma^*$. Für $w = \varepsilon$ folgt aus $\mu w_{ij} \neq \mathbb{0}$, dass $i = j$ und damit der Induktionsanfang, da per Definition $\pi(i) \xrightarrow{\varepsilon} \pi(i)$ in $\mathcal{A}_{\text{LNF}}$. Sei nun $\mathbb{0} \neq \mu wa_{ij} = \sum_k \mu w_{ik}\Phi(w)\mu a_{kj}$. Wir können also ein $k$ so wählen, dass sowohl $\mu w_{ik} \neq \mathbb{0}$ als auch $\mu a_{kj} \neq \mathbb{0}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun $\pi(i) \xrightarrow{w} \pi(k) \xrightarrow{a} \pi(j)$ in $\mathcal{A}_{\text{LNF}}$. ■

Da LNF erkennbar ist, können wir durch eine einfache Produktkonstruktion für alle $S \in \mathbb{K}^{\text{rec}}_{\Phi}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ zeigen, dass $S \otimes \mathbf{1}_{\text{LNF}}$ wieder $\Phi$–erkennbar ist.

**Lemma 3.6 (vgl. [DG99, Proposition 28])** *Sei $S \in \mathbb{K}^{\text{rec}}_{\Phi}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Dann hat $S \otimes \mathbf{1}_{\text{LNF}}$ eine $\Phi$–LNF–Darstellung.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q', \lambda', \mu', \gamma')$ eine $\Phi$–Darstellung von $S$. Wir definieren $Q := Q' \times Q_{\text{LNF}}$ und $\lambda, \gamma, \pi$ sowie $\mu : \Sigma \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ folgendermaßen:

$$\gamma(i,p) := \gamma'(i) \qquad \pi(i,p) := p \qquad \lambda(i,p) := \begin{cases} \lambda'(i) & ;\text{falls } p = q_0 \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\mu a_{(i,p)(j,q)} := \begin{cases} \mu' a_{ij} & ;\text{falls } p \xrightarrow{a} q \text{ in } \mathcal{A}_{\text{LNF}} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Wir setzen $\mu$ mit Lemma 1.14 zu einem $\Phi$–Morphismus fort. Wir lesen direkt aus der Definition ab, dass $\mu$ ein $\Phi$–LNF–Morphismus ist. Zunächst zeigen wir mittels Induktion über die Wortlänge

$$\mu w_{(i,p)(j,q)} = \begin{cases} \mu' w_{ij} & ;\text{falls } p \xrightarrow{w} q \text{ in } \mathcal{A}_{\text{LNF}} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Für $w = \varepsilon$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu\varepsilon_{(i,p)(j,q)} &= \begin{cases} \mathbb{1} & ;\text{falls } i = j \text{ und } p = q \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu'\varepsilon_{ij} & ;\text{falls } p \xrightarrow{\varepsilon} q \text{ in } \mathcal{A}_{\text{LNF}} \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt betrachten wir $\mu wa_{(i,p)(j,q)} = \sum_{k,r} \mu w_{(i,p)(k,r)} \Phi(w) \mu a_{(k,r)(j,q)}$. Da $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}}$ deterministisch ist, gibt es maximal einen Zustand $r$ mit $p \xrightarrow{w} r \xrightarrow{a} q$ in $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}}$. Wir bekommen also

$$\mu wa_{(i,p)(j,q)} = \begin{cases} \sum_k \mu' w_{ik} \Phi(w) \mu' a_{kj} & ; \text{falls } p \xrightarrow{wa} q \text{ in } \mathcal{A}_{\mathrm{LNF}} \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Wir können nun zeigen, dass $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ tatsächlich $S \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}$ darstellt.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,p)(i,q)} \lambda(i,p) \mu w_{(i,p)(j,q)} \gamma(j,q) &= \sum_{i,j,q} \lambda'(i) \mu w_{(i,q_0)(j,q)} \Phi(w) \gamma'(j) \\ &= \begin{cases} \sum_{i,j} \lambda'(i) \mu' w_{ij} \Phi(w) \gamma'(j) & ; \text{falls } q_0 \xrightarrow{w} \text{ in } \mathcal{A}_{\mathrm{LNF}} \\ \mathbb{0} & ; \text{sonst} \end{cases} \\ &= (S \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}, w) \end{aligned}$$

■

Wir können nun recht einfach zeigen, dass alle Φ–erkennbaren Reihen Φ–rational sind.

**Satz 3.1** *Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle$ dann ist $S$ Φ–rational.*

<u>Beweis</u>. Sei $\mathcal{A} = (Q, \lambda, \mu, \gamma)$ eine Φ–Darstellung von $S$. Dann ist $(Q, \lambda, \mu \circ \eta, \lambda)$ eine Φ–Darstellung von $\eta^{-1}(S)$. Nach Lemma 3.6 ist also auch $\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}$ Φ–erkennbar und deshalb nach [Ulb03] Φ–rational. Mit Lemma 3.2 bekommen wir, dass dann auch $\bar{\eta}\left(\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}\right)$ Φ–rational ist. Wir haben aber für jedes $u \in \mathbb{M}$:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\eta}\left(\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}\right), u\right) &= \sum_{w \in u} \left(\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}, w\right) \\ &= \sum_{w \in u \cap \mathrm{LNF}} \left(\eta^{-1}(S), w\right) \\ &= \sum_{w \in u \cap \mathrm{LNF}} (S, [w]) = (S, u). \end{aligned}$$

Also ist $\bar{\eta}\left(\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}\right) = S$, was die Behauptung beweist. ■

## 3.2 Erkennbarkeit impliziert sogar mc–Rationalität

Im folgenden Abschnitt zeigen wir die strengere Inklusion $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle \subseteq \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle$. Wir werden zuerst zeigen, dass $\bar{\eta}$ nicht nur Φ–Rationalität erhält, sondern sogar Φ–mc–Rationalität. Um zu zeigen, dass aus der Φ–Erkennbarkeit einer formalen Potenzreihe ihre Φ–mc–Rationalität folgt, reicht es deshalb nach dem vorausgegangenen Abschnitt zu zeigen, dass alle Potenzreihen der Form $S \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}$ für $S \in \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$ Φ–mc–rational sind.

