Christian Mathissen
Johannisgasse 26, Zi. 3-33, Tel. 97-32285
`mathissen@informatik.uni-leipzig.de`

WS 07/08
Institut für Informatik
Universität Leipzig

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Modelle nebenläufiger Prozesse: Spurtheorie“

Das Übungsblatt ist zu finden unter `www.informatik.uni-leipzig.de/~mathissen`. Die Aufgaben sind bis zur Übung am 22. November 2007 vorzubereiten und werden von Ihnen dort an der Tafel vorgestellt.

Aufgabe 3-1. Zeigen Sie: Die (Isomorphieklassen von) beschrifteten azyklischen Graphen mit der in Definition 3.6 beschriebenen Konkatenation bilden ein Monoid.

Aufgabe 3-2. Berechnen Sie die Menge aller Linearisierungen im Beispiel 3.1.d).

Aufgabe 3-3. Sei A ein Alphabet, $\leq \subseteq A \times A$ eine lineare Ordnung und $I \subseteq A \times A$ eine Unabhängigkeitsrelation. Wir definieren die sog. *lexikographische Ordnung* auf A^* induktiv wie folgt. Für alle $u, v \in A^*$ und $a, b \in A$ gelte $\varepsilon \leq u$ und $au \leq bv :\iff \quad a < b$, oder $a = b$ und $u \leq v$.

a) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse $s \in M(A, I)$ genau einen Repräsentanten $\mathrm{lnf}(s) \in A^*$ enthält (die sog. *lexikographische Normalform*), der minimal bzgl. $\leq$ ist. Ist $\leq$ eine Wohlordnung auf A^*?

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{LNF} = \{\mathrm{lnf}(s) \mid s \in M(A, I)\}$ eine reguläre Sprache ist.
(Hinweis: Versuchen Sie das Komplement zu charakterisieren.)

Aufgabe 3-4. Seien A, $\leq$ und I wie in Aufgabe 3-3. Ein Wort $w \in A^*$ ist eine *Foata Normalform*, falls $w = \varepsilon$ oder $w = w_1 \dots w_n$ für $n \geq 1$ und $w_i \in A^+$ so dass:

a) Für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt: w_i ist ein Produkt aus paarweise unabhängigen Buchstaben und $w_i = \mathrm{lnf}([w_i])$.

b) Für jedes $i = 1, \dots, n-1$ gilt: zu jedem Buchstaben a in $\mathrm{alph}(w_{i+1})$ findet man einen von a abhängigen Buchstaben in $\mathrm{alph}(w_i)$.

Zeigen Sie, dass zu gegebener Spur s folgende rekursive Konstruktion eine Foata-Normalform $w = w_1 \dots w_n \in s$ liefert.

- Setze $\Gamma_1 := \Gamma(s) = (V_1, E_1, l_1)$.
- Falls $\Gamma_i = (V_i, E_i, l_i)$ nicht der leere Graph ist, setze $\Gamma_{i+1} := \Gamma_{i|V_i \setminus V_i'}$, wobei V_i' die Menge aller in Γ_i minimalen Knoten ist.
- Für alle i, für die Γ_i definiert wurde und nicht der leere Graph ist, sei w_i das Produkt der Buchstaben aus $\{l_i(v) \mid v \in V_i'\}$ in lexikographischer Ordnung.

Aufgabe 3-5 (Zusatzaufgabe). Zeigen Sie, dass es zu jeder Spur $s \in M(A, I)$ eine *eindeutige* Foata Normalform $w \in s$ gibt.

Aufgabe 3-6 (Zusatzaufgabe). Sei S eine Menge. Zeigen Sie, dass jede partielle Ordnung von S in einer linearen Ordnung von S enthalten ist. Insbesondere besitzt jeder beschriftete azyklische Graph über einem Spuralphabet eine Linearisierung.
(Machen Sie sich für diese Aufgabe mit der Aussage des Lemmas von Zorn vertraut.)