Christian Mathissen
Johannisgasse 26, Zi. 3-33, Tel. 97-32285
mathissen@informatik.uni-leipzig.de

WS 07/08
Institut für Informatik
Universität Leipzig

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Modelle nebenläufiger Prozesse: Spurtheorie“

Das Übungsblatt ist zu finden unter www.informatik.uni-leipzig.de/∼mathissen. Die Aufgaben sind bis zur Übung am 6. Dezember 2007 vorzubereiten und werden von Ihnen dort an der Tafel vorgestellt.

Im Folgenden sei (A, I) ein Spur-Alphabet und $D = A \times A \setminus I$. Eine Menge $A' \subseteq A$ heißt *zusammenhängend* falls es *keine echte* Zerlegung $E \dot{\cup} F = A'$ gibt mit $E \times F \subseteq I$. Eine Spur $s \in M(A, I)$ heißt *zusammenhängend*, falls $\mathrm{alph}(s)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 4-1. Zeigen Sie: Ist $w \in A^*$ mit $w, w^2 \in \mathrm{LNF}$ (vgl. Aufgabe 3-3), dann ist $[w]$ zusammenhängend.

Aufgabe 4-2. Für eine gegebene Spur $s \in M(A, I)$ sei $n(s)$ die Anzahl der Faktoren der Foata-Normalform (vgl. Aufgabe 3-4). Zeigen Sie, dass für alle $s_1, s_2 \in M(A, I)$ die Ungleichungskette $n(s_1 s_2) \leq n(s_1) + n(s_2) \leq n(s_1 s_2) \cdot |A|$ gilt.

Aufgabe 4-3. Sei (A, I) wie folgt: $A = \{a, b, c, d\}$ und $I = \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b)\}$.

a) Zeichnen Sie für $w = abddcdacbab$ den Abhängigkeitsgraphen $\Gamma(w)$ und bestimmen Sie daraus die Spur $[w]$. Wie kann man das algorithmisch lösen?

b) Gilt $[abc] \cdot [ddbbacb] = [bacbd] \cdot [dabcb]$ in $M(A, I)$? Wenn ja, geben Sie die Zerlegung der einzelnen Faktoren gemäß Levi's Lemma.

Aufgabe 4-4. Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 3.13.

Aufgabe 4-5. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher azyklischer Graph, $\bar{E}$ der symmetrische Abschluss von E und $\bar{G} = (V, \bar{E})$. Wir betrachten die Relation

$$\sim = \{(v_1, v_2) \in \bar{E} \mid \forall v_3 \in V \setminus \{v_1, v_2\}. (v_1, v_3) \in \bar{E} \Leftrightarrow (v_2, v_3) \in \bar{E}\} \cup \mathrm{id}_V.$$

a) Zeigen Sie, dass das eine Äquivalenzrelation ist.

Der ungerichtete Graph $\bar{G}/\sim$ hat als Knoten die Äquivalenzklassen $[v]_\sim$ von $\sim$ und eine Kanten zwischen $[v_1]_\sim$ und $[v_2]_\sim$ genau dann, wenn $[v_1]_\sim \neq [v_2]_\sim$ und $(v_1, v_2) \in \bar{E}$ (Überzeugen Sie sich, dass das wohldefiniert ist).

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Beschriftung $l : V \to A$, so dass (V, E, l) ein Abhängigkeitsgraph einer Spur in $M(A, I)$ ist, genau dann, wenn $\bar{G}/\sim$ isomorph zu einem Teilgraphen von $(A, D \setminus \mathrm{id}_A)$ ist.