**Lemma 3.7** *Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Dann gilt*

1. *Ist $S$ monoalphabetisch, dann ist auch $\bar{\eta}(S)$ monoalphabetisch.*
2. *Ist $S$ zusammenhängend, dann ist auch $\bar{\eta}(S)$ zusammenhängend.*

Beweis. Zu (1): Sei $S$ monoalphabetisch und sei $u \in \operatorname{supp}(\bar{\eta}(S))$. Dann ist $\sum_{w\in u}(S,w) \neq \mathbb{0}$. Also gibt es ein $w \in u$ mit $(S,w) \neq \mathbb{0}$. Und damit folgt $\alpha(u) = \alpha(S)$ für alle $u \in \operatorname{supp}(\bar{\eta}(S))$.

Zu (2): Sei $S$ zusammenhängend und sei $u \in \operatorname{supp}(\bar{\eta}(S))$. Dann ist $\sum_{w\in u}(S,w) \neq \mathbb{0}$. Also gibt es ein $w \in u$ mit $(S,w) \neq \mathbb{0}$. Damit folgt $\alpha(u) = \alpha(w)$. Da $S$ zusammenhängend ist, folgt, dass $\alpha(u)$ zusammenhängend ist für alle $u \in \operatorname{supp}(\bar{\eta}(S))$. ∎

Wir müssen nun zunächst einige vorbereitenden Lemmata aus [DG99] für Potenzreihen aus $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ nachvollziehen.

**Definition 3.8** Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ und $A \subseteq \Sigma$. Dann ist die Einschränkung von $S$ auf $A$ die formale Potenzreihe $S_A$, die durch

$$(S_A, w) := \begin{cases} (S,w) & ;\ \text{falls } \alpha(w) = A \\ \mathbb{0} & ;\ \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

**Lemma 3.9 (vgl. [DG99, Proposition 21])** *Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ $\Phi$–mc–rational. Dann ist auch $S_A$ $\Phi$–mc–rational.*

Beweis. Der Beweis kann fast wörtlich aus [DG99] übernommen werden. ∎

**Lemma 3.10 (vgl. [DG99, Proposition 22])** *Sei $S \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ quasiregulär und $A \subseteq \Sigma$ nichtleer. Dann ist $(S^*)_A = Z^+ \odot_\Phi X$ mit $X = \sum_{B\subset A}(S^*)_B$ und $Z = (X \odot_\Phi S)_A$.*

Beweis. Sei $w \in \Sigma^*$. Es gilt:

$$(X, w) = \begin{cases} (S^*, w) & ;\text{falls } \alpha(w) \subset A \\ \mathbb{0} & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Sei $(Z^+ \odot_\Phi X, w) \neq \mathbb{0}$, dann gibt es eine Zerlegung $w_1 \dots w_n w_{n+1}$ mit $n \geq 1$ von $w$ mit $(Z, w_1) \cdots \Phi(w_1 \dots w_{n-1})(Z, w_n)\Phi(w_1 \dots w_n)(X, w_{n+1}) \neq \mathbb{0}$. Also folgt $\alpha(w_1) = \dots \alpha(w_n) = A$ und $\alpha(w_{n+1}) \subset A$. Damit ist also $\alpha(w) = A$. Per Kontraposition schließen wir $\alpha(w) \neq A$ impliziert $(Z^+ \odot_\Phi X, w) = \mathbb{0} = ((S^*)_A, w)$.

Sei nun also $\alpha(w) = A$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(Z^+ \odot_\Phi X, w) &= \\ &= \sum_{\substack{w=w_1\dots w_n w_{n+1}\\ n\geq 1}} (Z, w_1) \cdots \Phi(w_1 \dots w_{n-1})(Z, w_n)\Phi(w_1 \dots w_n)(X, w_{n+1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{w=u_1v_1\ldots u_nv_nu_{n+1}\\ n\geq 1,\alpha(u_jv_j)=A}} && (X,u_1)\Phi(u_1)(S,v_1)\cdots\Phi(u_1v_1\ldots u_{n-1}v_{n+1})\left[(X,u_n)\Phi(u_n)(S,v_n)\right]\\
& && \cdot\Phi(u_1v_1\ldots u_nv_n)(X,u_{n+1})\\
&= \sum_{\substack{w=u_1v_1\ldots u_nv_nu_{n+1}\\ n\geq 1,\alpha(u_j)\subset A,\alpha(u_jv_j)=A}} && (S^*,u_1)\Phi(u_1)(S,v_1)\cdots\Phi(u_1v_1\ldots u_{n-1}v_{n+1})\left[(S^*,u_n)\Phi(u_n)(S,v_n)\right]\\
& && \cdot\Phi(u_1v_1\ldots u_nv_n)(S^*,u_{n+1})\\
&= \sum && (S,u_{11})\cdots\Phi(u_{11}\ldots u_{1i_1-1})(S,u_{1i_1})\Phi(u_1)(S,v_1)\cdots\\
& && \cdot\Phi(u_1v_1\ldots u_{n-1}v_{n-1})\left[(S,u_{n1})\ldots\Phi(u_{n1}\ldots u_{ni_n})(S,v_n)\right]\\
& && \cdot\Phi(u_1v_1\ldots u_nv_n)\left[(S,u_{n+11})\cdots\Phi(u_{n+1i_{n+1}-1}(S,u_{n+1i_{n+1}})\right],
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Term über alle Zerlegungen von $w$ der Form

