Christian Mathissen
Johannisgasse 26, Zi. 3-33, Tel. 97-32285
mathissen@informatik.uni-leipzig.de

WS 07/08
Institut für Informatik
Universität Leipzig

7. Übungsblatt zur Vorlesung „Modelle nebenläufiger Prozesse: Spurtheorie“

Das Übungsblatt ist zu finden unter www.informatik.uni-leipzig.de/∼mathissen. Die Aufgaben sind bis zur Übung am 31. Januar 2008 vorzubereiten und werden von Ihnen dort an der Tafel vorgestellt.

Im Folgenden sei A ein Alphabet, $I \subseteq A \times A$ eine Unabhängigkeitsrelation und $\eta : A^* \to M(A, I)$ der kanonische Epimorphismus. Sei $t \in M(A, I)$ und $\Gamma(t) = (V^t, E^t, l^t)$ der Abhängigkeitsgraph von t. Wir identifizieren t mit der relationalen Struktur $(V^t, E^t, (P_a^t)_{a \in A})$, wobei P_a^t die einstellige Relation $P_a^t = \{v \in V^t \mid l^t(v) = a\}$ ist. Für diese Strukturen betrachten wir monadische Logik 2. Stufe ($\mathrm{MSO}(A, I)$) analog zur monadischen Logik 2. Stufe für Wörter ($\mathrm{MSO}(A)$), wie Sie sie aus der Vorlesung Automatentheorie von Prof. Droste kennen. (Falls Ihnen die Definition nicht klar ist, lesen Sie bitte auf der Rückseite weiter.)

Aufgabe 7-1. Geben Sie eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{MSO}(A, I)$ an, so dass $t \models \varphi[v_1, v_2]$ genau dann, wenn $v_1 \leq v_2$ in der durch den Abhängigkeitsgraphen $\Gamma(t)$ beschriebenen partiellen Ordnung. (Finden Sie auch eine Formel ohne Variablen 2. Ordnung?)

Aufgabe 7-2.

a) Geben Sie eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}(A)$ über Wörtern an, so dass

$$(\{1, \ldots, n\}, \varphi^w, l^w) = \Gamma([w]) \qquad \text{für alle } w = a_1 \ldots a_n \in A^*,$$

wobei $\varphi^w = \{(i, j) \mid w \models \varphi[i, j]\}$ und $l^w(i) = a_i$ für $1 \leq i \leq n$.

b) Zeigen Sie: Ist $L \subseteq M(A, I)$ MSO-definierbar, so ist auch $\eta^{-1}(L)$ MSO-definierbar.

c) Folgern Sie, dass $L \subseteq M(A, I)$ erkennbar ist, falls L MSO-definierbar ist.
(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Büchi für Wörter)

Für Spurmonoide ist die Familie der *stern-freien Sprachen* definiert wie für das freie Monoid, d.h. es ist der Abschluss der endlichen Sprachen unter den Booleschen Operationen und Konkatenation. Auch für Spurmonoide gilt: *Eine Sprache $L \subseteq M(A, I)$ ist stern-frei genau dann, wenn ihr syntaktisches Monoid aperiodisch ist. (Guaiana, Restivo, Salemi ’92)*

Aufgabe 7-3. Zeigen Sie: Eine Sprache $L \subseteq M(A, I)$ ist FO-definierbar genau dann, wenn L stern-frei ist.

Der *Syntax* von $\mathrm{MSO}(A, I)$ ist gegeben durch

$$\varphi ::= P_a(x) \mid E(x, y) \mid x \in X \mid \varphi \vee \varphi \mid \neg\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \exists X.\varphi,$$

wobei x aus einer abzählbaren Menge von Variablen 1. Ordnung und X aus eine abzählbaren Menge von Variablen 2. Ordnung stammt.