$$w = u_{11}\ldots u_{1i_1}v_1\ldots u_{n1}\ldots u_{ni_n}v_nu_{n+11}\ldots u_{n+1i_{n+1}}$$

summieren mit $u_j := u_{j1}\ldots u_{ji_j}$, $n\geq 1$, $i_j\geq 0$, $\alpha(u_j)\subset A$ und $\alpha(u_jv_j) = A$ für alle $j$. Da $\alpha(w) = A \neq \emptyset$ vorausgesetzt war, sieht man, dass die letzte Summe äquivalent ist zu

$$\sum_{w=w_1\ldots w_m,m\geq 1} (S,w_1)\cdots\Phi(w_1\ldots w_{m-1})(S,w_m) = (S^+,w) = (S^*,w). \qquad \blacksquare$$

**Lemma 3.11 (vgl. [DG99, Theorem 23])** *Sei $S\in\mathbb{K}_\Phi^{\text{mc-rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ quasiregulär, sodass $S^*$ zusammenhängend ist. Dann ist $S^*$ $\Phi$–mc–rational.*

Beweis. Der Beweis kann fast wörtlich aus [DG99] übernommen werden. $\blacksquare$

Um im klassischen Satz von Schützenberger zu zeigen, dass das Verhalten $\|\mathcal{A}\|$ eines gewichteten Automaten $\mathcal{A} = (Q,\lambda,\mu,\gamma)$ rational ist, untersucht man die formale Potenzreihe $\mu\in\mathbb{K}^{Q\times Q}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Man interpretiert diese jedoch nicht als eine Potenzreihe in den Matrizensemiring sondern als Matrix von Potenzreihen. Zeigt man nun, dass diese Matrix nur rationale Einträge hat, hat man auch gezeigt, dass das Verhalten $\|\mathcal{A}\|$ rational ist, da es eine Linearkombination dieser Einträge ist.

Wir werden analog vorgehen. Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass man $\mu\in\mathbb{K}^{Q\times Q}{}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ wieder als Matrix von Potenzreihen auffassen kann.

**Definition 3.12** Sei $Q$ eine endliche Menge. Dann ist die Abbildung $\Psi : \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}\to\mathbb{K}^{Q\times Q}{}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ definiert durch

$$(\Psi(S),w)_{ij} = (S_{ij},w)$$

für alle $w\in\Sigma^*$ und $i,j\in Q$.

**Lemma 3.13** *Die Abbildung $\Psi : \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}\to\mathbb{K}^{Q\times Q}{}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ ist ein Semiringisomorphismus.*

<u>*Beweis*</u>. Aus der klassischen Theorie formaler Potenzreihen ist bekannt, dass $\Psi$ ein Semiring-isomorphismus zwischen $\mathbb{K}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$ und $\mathbb{K}^{Q\times Q}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ ist (siehe z. B. [KS86]). Es bleibt daher lediglich zu zeigen, dass $\Psi$ auch verträglich mit dem $\Phi$–Cauchy–Produkt $\odot_\Phi$ ist.

Seien nun also $M, N \in \mathbb{K}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$. Dann gilt für alle $i, j \in Q$ und $w \in \Sigma^*$

$$\begin{aligned}
(\Psi(MN), w)_{ij} = (MN_{ij}, w) &= \sum_k (M_{ik} \odot_\Phi N_{kj}, w) \\
&= \sum_k \sum_{uv=w} (M_{ik}, u) \cdot \Phi(u)(N_{kj}, v) \\
&= \sum_{uv=w} \sum_k (\Psi(M), u)_{ik} \cdot \Phi(u)(\Psi(N), v)_{kj} \\
&= \sum_{uv=w} (\Psi(M), u) \cdot \Phi(u)(\Psi(N), v))_{ij} = (\Psi(M) \odot_\Phi \Psi(N), w)_{ij} \blacksquare
\end{aligned}$$

Wir werden wegen dieses Lemmas eine Matrix $M \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$ und die zugehörige Reihe $\Psi(M)$ identifizieren. Insbesondere heißt $M$ quasiregulär, wenn $\Psi(M)$ quasiregulär ist. In diesem Fall bezeichnet die Matrix $M^*$ dann $\Psi^{-1}(\Psi(M)^*)$.

Für die folgenden Betrachtungen ist die Beobachtung

$$M^* = \mathbf{E} + MM^* \tag{3.2}$$

zentral ($\mathbf{E}$ bezeichnet hierbei die Einheitsmatrix). Sie folgt direkt aus Lemma 3.13, denn für eine quasireguläre formale Potenzreihe $S$ gilt $S^* = \mathbf{1} \oplus S \odot_\Phi S^*$.

Durch Induktion über die Wortlänge sieht man damit auch, dass für $\mu \in \mathbb{K}^{Q\times Q}{}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ gilt:

$$\mu = \left(\sum_{a\in\Sigma} \mu a.a\right)^* \tag{3.3}$$

Denn ist $S := \sum_{a\in\Sigma} \mu a.a$, dann gilt $(S^*, wa) = (\mathbf{1} \oplus S^* \odot_\Phi S, wa) = (S^* \odot_\Phi S, wa) = (S^*, w)\Phi(w)(S, a) = \mu w \Phi(w)\mu a = \mu wa$.

Wesentliches Ziel des Rests des Abschnitts ist es zu zeigen, dass für einen $\Phi$–LNF–Morphismus $\mu$ die Matrix $\left(\sum_{a\in\Sigma} \mu a.a\right)^* \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$ $\Phi$–mc–rationale Einträge hat. Wir beginnen dazu mit einer Verallgemeinerung von Lemma 1.26.

**Lemma 3.14 (vgl. [BR88] )** *Seien $Q, P$ endlichen Mengen. Sei weiter $A \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$ quasiregulär. Dann gilt:*

1. *Sei $C \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times P}$, dann hat die Gleichung $B = AB + C$ die eindeutige Lösung $B = A^*C$.*

2. *Sei $C \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{P\times Q}$, dann hat die Gleichung $B = BA + C$ die eindeutige Lösung $B = CA^*$.*

<u>Beweis</u> *(Skizze).* Der Beweis geht analog zu dem von Lemma 1.26. Mit der Gleichung (3.2) sieht man, dass $A^*C$ bzw. $CA^*$ eine Lösung ist und da $\Psi$ ein Semiringisomorphismus ist, kann man wie im Beweis zu Lemma 1.26 zeigen, dass es auch die einzige Lösung ist. ∎

**Lemma 3.15 (vgl. [DG99, Proposition 32])** *Sei $M \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$ quasiregulär, und zerfalle in folgende Blocks*

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

*wobei $A, D$ quadratische Matrizen sind. Dann gilt*

$$M^* = \begin{bmatrix} A^* + A^*C(D+BA^*C)^*BA^* & A^*C(D+BA^*C)^* \\ (D+BA^*C)^*BA^* & (D+BA^*C)^* \end{bmatrix}.$$

<u>Beweis</u>. Der Beweis kann wieder fast wörtlich aus [DG99] übernommen werden. ∎

Folgendes Lemma von Ochmański wird sich als wichtig erweisen:

**Lemma 3.16 (Ochmański [Die90])** *Sei $w \in \Sigma^*$, sodass $w, w^2 \in \mathrm{LNF}$. Dann ist $w$ zusammenhängend.*

Nun können wir das angekündigte Lemma zeigen:

**Lemma 3.17 (vgl. [DG99, Proposition 34])** *Sei $\mu : \Sigma^* \to \mathbb{K}^{Q\times Q}$ ein $\Phi$–LNF–Morphismus und sei*

$$M = \sum_{a\in\Sigma} \mu a.a \ \in \mathbb{K}^{Q\times Q}{}_\Phi\langle\Sigma^*\rangle.$$

*Dann sind die Einträge von $M^* \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times Q}$ $\Phi$–mc–rational.*

<u>Beweis</u>. Wir identifizieren $Q$ o. B. d. A. mit der natürlichen Zahl $n = \{0, 1, \ldots, |Q|-1\}$.

Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Mächtigkeit von $Q$. Sei also $Q = 1$. Es ist $M \in \mathbb{K}_\Phi\langle\Sigma^*\rangle$ quasiregulär; und da es ein Polynom ist, ist $M$ $\Phi$–mc–rational. Sei $w \in \mathrm{supp}(M^*)$. Wie in Gleichung (3.3) gesehen, gilt $M^* = \mu$ und damit folgt $\mu w \neq \mathbb{0}$. Da $\mu$ ein $\Phi$–LNF–Morphismus ist, gibt es einen Pfad in $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}}$: $\pi(0) \xrightarrow{w} \pi(0)$. Da $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}}$ sowohl reduziert als auch deterministisch und LNF abgeschlossen gegen Bildung von Präfixen und Suffixen ist, folgt nun $w, w^2 \in \mathrm{LNF}$ und deshalb aus Lemma 3.16, dass $w$ und damit $M^*$ zusammenhängend ist. Lemma 3.11 impliziert, dass $M^*$ $\Phi$–mc–rational ist und damit folgt der Induktionsanfang.

Sei nun $Q = n \geq 1$. Wir definieren $\mu' : \Sigma \to \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ durch $\mu' a_{ij} = \mu a_{ij}$ für alle $i, j \in n-1$ und $a \in \Sigma$. Mit Lemma 1.14 setzen wir $\mu'$ zu einem $\Phi$–Morphismus fort. Da $\mu$

ein $\Phi$–LNF–Morphismus ist, ist offensichtlich auch $\mu'$ einer. Wir setzen $A = \sum_{a\in\Sigma} \mu' a.a \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}{}_{\Phi}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung hat $A$ $\Phi$–mc–rationale Einträge. $M$ zerfällt in Blöcke der Form

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

und mit Lemma 3.15 erhalten wir:

$$M^* = \begin{bmatrix} A^* + A^*C(D+BA^*C)^*BA^* & A^*C(D+BA^*C)^* \\ (D+BA^*C)^*BA^* & (D+BA^*C)^* \end{bmatrix}$$

Sei $T := D + BA^*C \in \mathbb{K}_{\Phi}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung ist mit $A^*$ auch $T$ $\Phi$–mc–rational. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass $T^*$ $\Phi$–mc–rational ist.

Sei $w \in \Sigma^*$. Ist $|w| \neq 1$, dann gilt $(M, w) = \mathbf{0}$ und somit auch $(A, w) = \mathbf{0}$, $(B, w) = \mathbf{0}$, $(C, w) = \mathbf{0}$ und $(D, w) = \mathbf{0}$. Wir erhalten also für $w = a_1 \dots a_k$:

$$(T, w) = \begin{cases} \mathbb{0} & ;\text{falls } k = 0 \\ (D, a_1) & ;\text{falls } k = 1 \\ (B, a_1)(A, a_2)\cdots(A, a_{k-1})(C, a_k) & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Wir lesen ab, dass $T$ quasiregulär ist. Wie oben werden wir nun zeigen, dass es einen Pfad in $A_{\mathrm{LNF}}$: $\pi(n-1) \xrightarrow{w} \pi(n-1)$ gibt, falls $(T, w) \neq \mathbb{0}$.