Sei $\mathcal{V}_1$ eine endliche Menge von Variablen 1. Ordnung und $\mathcal{V}_2$ eine endliche Menge von Variablen 2. Ordnung, sowie $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$. Eine $(\mathcal{V}, t)$-*Zuweisung* ist eine Abbildung $\sigma : \mathcal{V} \to V^t \cup \mathscr{P}(V^t)$ mit der Eigenschaft, dass $\sigma(x) \in V^t$ für alle $x \in \mathcal{V}_1$ und $\sigma(X) \in \mathscr{P}(V^t)$ für alle $X \in \mathcal{V}_2$. Die *Semantik* einer Formel $\varphi \in \mathrm{MSO}(A, I)$ ist dann für eine Spur t und eine $(\mathcal{V}, t)$-Zuweisung σ (wobei $\mathcal{V}$ alle freien Variablen von φ enthalte) induktiv definiert durch

$$\begin{aligned}
(t,\sigma) &\models P_a(x) &&:\Longleftrightarrow && P_a^t(\sigma(x)),\\
(t,\sigma) &\models E_a(x,y) &&:\Longleftrightarrow && E_a^t(\sigma(x),\sigma(y)),\\
(t,\sigma) &\models x \in X &&:\Longleftrightarrow && \sigma(x) \subseteq \sigma(X),\\
(t,\sigma) &\models \varphi \vee \psi &&:\Longleftrightarrow && (t,\sigma) \models \varphi \quad \text{oder} \quad (t,\sigma) \models \psi,\\
(t,\sigma) &\models \neg\varphi &&:\Longleftrightarrow && \text{nicht} \quad (t,\sigma) \models \varphi,\\
(t,\sigma) &\models \exists x.\varphi &&:\Longleftrightarrow && \text{es existiert } i \in V^t \text{ so dass} \quad (t,\sigma[x \to i]) \models \varphi,\\
(t,\sigma) &\models \exists X.\varphi &&:\Longleftrightarrow && \text{es existiert } I \subseteq V^t \text{ so dass} \quad (t,\sigma[X \to I]) \models \varphi.
\end{aligned}$$

Für eine Formel φ mit zwei freien Variablen x, y schreiben wir auch $\varphi(x, y)$. Da die Semantik nur von der Belegung der freien Variablen abhängt, schreiben wir in diesem Fall $t \models \varphi[v_1, v_2]$, falls $(t, \sigma[x \to v_1, y \to v_2]) \models \varphi$ für eine Zuweisung σ. Eine Formel φ heißt *Satz*, falls sie kein freien Variablen enthält. Dann ist $\mathscr{L}(\varphi) := \{t \in M(A, I) \mid t \models \varphi\}$. In diesem Fall sagen wir $\mathscr{L}(\varphi)$ ist MSO-*definierbar*. Enthält φ keine Variable 2. Ordnung, so sagen wir $\mathscr{L}(\varphi)$ ist FO-*definierbar*.

Aufgabe 7-4 (Zusatzaufgabe). Sei $\leq$ eine lin. Ordnung auf A, $w = a_1 \dots a_n \in A^* \cap \mathrm{LNF}$ und $t = [w]$. Wir identifizieren V^t mit den Positionen von w, d.h. mit $\{1, \dots, n\}$ (siehe Konstruktion 3.2 der Vorlesung). Sei $\preceq$ die durch $\Gamma(t)$ beschriebene partielle Ordnung.

a) Zeigen Sie: $i < j \iff i \prec j$ oder $\exists k.\ \big(i < k$ und $a_i < a_k$ und $k \preceq j\big)$.

b) Finden Sie eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}(A, I)$, so dass $t \models \varphi[i, j]$ genau dann, wenn $i < j$. (Hinweis: Man kann die Charakterisierung in a) auffalten in dem man $i < k$ durch „nicht $k < i$“ersetzt und dann für $k < i$ wieder die entsprechende rechte Seite der Charakterisierung einsetzt.)

c) Folgern Sie nun wieder mit Hilfe des Satzes von Büchi für Wörter (und Aufgabe 7-2), dass $L \subseteq M(A, I)$ erkennbar ist genau dann, wenn L MSO-definierbar ist.