Sei $w = a_1 \dots a_k \in \operatorname{supp}(T)$. Ist $k = 1$, dann folgt $(D, a_1) = (\mu a_1)_{n-1 n-1} \neq \mathbb{0}$ und deshalb $\pi(n-1) \xrightarrow{a_1} \pi(n-1)$, da $\mu$ ein $\Phi$–LNF–Morphismus ist. Sei jetzt also $k \geq 2$. Dann gibt es $i_1, \dots, i_{k-1} \in n-1$ mit:

$$(\mu a_1)_{n-1,i_1}\Phi(a_1)(\mu a_2)_{i_1 i_2}\cdots\Phi(a_1\dots a_{k-2})(\mu a_{k-1})_{i_{k-2}i_{k-1}}\Phi(a_1\dots a_{k-1})(\mu a_k)_{i_{k-1}n-1}$$

und folglich gibt es Pfade in $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}}$:

$$\pi(n-1) \xrightarrow{a_1} \pi(i_1) \xrightarrow{a_2} \pi(i_2) \to \cdots \to \pi(i_{k-1}) \xrightarrow{a_k} \pi(n-1)$$

Sei jetzt $w \in \operatorname{supp}(T^+)$. Dann gibt es eine Zerlegung $w = w_1 \dots w_k$, sodass $(T, w_1)\Phi(w_1)(T, w_2)\cdots\Phi(w_1\dots w_{k-1})(T, w_k) \neq \mathbb{0}$. Also gibt es nach dem eben Gezeigten einen Pfad $\pi(n-1) \xrightarrow{w} \pi(n-1)$. Da $\mathcal{A}_{\mathrm{LNF}}$ sowohl reduziert als auch deterministisch und LNF abgeschlossen gegen Bildung von Präfixen und Suffixen ist, folgt $w, w^2 \in \mathrm{LNF}$ und damit aus Lemma 3.16, dass $T^+$ zusammenhängend ist. Da $T^* = \mathbf{1} \oplus T^+$, ist auch $T^*$ zusammenhängend und das Lemma folgt nun aus Lemma 3.11. ■

Wir können nun folgern:

**Lemma 3.18 (vgl. [DG99, Proposition 35])** *Sei* $S \in \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$. *Dann ist* $S \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}$ $\Phi$*–mc–rational.*

Beweis. Da $S$ $\Phi$–erkennbar ist, gibt es nach Lemma 3.6 eine $\Phi$–LNF–Darstellung $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$, die $S \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}$ erkennt. Wir setzen $M := \sum_{a\in\Sigma} \mu a.a$. Wie erwähnt gilt nun $M^* = \mu$.

Wir identifizieren wie üblich $k \in \mathbb{K}$ mit $k_\varepsilon \in \mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ und interpretieren $\lambda$ (bzw. $\gamma$) als Vektoren aus $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{1\times Q}$ (bzw. aus $\mathbb{K}_\Phi\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle^{Q\times 1}$). Nach Lemma 3.17 hat $M^*$ nur $\Phi$–mc–rationale Einträge. Also ist $\lambda M^*\gamma$ eine $\Phi$–mc–rationale Reihe. Das Lemma folgt nun, denn für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ gilt

$$\begin{aligned}(\lambda M^*\gamma, w) &= \left(\sum_{i,j} \lambda(i) \odot_\Phi (M^*)_{ij} \odot_\Phi \gamma(j), w\right) = \sum_{i,j} \lambda(i)((M^*)_{ij}, w)\Phi(w)\gamma(j) \\ &= \sum_{i,j} \lambda(i)\mu w_{ij}\Phi(w)\gamma(j) = (S \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}, w)\end{aligned}$$ ∎

Analog zu Satz 3.1 formulieren wir jetzt noch schärfer:

**Satz 3.2 (vgl. [DG99, Theorem 37])** *Sei* $S \in \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$. *Dann ist* $S$ $\Phi$*–mc–rational.*

Beweis. Der Beweis geht analog zum Beweis von Satz 3.1.

$\eta^{-1}(S)$ ist $\Phi$–erkennbar. Nach Lemma 3.18 ist dann $\eta^{-1}(S)\otimes\mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}$ $\Phi$–mc–rational. Mit Lemma 3.7 und Lemma 3.2 erhalten wir, dass dann auch $\bar{\eta}\left(\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}\right)$ $\Phi$–mc–rational ist. Wie im Beweis von Satz 3.1 gesehen, ist aber $\bar{\eta}\left(\eta^{-1}(S) \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{LNF}}\right) = S$. ∎

# 4 Zusammenfassung

Wir werden im folgenden Kapitel die Ergebnisse der Arbeit zusammenfassen und sie zu bekannten Resultaten in Zusammenhang stellen.

Darüber hinaus werden wir die Schärfe der Voraussetzungen untersuchen und Gegenbeispiele geben für den Fall, dass die Voraussetzungen verletzt sind. Das zeigt, dass in diesem Sinn die erzielten Ergebnisse optimal sind, da man im Allgemeinen auf keine Voraussetzung verzichten kann.

## 4.1 Ein Kleene–Schützenberger Theorem

Das erste Resultat, das erkennbare Mengen durch rationale Ausdrücke algebraisch charakterisiert, stammt von Kleene aus dem Jahre 1956. Er untersuchte endliche Automaten, d. h. Automaten ohne Gewichte, und charakterisiert erkennbare Sprachen durch rationale Ausdrücke. Man kann endliche Automaten als gewichtete Automaten mit Kosten in der trivialen booleschen Algebra $\mathbb{B}$ interpretieren.

**Satz 4.1 (Kleene 1956, [Kle56])** *Sei $\Sigma$ ein endliches Alphabet. Dann gilt*

$$\mathbb{B}^{\mathrm{rec}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle = \mathbb{B}^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle\,.$$

1961 hat Schützenberger dann das Resultat auf gewichtete Automaten über beliebigen Semiringen verallgemeinert.

**Satz 4.2 (Schützenberger 1961, [Sch61])** *Sei $\Sigma$ ein endliches Alphabet und $\mathbb{K}$ ein beliebiger Semiring. Dann gilt*

$$\mathbb{K}^{\mathrm{rec}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle = \mathbb{K}^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle\,.$$

Seit dieser Zeit wurden viele Resultate vom Kleene–Schützenberger–Typ für verschiedene Strukturen bewiesen. Ochmański zeigte 1984 ein Kleene–Resultat für Spurmonoide.

**Satz 4.3 (Ochmański 1985, [Och84])** *Sei $\mathbb{M}$ ein Spurmonoid. Dann gilt*

$$\mathbb{B}^{\mathrm{rec}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle = \mathbb{B}^{\mathrm{c-rat}}\langle\langle\mathbb{M}\rangle\rangle$$

Droste und Gastin entwickelten 1999 eine gemeinsame Verallgemeinerung der Resultate von Schützenberger und Ochmański.

**Satz 4.4 (Droste & Gastin 1999, [DG99])** *Sei* $\mathbb{M}$ *ein Spurmonoid und* $\mathbb{K}$ *ein Semiring. Dann gilt:*

1. $\mathbb{K}^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle \supseteq \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle$.
2. *Ist* $\mathbb{K}$ *kommutativ, dann ist* $\mathbb{K}^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle = \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle$.

Setzt man im vorangegangenen Satz $\mathbb{M} = \Sigma^*$, dann erhält man für kommutative Semiringe $\mathbb{K}^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle = \mathbb{K}^{\mathrm{rec}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$. Der Satz ist also sogar eine Verschärfung des Satzes von Schützenberger. Zusammen mit Satz 4.2 erhält man nun die bemerkenswerte Äquivalenz von $\mathbb{K}^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$ und $\mathbb{K}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$. Man kann also die Kleene–Iteration auf monoalphabetische und zusammenhängende Reihen einschränken ohne die Klasse der rationalen Potenzreihen zu verkleinern.

Droste und Kuske bzw. Ulbrich zeigten 2002 bzw. 2003 eine Verallgemeinerung der Resultate von Kleene und Schützenberger für Potenzreihen mit Deflationsparameter $\Phi$.

**Satz 4.5 (Droste & Kuske 2002, [DK03])** *Sei* $\Sigma$ *ein endliches Alphabet,* $\mathbb{K}$ *ein Semiring und* $\Phi : \Sigma^* \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ *ein Monoidhomomorphismus. Dann gilt* $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle = \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$.

Dass dies eine Verallgemeinerung von Satz 4.2 ist, sieht man wenn man $\Phi(w) = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ für alle $w \in \Sigma^*$ setzt.

Auch wir können die Ergebnisse der vorangegangen Abschnitte zu einem Kleene–Schützenberger Theorem zusammenfassen.

**Satz 4.6 (Hauptresultat)** *Sei* $(\Sigma, I)$ *ein Spuralphabet,* $\mathbb{M} := \mathbb{M}(\Sigma, I)$ *das zugehörige Spurmonoid und* $C := \{a \in \Sigma \mid \exists b : aIb\}$. *Sei weiter* $\mathbb{K}$ *ein Semiring und* $\Phi : \mathbb{M} \to \mathrm{End}(\mathbb{K})$ *ein Monoidhomomorphismus. Dann gilt*

1. $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle \supseteq \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle$.
2. *Ist* $\mathbb{K}$ *kommutativ und* $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ *eine endliche Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$, *dann ist* $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle = \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \mathbb{M} \rangle\rangle$.

Beweis. Aussage 1 ist gerade Satz 3.2. Die Aussage 2 folgt dann aus Satz 2.6. ■

Betrachten wir den Spezialfall $I = \emptyset$, so ist $C = \emptyset$ und deshalb $\Phi(\mathbb{M}(C, I)) = \{\mathrm{id}_\mathbb{K}\}$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$. Wir erhalten deshalb als Folgerung aus 2 von Satz 4.6 eine verschärfte Version von Satz 4.5 für kommutative Semiringe. Zusammen mit Satz 4.5 sieht man, dass sogar für alle Semiringe gilt:

$$\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rat}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle = \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle = \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle\,.$$

Aber auch der Satz von Droste und Gastin folgt aus unserem Hauptresultat. Setzt man $\Phi(u) = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ für alle $u \in \mathbb{M}$, dann gilt natürlich $\Phi(\mathbb{M}(C, I)) = \{\mathrm{id}_\mathbb{K}\}$ und damit folgt der Satz direkt.

## 4.2 Gegenbeispiele

Wir werden in diesem Abschnitt die Voraussetzungen des Hauptresultats 4.6 untersuchen und anhand von Gegenbeispielen zeigen, dass sie tatsächlich notwendig sind. Wir haben in Satz 4.6 gezeigt, dass zwar für beliebige Semiringe und Homomorphismen $\Phi$ die Inklusion $\mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{rec}}\langle\!\langle \mathbb{M} \rangle\!\rangle \subseteq \mathbb{K}_\Phi^{\mathrm{mc-rat}}\langle\!\langle \mathbb{M} \rangle\!\rangle$ gilt, die umgekehrte Inklusion konnten wir aber nur zeigen, wenn $\mathbb{K}$ kommutativ ist und $\Phi(\mathbb{M}(C, I)$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ ist.

Droste und Gastin geben in [DG99] ein Gegenbeispiel für $\mathbb{K} = \mathbb{B}\langle\{a, b\}^*\rangle$, das zeigt: Ist $\mathbb{K}$ nicht kommutativ, dann ist die Klasse der erkennbaren Potenzreihen im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter dem Cauchy–Produkt.

Ein zweites Gegenbeispiel aus [DG99] zeigt, dass wir die Kleene–Iteration im Allgemeinen auf monoalphabetische Potenzreihen einschränken müssen um den Abschluss der erkennbaren Potenzreihen zu erhalten. Dass auch die Einschränkung auf zusammenhängende Potenzreihen nötig ist, ist schon lange bekannt. Sei $\mathbb{M} = \{a\}^* \times \{b\}^*$, dann ist die Sprache $\{(a, b)\}^* = \{(a^n, b^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{B}\langle\!\langle \mathbb{M} \rangle\!\rangle$ nicht erkennbar, denn ihr Urbild unter dem kanonischen Epimorphismus ist nicht erkennbar.

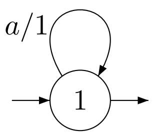
Folgendes Gegenbeispiel zeigt, dass die Voraussetzung $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ endlich im Allgemeinen notwendig ist.

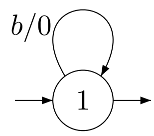
**Beispiel 4.1** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\max}$ und $0 < q < 1$. Wegen Lemma 1.10 identifizieren wir $\mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ mit $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$. Sei weiter $\mathbb{M}(\Sigma, I) = \{a\}^* \times \{b\}^*$ und $\Phi : \mathbb{M}(\Sigma, I) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}_{\max}) : w \mapsto q^{|w|}$. Seien zwei formale Potenzreihen $S_1$ und $S_2$ wie folgt definiert:

$$(S_1, a^k b^m) := \begin{cases} \frac{1-q^k}{1-q} & ; m = 0 \\ -\infty & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$(S_2, a^k b^m) := \begin{cases} 0 & ; k = 0 \\ -\infty & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$S_1$ und $S_2$ werden durch die folgenden Automaten erkannt:

$S_1$: 


$S_2$: 


Wir zeigen: $S := S_1 \odot_\Phi S_2$ ist nicht $\Phi$–erkennbar.

Angenommen $S$ ist $\Phi$–erkennbar und $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ ist eine $\Phi$–Darstellung von $S$. Mit dem Schubfachprinzip wählen wir zuerst $0 < k' < k$, sodass $\mu(a^k)q^k(\gamma)$ und $\mu(a^{k'})q^{k'}(\gamma)$ genau an den gleichen Stellen $-\infty$ haben. Außerdem wählen wir nochmal mit dem Schubfachprinzip eine echt aufsteigende Folge $(m_l)_{l \in \mathbb{N}}$ und einen Zustand $i$, sodass

$$i = \operatorname*{argmax}_{j \in Q} \left[\lambda\mu(b^{m_l})\right]_j + \left[q^{m_l}(\mu(a^k)q^k(\gamma))\right]_j .$$

Es gilt nun

$$[\lambda\mu(b^{m_l})]_i + \left[q^{m_l}(\mu(a^k)q^k(\gamma))\right]_i = \frac{1-q^k}{1-q} > \frac{1-q^{k'}}{1-q} \geq [\lambda\mu(b^{m_l})]_i + \left[q^{m_l}(\mu(a^{k'})q^{k'}(\gamma))\right]_i .$$

Damit folgt

$$\left[q^{m_l}(\mu(a^k)q^k(\gamma))\right]_i \geq \frac{1-q^k}{1-q} - \frac{1-q^{k'}}{1-q} > 0$$

für alle $m_l \in M$. Dies ist ein Widerspruch, da $0 < q < 1$ gewählt war.

Mit dem folgenden Gegenbeispiel zeigen wir, dass wir uns im Satz 4.6 wirklich auf Automorphismen beschränken müssen. Wir wählen als Semiring wieder $\mathbb{R}_{\max}$. $\mathbb{R}_{\max}$ hat nur einen Endomorphismus, der kein Automorphismus ist: die Abbildung $k \mapsto 0 \cdot k$.

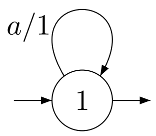
**Beispiel 4.2** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}_{\max}$. Wieder identifizieren wir $\mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ mit $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$. Sei weiter $\mathbb{M}(\Sigma, I) = \{a\}^* \times \{b\}^*$ und $\Phi : \mathbb{M}(\Sigma, I) \to \mathrm{End}(\mathbb{R}_{\max})$ definiert durch $\Phi(a) = 1$ und $\Phi(b) = 0$. Seien zwei formale Potenzreihen $S_1$ und $S_2$ wie folgt definiert:

$$(S_1, a^k b^m) := \begin{cases} k & ; m = 0 \\ -\infty & ; \text{sonst} \end{cases}$$

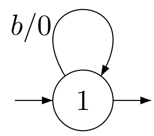
$$(S_2, a^k b^m) := \begin{cases} 0 & ; k = 0 \\ -\infty & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Wie im Gegenbeispiel 4.1 werden $S_1$ und $S_2$ durch zwei Automaten erkannt.

$S_1$:




$S_2$:




Wir zeigen: $S := S_1 \odot_\Phi S_2$ ist nicht $\Phi$–erkennbar.

Angenommen $S$ ist $\Phi$–erkennbar und $(Q, \lambda, \mu, \gamma)$ ist eine $\Phi$–Darstellung von $S$. Es ist $(S, a^n b) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber $\lambda\mu b\ \Phi(b)\,(\mu a^n \gamma) \in \{[\lambda\mu b]_i \mid i \in Q\} \cup \{-\infty\}$ nimmt nur endlich viele Werte an. Widerspruch!

## 4.3 Ausblick

Die beiden letzten Gegenbeispiele zeigen, dass die Voraussetzungen in unserem Hauptresultat notwendig sind. Wir können die Klasse der $\Phi$–erkennbaren Potenzreihen also nur charakterisieren, wenn $\Phi(\mathbb{M}(C, I))$ endlich ist. Offen bleibt demnach die Frage nach einer Charakterisierung der $\Phi$–erkennbaren formalen Potenzreihen, wenn die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Außerdem fordern wir, dass $\Phi(\mathbb{M}(C,I))$ ein Monoid von Automorphismen ist. In Bemerkung 2.11 haben wir die Frage aufgeworfen, inwieweit man tatsächlich Injektivität *und* Surjektivität der Endomorphismen in $\Phi(\mathbb{M}(C,I))$ braucht. Dass eins von beiden im Allgemeinen notwendig ist, zeigt das letzte Gegenbeispiel. Verzichtet man auf die Injektivität, so kann man den ersten Teil der Beweise der Sätze 2.2 und 2.3 nachvollziehen, wie wir in Bemerkung 2.11 gezeigt haben. Der zweite Teil des Beweises bleibt jedoch offen.

Das Konzept der gewichteten Automaten mit Deflationsparameter wurde von Droste und Kuske in [DK03] eingeführt. Ziel ihrer Arbeit ist es, ein Kostenkonzept für unendliche Wörter zu entwickeln und damit ein Büchi–Resultat für gewichtete Automaten zu beweisen. Es stellt sich daher natürlich die Frage ob man das in Kapitel 1 eingeführte Konzept für gewichtete Automaten mit Deflationsparameter über Spurmonoide auf unendliche Spuren erweitern kann.
In [DK03] untersuchen die Autoren außerdem die Klasse der erkennbaren Potenzreihen für verschiedene Deflationsparameter und beweisen, dass im Semiring $\mathbb{R}_{\max}$ die Klassen unvergleichbar sind. Eine analoge Fragestellung eröffnet sich natürlich auch in unserem allgemeineren Kontext.

# Literaturverzeichnis

[Bir35] Garrett Birkhoff: *On the structure of abstract algebras.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **31**:433 – 454, 1935.

[BR88] Jean Berstel und Christophe Reutenauer: *Rational Series and Their Languages*, Band 12 der Reihe *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer, Berlin, 1988.

[Büc60] Julius Richard Büchi: *Weak second–order arithmetic and finite automata.* Z. Math. Logik Grundlagen Math., **6**:66 – 92, 1960.

[CK93] Karel Culik II und Jarkko Kari: *Image compression using finite automata.* Computer &Graphics, **17**:305 – 313, 1993.

[CK97] Karel Culik II und Jarkko Kari: *Digital images and formal languages.* In: Grzegorz Rozenberg und Arto Salomaa (Herausgeber): *Beyond Words*, Band 3 der Reihe *Handbook of Formal Languages*, Kapitel 10, Seiten 599–616. Springer, Berlin, 1997.

[DG97] Manfred Dugas und Rüdiger Göbel: *Automorphism groups of fields II.* Commun. in Algebra, **25**:3777 – 3785, 1997.

[DG99] Manfred Droste und Paul Gastin: *The Kleene–Schützenberger theorem for formal power series in partially commuting variables.* Information and Computation, **153**:47–80, 1999.

[Die90] Volker Diekert: *Combinatorics on Traces*, Band 454 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin/New York, 1990.

[DK03] Manfred Droste und Dietrich Kuske: *Skew and infinitary formal power series.* In: *Automata, Languages and Programming, 30th ICALP*, Band 2719 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 426–438. Springer, 2003.

[DM97] Volker Diekert und Yves Métivier: *Partial commutation and traces.* In: Grzegorz Rozenberg und Arto Salomaa (Herausgeber): *Beyond Words*, Band 3 der Reihe *Handbook of Formal Languages*, Seiten 457–534. Springer, Berlin, 1997.

[DR95] Volker Diekert und Grzegorz Rozenberg (Herausgeber): *The Book of Traces.* World Scientific, Singapore, 1995.

[Kle56] Stephen Cole Kleene: *Representation of events in nerve nets and finite automata.* In: Claude Elwood Shannon und John McCarthy (Herausgeber): *Automata Studies*, Seiten 3 – 42. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.

[KS86] Werner Kuich und Arto Salomaa: *Semirings, Automata, Languages*, Band 5 der Reihe *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer, Berlin, 1986.

[Kui97] Werner Kuich: *Semirings and formal power series.* In: Grzegorz Rozenberg und Arto Salomaa (Herausgeber): *Word, Language, Grammar*, Band 1 der Reihe *Handbook of Formal Languages*, Seiten 609–677. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Moh97] Mehryar Mohri: *Finite–state transducers in language and speech processing.* Computational Linguistics, **23**:269–311, 1997.

[Och84] Edward Ochmański: *Regular Trace Languages (in Polish).* Doktorarbeit, Warszawa, 1984.

[Sch61] Marcel-Paul Schützenberger: *On the definition of a family of automata.* Inf. Control, **4**:245 – 270, 1961.

[SS78] Arto Salomaa und Matti Soittola: *Automata–theoretic aspects of formal power series.* Texts and Monographs in Computer Science. Springer, New York, 1978.

[Ulb03] Georg Ulbrich: *Gewichtete Automaten mit dynamischer Kostenberechnung.* Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, Institut für Algebra, 2003.

## Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Verhalten gewichteter Automaten mit Deflationsparameter über Spurmonoiden“ unter der Betreuung von Prof. Dr. Manfred Droste selbständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

30. September 2005

Datum Unterschrift